MEMORIE

DI

MATEMATICA E FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

TOMO I.

VERONA

PER DIONIGI RAMANZINI

MDCCLXXXII.

Nd' è mai, che la nazione Italiana, feconda in ogni tempo d'ingegni ſingolari, par quaſi inoperoſa a paragone d'altre non poche in Europa, intente a ſegnalarſi tutto giorno , e ſare a gara progreſſi luminoſi nelle Scienze? E' egli perchè o non ſia in Italia conceduto libero campo di eſercitarſi agl' intelletti , o perchè manchino i Mecenati , i mezzi , gl' incoraggiamenti ? Ma tanto ſon fatti comuni i lumi della buona Filoſofia , e della ſana Morale , che non v' è per così dire regione , in cui non ſia permeſſo a' dì noſtri in materie ſcientifiche il penſare , e lo ſcrivere liberamente. Le Accademie poi , i Licei , le Univerſità, d'uomini provvedute per ogni conto ragguardevoli, paleſano a chiare note l'impegno magnanimo con cui i Principi d' Italia gli ſtudj favoriſcono , e la cultura della nazione . Nè ad altro ſono inte-

ſe le pubbliche Biblioteche , le Specule , le Collezioni di Storia naturale, le Sale di macchine, e ſuppellettili per la Fiſica Sperimentale, i Teatri Anatomici , i Laboratorj di Chimica , ed altri egregj ſtabilimenti , fuorchè al grande oggetto di promuovere l'applicazione de' nazionali , e di porger loro i ſuffragj più preziosi. O ſarebbe di ciò cagione radicale l'eſſere ſeparati gl'Italiani, e nell'eſercizio diviſi delle proprie forze; tal che non può averſene il frutto, che all'unione di loro verrebbe fatto di mettere indubitatamente? Non è già che non ſia tutt'altra la condizione noſtra d'oggidì da quella de' tempi andati , in cui le civili diſcordie , le invaſioni de' barbari, le ſucceſſive alternazioni di Governi, di Leggi , d'Idiomi tenevano l'Italia in continuo ſconvolgimento , e contrappoſto di umori , e coſtumi; ove gli ſtudj nazionali, ſe ve ne aveva, confondevanſi cogli ſtranieri ; ove il nativo genio era avvilito , oppreſſo il valore, e tolta ogni via di pacifica intelligenza. Ma l'eſſere or pure partita l'Italia in dominj d'indole, e d'inſtituzione non una, fa che ſieno neceſſariamente l'un dall'altro diſgiunti gli uomini illuminati , che natura ha diſtribuito imparzialmente ; difficulta e reſtrigne le relazioni ; ſparge un ſeme impercettibile

di mutue gelosie; e arresta quel reciproco e libero scambio di lumi, ch'e' sarebbero naturalmente in comunione d'interessi, e di volere. Quindi è che lo splendore di loro, quantunque vivissimo, riverbera a stento, e languidamente sull'intera nazione. E non è raro il caso, che in una parte d'Italia s'ignorino persino le produzioni dell'altra, i progressi, le ricchezze letterarie, o non vengano elle in pregio ed onore, siccome alle straniere è conceduto. Come può mai in sì fatta opposizione di cose, in tanto abuso de' mezzi proprj e naturali copiosissimi, ampiarsi il fondo delle cognizioni utili, e il lustro aumentarsi, e la gloria della nazione? Certo è che l'unione de' dotti in Società patrie è l'epoca de' progressi, che si son fatti in Europa nelle Scienze e nelle Arti, e della reputazione altissima in cui son venute a' dì nostri moltissime regioni. Sbandita la pedanteria, l'illusione de' sistemi; preso per iscopo il vero, l'utile degli obbietti; appianate agli Studiosi le vie onde avanzarsi, ed eccitato coll'emulazione, e coll'esempio un gusto universale per l'applicazione, tutto per mezzo di queste Unioni concorre ad ingrandir la nazione; e non è meraviglia, che fatte ricche di tante e migliori forze combinate divengano poi elle arbitre

dell'opinione, e quaſi ſantuario d'ogni arte, d'ogni dottrina nazionale. Ma ſe dobbiam convenire per una parte, eſſer queſto il mezzo più valido e ſicuro onde conciliare col promovimento delle Scienze il bene delle nazioni; e non poſſiamo diſſimulare dall'altra, che lo ſvantaggio d'Italia è l'aver ella le ſue forze diſunite; come tentarne l'unione? e per qual mezzo libero da contrarietà aſſociare le cognizioni e l'opera di tanti illuſtri Italiani ſeparati, di cui non può a talento variarſi la coſtituzione? Non è invero ardua impreſa in uno Stato anche vaſto, ove la mente di un ſolo o di pochi dirige e regola il deſtino della nazione, il diſporre ed effettuare il trapiantamento, e la concittadinanza eziandio di parecchi uomini, ſotto gli occhi, e gl' influſſi benefici del Governo. Così è che veggiam ſorte felicemente tante inſigni Compagnie, che illuſtrano la Francia, l'Inghilterra, la Pruſſia, la Moſcovia, la Svezia, ed altri floridi Stati di Europa. Ma in Italia, qualunque ſiaſi l' inſtituzione o il ſiſtema che voglia immaginarſi, repugna alla condizione delle coſe, che poſſano in ſimil guiſa avvicinarſi ed unirſi gl' Italiani in un corpo di Scienziati nazionale, animato da un ſolo fiato vivificante. Non reſta pertanto, ponde-

rato il tutto a bilancia, che un ſolo tentativo da farſi, ch'è quello di ricorrere ad un principio motore degli uomini, principio ſempre attivo, e talora operante con entuſiaſmo, l'amor della Patria. Non v'ha certamente riſguardo che poſſa obbiettarſi ad un amichevole accordo, ad un legame innocente tra uomini della ſteſſa nazione, i quali ſenza mancare alle naturali occupazioni o a' doveri del proprio ſtato conſacrar vogliano parte del loro tempo al vantaggio, e al luſtro nazionale. Tutto eſſendo di elezione e di libera volontà, non può avervi altra legge per una Compagnia fondata ſu queſta baſe, fuorchè quella, ch'eſſa vorrà imporſi da sè, e cui l'amor patrio, e il genio naturale per le Scienze potranno rendere tollerabile, ed accetta. E queſta terrà luogo di obbligazione e di vincolo; manterrà in vigore la mutua amica corriſpondenza; animerà la comune applicazione, l'induſtria, e il fervore di tutti. Ecco i fondamenti di una Società, che prende a formarſi in Italia per l'avanzamento delle Scienze; ed ecco in queſto Volume il primo Saggio di ſue produzioni, combinate, come meglio le circoſtanze il permiſero ſul ſuo naſcimento. Da ora innanzi eſciranno regolarmente alla luce le Sociali Memorie, ſiccome ſuol farſi nelle al-

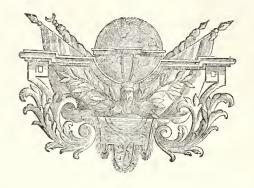
tre Accademie dell' Europa ; e saranno elle , a scansamento di competenze , disposte ne' Volumi coll' ordine alfabetico de' Cognomi. Ognuno risponderà per sè , e delle proprie meditazioni, ed esperienze; de' proprj calcoli , e risultamenti , come se ne facesse separatamente la pubblicazione. E perchè abbia ciascheduno un agio convenevole, onde conciliare co' riguardi della propria condizione il buon genio di adoperarsi per l' incremento di questa Società, è stabilito intanto , che resti libero un anno intero dall' uscita di un Volume alla stampa del susseguente ; sì che comparirà il secondo Tomo nel 1784., il terzo nel 1786., e così successivamente. Qualunque volta l' Autore il richiegga , sarà , sì per salvezza e assicuramento di proprietà nelle scoperte , e sì ancora per qualche motivo di nobile emulazione in uno stesso argomento , segnata a piè di pagina la data del ricevimento della Memoria di lui. Se la quantità degli Opuscoli oltrepassasse le misure di un discreto Volume , sarà diviso il Tomo in due col titolo di Parti. L'edizione potrà farsi in qualunque città d' Italia, ove risieda uno o più membri della Società per la necessaria e fedele conserva delle Memorie , e pel mantenimento dell' ordine convenuto; e quivi sarà fatta scelta

di

di abili Soggetti per la revisione, e correzione della Stampa, a' quali potranno indirizzarsi gli Autori per aggiunte, troncamenti, od altre modificazioni, che volessero ne' proprj Scritti. Il governo economico è fondato con sicure e ferme provvidenze, sì che potranno distribuirsi costantemente a ciascun membro della Società un Volume degli Atti in dono, e alcuni esemplari della rispettiva Dissertazione. Le Matematiche, e la Fisica in generale sono le Scienze peculiari della Società, la quale perciò in due Classi principali si dirama. A scelta e giudizio di queste verrà ammesso nella Compagnia ogni Italiano, il quale abbia un merito maturo, e per più opere date in luce, ed applaudite riconosciuto universalmente; sì che venendo proposto alcuno da aggiugnersi all'una o all'altra Classe, non potrà aver luogo l'associazione di lui, se l'intera Classe non vi acconsenta. Ma ad ogni Socio è conceduta libertà d'inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante e nuova produzione anche di persona non aggregata, purchè voglia, come di cosa propria, risponderne egli stesso inverso la Compagnia. E perchè suol esser dolce a' posteri, toccante, e di lodevole emulazione la ricordanza di que' pochi uomini, che si ado-

perano a prò di tutti gli altri, sarà compilato l'elogio d'ogni membro della Compagnia, che Morte andrà togliendole di tanto in tanto; cioè tessuta la vita del Filosofo, non quella dell'uomo semplicemente. Non è ammesso negli Atti della Società altro idioma, fuorchè l'Italiano: idioma proprio a tutto, e fatto ormai per l'Europa agli uomini non inculti familiare. Se una lingua viva stende vie più il suo impero, quanto più sale in reputazione chi la parla, e quanto più il pregio delle opere scritte s'aumenta; una collezione scelta de' progressi nelle Scienze di una Nazione merita abbastanza di essere conosciuta, perchè la lingua in cui è fatta divenga, quant'altra mai, autorevole e importante. Questo è il piano semplice e concordato della Società Italiana. Parrà talvolta sterile a primo aspetto una scoperta di Anatomia, un Medico cimento, un'esperienza di Chimica, una nuova verità di Geometria o di Calcolo. Ma se qualche soggetto non è immediatamente applicabile, è sempre vero, che o s'attiene ad altri che il sono, o vi ci conduce necessariamente. E v'ha ancora tal indole di verità, la quale senza il concorso di molte altre non può per sè essere applicata immediatamente; ve n'ha che s'ap-

plicherebbero , se ci fosse permesso di veder tutto , e di concatenare le anella innumerabili di una Scienza ; e ve n'ha persine, che staranno probabilmente oziose in perpetuo , quasi monumenti di lusso della mente umana. Ma quand' anche ciò fosse, non è mai inutile un' indagine , che conduce per lo meno a qualche nuova riflessione; in cui l'intelletto brama ardentemente d'internarsi; che lo illumina e pasce con viva e dolce soddisfazione: avendo egli pure i suoi bisogni, i suoi piaceri, e non di rado qualche capriccio da appagare. La Società non si propone , che l' investigazione del vero in che che sia , e di far conserva delle ricerche de' suoi , intorno a ciò che è conceduto agli uomini di sviluppare nelle Scienze con la meditazione, col ragionamento, e con l' osservazione. Il connettere tutto insieme, e il rendere fruttuoso eziandio quello, che sembrar può oggidì infeconda speculazione, è opera del tempo, e bene spesso di accidentali, e non attese combinazioni. Questo è il bene, il vantaggio capitale, che mancava all' Italia, in cui, non il possedimento d' uomini illustri , e nelle Scienze quant' altri mai perspicaci e profondissimi, ma ben l' unione di loro in un sol corpo regolato poteva altrui invidiarsi da gran tempo.

Così avverrà, che si rivendichino pienamente i dritti di una regione, che fu prima dell' altre ricovero e sede delle Scienze, e dell' Arti, e donde attinse da' primi secoli l' Europa studj, instituzioni, e cultura.

INDICE
DELLE MEMORIE
PRIMA SEZIONE.

SECONDA SEZIONE.

INTRODUZIONE

A nuovi Principj della Teoria Elettrica dedotti dall' analisi de' fenomeni delle Elettriche punte.

Del P. Carlo Barletti, Delle Scuole Pie, Professore di Fisica nell' Università di Pavia.

PARTE PRIMA.

SUppongo notissime le prime sperienze sulle Elettriche punte, pubblicate da *Franklin*, e da le *Roi*, non meno che le più recenti di *Franklin* medesimo, di *Wilson*, di *Naime*, e di *Barbier* de *Tinan*. Come però le prime non sono che fatti isolati, incapaci di formare induzione; così le altre sono unicamente ristrette all' uso delle punte stesse nel riparare le fabbriche da' danni del fulmine; e perciò non tendono a perfezionare la teoria delle punte; e per mancanza appunto di quella teoria restano in sestesse meno espressive. Ho fatto io qualche saggio per ripigliare le cose da capo, e tentarne una teoria, che renda meno incerte e precarie quelle prime, ed insieme più chiara l' espressione delle ultime. Esporrò primieramente alcune sperienze con tutta la brevità.

Comincio dal misurare l' azione di una elettrica punta opposta alla superficie armata di uno strato resistente; indi al rovescio diretta dalla superficie stessa da un conduttore elettrico. Mi sembrò questa la più sicura via per ridurre a misura ed a proporzione ciò che fino qui non si maneggiò se non a masse confuse.

Nella macchina elettrica a disco di pulito cristallo isolo il cuscinetto strofinante, ed a questo unisco un con-

duttore fatto a tubo di ottone lungo pollici 18, del diametro di pollici 2, in tutta la ſua lunghezza cilindrico, che termina in cono dalla parte che guarda il cuſcinetto ſtrofinante, ed all' oppoſta eſtremità finiſce in globo più groſſo di un mezzo pollice che non è il diametro del tubo. Alla più eſtrema conveſſità di queſto globo nella direzione ſteſſa dell' aſſe del tubo attacco un filo di ottone groſſo una linea, lungo pollici tre, linee nove, terminato in punta conica acutiſſima.

Lo ſtrato reſiſtente è una laſtra rettangolare di vetro di Germania alta pollici $17\frac{1}{2}$, larga pollici $12\frac{2}{3}$, coperta di foglia di ſtagno egualmente nelle due oppoſte ſuperficie con un labbro da ambe le parti nudo e pulito di pollici $1\frac{1}{2}$, talchè reſta un' armatura diſtante dall' altra pel giro di pollici tre intorno all' orlo del vetro.

Dalla cima di ciaſcuna armatura pende nel mezzo un ſottil filo di lino lungo pollici 11, teſo in fondo con un globetto di midolla di ſambuco groſſo linee tre.

Sta queſto quadro ſoſtenuto verticalmente ſecondo la ſua altezza ſopra due baſi iſolanti, col moto delle quali può a piacimento appreſſarſi, o ſcoſtarſi dalla punta qui ſopra fiſſata nel tubo. Ed appunto reſtando queſta diretta a due terzi di altezza d' un' armatura, ed appoggiando all' armatura oppoſta un groſſo filo di ottone, acciocchè la ſteſſa per tal via comunichi liberamente col ſuolo, e poſſa il quadro coricarſi; io eccito colla rotazione del diſco la reſinoſa elettricità nel tubo, e nelle varie diſtanze di quel quadro dalla punta ſteſſa faccio la ſeguente Serie di ſperienze. Avverto ora per ſempre, che in ciaſcuna variazione delle diſtanze dalla minima fino alla maſſima reſta ſempre eguale l' eccitamento di elettricità nella macchina, ed eguale è il numero de' giri del diſco in ciaſcun atto d' ogni progreſſione delle diſtanze medeſime. Furono que' giri in alcune progreſſioni trenta, in altre seſſanta, ma ſempre in egual numero ad ogni diſtanza della intera progreſſione.

SERIE PRIMA.

1. Ritiro paſſo paſſo il quadro dal contatto colla punta fino alla diſtanza di quattro pollici, e trovo ad ogni paſſo nel quadro piena la forza della carica ſcuotente e fulminante.

2. Seguo gradatamente a ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici ſei, e trovo che ne' frappoſti intervalli comincia a comparire alquanto diminuita la forza della carica.

3. Per diminuirla notabilmente e renderla ſotto la metà della piena ſua forza fa d'uopo ritirare il quadro fino alla diſtanza di pollici otto.

4. Dagli otto fino a' dodici andò ſcemando la forza della carica, la quale però fu tuttavia bene ſcintillante e ſcuotente. Scemò per altro tale forza con progreſſione più aſſai decreſcente al di là degli otto pollici, che non faceva fino agli otto.

5. La provai ancora ſenſibile tanto nella ſcintillazione, come nella ſcoſſa, ritirando il quadro fino ai quattordici pollici lontano dalla punta. In queſte ultime degradazioni per accertarmi più ſicuramente ſcarico il quadro facendone paſſare la ſcoſſa tra l'indice e il pollice della mia mano, co' quali tocco inſieme le oppoſte armature.

6. Al di là de' quattordici pollici più non s'impreſſe nel quadro forza di carica, atta a ſcuotere ſenſibilmente, ma ſoltanto a dare tenue ſcintillazione, e in fine tenui moti nel pendolino anneſſo all'armatura nell' atto che continuava a girare il diſco.

7. I cuſcinetti e il tubo, che porſero perenne vena di elettricità in tutte queſte ſperienze, non erano perfettamente iſolati dai corpi intorno, ſe non alla diſtanza di otto pollici: il che ſi deve tener a mente pel ſucceſſivo confronto.

8. Miſurai la forza della ſcintilla nel tubo, mentre ſi caricò il quadro in tutte le diſtanze precedenti; e trovai, che nelle diſtanze de' primi numeri era tanto languida l'elettricità, che appena poteva trarſi la ſcintilla, accoſtando il dito al tubo ad una linea o due; ed anche alle maggiori diſtanze del quadro, notate negli ultimi numeri, la ſcintilla comparve ſempre dal tubo aſſai fiacca alla diſtanza di tre linee appena.

La punta unita al tubo in queſta prima Serie ſi chiamerà per compendio *punta di elettricità reſinoſa*.

PREPARAZIONE.

Ritengo l'antecedente preparazione, e ſoltanto ſtacco la punta dal globo, e la fiſſo nella medeſima altezza e direzione dell'aſſe del tubo ſull'armatura del quadro. Preſento quella punta al globo, cui ſtava prima unita, e rinnovando ad ogni varietà delle diſtanze i trenta o ſeſſanta giri del diſco, che replico egualmente in ciaſcuna progreſſione, ho la ſeguente Serie di ſperienze.

SERIE SECONDA.

1. Parto al roveſcio dell' antecedente Serie della diſtanza di quattordici pollici, ed arrivo fino alla diſtanza di ſei pollici, prima di trovare nel quadro il minimo cenno di que' moti e di quella luce, che erano ancor tanto notabili nella prima Serie molto al di là de' quattordici.

2. Dopo la diſtanza di ſei pollici comincia qualche volta a comparire alcun tenue moto, e poi alcuna luce, ma ſenza verun indizio di ſcoſſa.

3. Per avere nello ſcaricare il quadro qualche coſtante ſegno di luce ſcintillante dopo i trenta o ſeſſanta giri del diſco, d'uopo è appreſſare la punta al globo fino

ai quattro pollici, nè questi ancora bastano per renderne sensibile la scossa.

4. Inoltrata ancor di più la punta sotto ai tre pollici dal globo, comincia a sentirsi nel quadro picciola scossa, come nella Serie antecedente alla distanza di quattordici.

5. Per avere un senso di scossa equivalente a quello, che si ebbe nell' antecedente Serie al di là degli otto pollici, fu qui necessario inoltrare la punta ai due pollici dal globo.

6. In fine la piena scarica fulminante non si ottiene mai, se non portata la punta a distanza non meno di un pollice.

7. L' isolamento del tubo era in tutta questa Serie perfetto, come nell'antecedente ad otto pollici.

8. La forza dell'elettricità nel tubo, mentre si caricò il quadro, fu tale, che essendo la punta alla distanza di quattro pollici non mancò di trarsi dal tubo scintilla piena vivissima e frequente, presentando il dito anche al di là di un pollice. Ed accostandosi la punta ai tre, ai due, e per fino verso ad un pollice, non fu mai tanto fiacca la scintilla, come lo fu nell' antecedente Serie, quando il quadro era lontano dalla punta verso i quattordici.

La punta unita al quadro in tutta questa Serie la chiamerò per brevità *punta opposta alla resinosa elettricità*.

COROLLARI.

1. La punta di elettricità resinosa induce la carica nell' opposto quadro con forza per lo meno quadrupla della punta opposta alla stessa elettricità.

Quella in distanza di quattordici pollici imprime nel quadro tanta carica (*Ser.* 1. *n.* 5), come questa ai tre (*Ser.* 2. *n.* 4); e nuovamente quella agli otto pollici tanta, come questa ai due (*Ser.* 2. *n.* 5); e in fine

quella ai quattro pollici, come questa ad uno (*Ser.* 1. *n.* 1, e *Ser.* 2. *n.* 6).

2. La punta di elettricità resinosa disperde la sua specie raccolta, o accorrente di continuo nel suo conduttore con forza per lo meno settupla della punta opposta alla stessa elettricità.

Le scintille nel tubo con punta, quando il quadro fu alla distanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 8), restarono sempre minori, che quando la punta del quadro fu vicina al tubo anche più di due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8). Ora quelle scintille sono la più esatta misura della elettricità residua, cioè non dispersa.

3. La punta di resinosa elettricità induce notabile forza di carica nell'opposto quadro, benchè questo sia rimosso fino a' limiti dell' isolamento.

I limiti dell' isolamento sono otto pollici (*Ser.* 1. *n.* 7), e la forza della carica si trova ancora in que' limiti poco meno della metà (*Ser.* 1. *n.* 3).

4. E segue ad indurre ancora qualche forza nel quadro rimosso alla distanza di tre quarti al di là di que' limiti.

La forza della carica è ancor sensibile oltre ai dodici fino a' quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 4, 5), cioè sei pollici al di là de' limiti dell' isolamento, e questi sono appunto tre quarti di otto.

5. La forza della carica, impressa dalla punta stessa nel quadro al di là dei limiti dell' isolamento, non corrisponde alla diminuzione di forza, che si osserva nella scintilla tratta dal tubo.

Nella seconda Serie non fu mai la scintilla tanto fiacca, anche quando nel quadro s' impresse la piena forza della carica, come lo era nella prima Serie, quando la carica fu tenuissima alla distanza di quattordici pollici (*Ser.* 1. *n.* 5, 8. *Ser.* 2. *n.* 8). Tale scintilla è lenta, e spicca appena a tre linee dal tubo; quando la scintilla piena, tolta la punta, spicca frequente a distanza di un

pollice; e frattanto la carica è tenuiſſima. Dunque l'elettricità del tubo non concorre, che in picciola ſua parte a far queſta carica.

6. Viceverſa la punta oppoſta all' elettricità reſinoſa non induce nel quadro veruna carica, nè ſcema punto la forza della ſcintilla nel tubo, finchè l'armatura ſteſſa, cui ſta unita la punta, non arriva entro i limiti dell' iſolamento.

Finchè la punta non è vicina verſo i quattro pollici al tubo, non compariſce nel quadro menoma carica, e appena qualche tenue luce (*Ser.* 2. *n.* 3). Ora il filo della punta è lungo pollici tre e nove linee, come ſi avvertì da principio. Aggiunti queſti a' quattro pollici, fanno pollici ſette e nove linee, che corriſpondono dentro i limiti dell' iſolamento.

7. Nè comincia la carica a farſi notabile nel quadro, ſe non quando l' armatura ſteſſa è inoltrata verſo un quarto entro i limiti dell' iſolamento.

Inoltrata la punta ſotto i tre pollici, e fino ai due ſi ha nel quadro notabile la ſcoſſa (*Ser.* 2. *n.* 4, 5). Aggiunti queſti alla lunghezza del filo della punta fanno verſo i pollici ſei, che portano l'armatura inoltrata due pollici, cioè verſo un quarto inoltrata entro i limiti dell' iſolamento.

8. E qui la diminuzione di ſcintilla, tratta in quell' atto dal tubo, è corriſpondente al ſucceſſivo aumento della carica impreſſa nel quadro.

Fino ſotto ai quattro pollici, ove niuna fu la carica nel quadro, reſtò piena e frequente la ſcintilla; nè andò queſta ſcemando, ſe non in proporzione che maggiore s'impreſſe nel quadro la carica (*Ser.* 2. *n.* 6, 8).

PREPARAZIONE.

Mi ſervo della ſteſſa macchina, e tubo, e quadro, e punta, ſe non che tolto l' iſolamento de' cuſcinetti, pre-

ſento il tubo nel modo ſteſſo di prima, non più ai cuſcinetti, ma al diſco, in diſtanza da quelli d' un ſeſto circa della periferia del diſco. Talchè in vece di reſinoſa elettricità raccolgo nel tubo la vitrea, e ſo con queſta la Serie di ſperienze corriſpondenti alle due premeſſe. Comincio pertanto ad applicare la punta al globo del tubo, e preſento a queſta il quadro ſimilmente, come nella prima Serie, nelle diſtanze ſeguenti con trenta e ſeſſanta giri del diſco in ciaſcuna.

SERIE TERZA.

1. Dal contatto del quadro colla punta, ritirandolo fino verſo la diſtanza di due pollici, s' induce nello ſteſſo piena forza di carica.

2. Ai tre pollici ſi riconoſce già alquanto diminuita: ai quattro è già verſo la metà.

3. Indi va per modo ſcemando, che a' ſei è già molto al di ſotto alla metà della piena ſua forza.

4. Rimoſſo il quadro a piccioli tratti da' ſei fino a' dieci pollici, reſta ad ogni ſucceſſivo tratto diminuita la carica, talchè ai dieci è alquanto minore, che non era nella prima Serie alla diſtanza di dodici.

5. Dai dieci fino ai dodici pollici ſi riduce all' ultimo termine la forza ſcuotente, e non reſtano al di là, che tenui ſcintillazioni, come erano nella prima Serie al di là dei quattordici.

6. Volli qui proſeguire a ritirar tanto il quadro da veder fin dove reſtaſſero ſenſibili quelle ſcintillazioni; e le trovai notabilmente diminuite ai quattordici pollici; indi però continuarono, ma appena notabili fino ai pollici venti; al di là de' quali non comparvero che tenuiſſimi ſegni di luce, nel toccare col pollice e indice inſieme le due oppoſte armature del quadro, fino alla diſtanza di pollici ventitre; oltre i quali non reſtò che fino ai ventiquattro pollici alcun tenue moto nel pendolino

dolino anneſſo all'armatura nell'atto che continuava a girare il diſco.

7. L' iſolamento del tubo in tutta queſta Serie era perfetto ai dieci pollici.

8. Le ſcintille al tubo, benchè ſi caricaſſe il quadro vicino alla punta più d'un pollice e mezzo, non furono mai tanto fiacche, come lo furono nella prima Serie, quando era il quadro al di là de'quattordici.

9. Quando ſi caricò il quadro al di là de'quattro pollici, la ſcintilla ſi ebbe già viva e frequente; e infine ritirato il quadro al di là degli otto pollici poco era lontana dalla prima ſua forza; alla quale giunſe, e reſtò mai ſempre, qualora era il quadro diſtante più di pollici dieci.

Si chiamerà in tutta queſta Serie *la punta di elettricità vitrea*.

PREPARAZIONE.

Rimane la ſteſſa preparazione, ſe non che traſporto la punta del globo, e la ſiſſo nella ſteſſa altezza e direzione all'armatura del quadro. Indi come nelle precedenti Serie la preſento al globo ſteſſo nelle ſeguenti diſtanze.

SERIE QUARTA.

1. Comincio dalle maggiori diſtanze, e dopo trenta o ſeſſanta giri del diſco ſcorgo ſoltanto a'dieci pollici i primi moti al pendolino anneſſo all'armatura.

2. Succedono ai moti i primi cenni di luce, mentre tento di ſcaricare il quadro: ed ai nove pollici già è ſenſibile inſieme alla ſcintillazione una lieve forza di ſcuotere.

3. Più innanzi di nove pollici creſce la carica ſcuo-

tente per modo, che a' ſei è già ben vicina alla metà della piena ſua forza.

4. Ai quattro pollici è alquanto maggiore, che non era nella terza Serie alla ſteſſa diſtanza; ed al di là dei tre ſi ha ſempre piena la carica ſcuotente, e fulminante.

5. L' iſolamento fu lo ſteſſo che nell' antecedente Serie.

6. E le ſcintille comparvero dal tubo come nella Serie antecedente (*n.* 9); ſe non che qui in parità di quelle diſtanze furono alquanto più tarde e più deboli.

Dirò in tutta queſta Serie *la punta oppoſta alla vitrea elettricità*.

COROLLARJ.

1. La punta di vitrea elettricità induce la ſua ſpecie nell' oppoſto quadro, finchè queſto è dentro i limiti dell' iſolamento con forza notabilmente minore della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità; ma quando il quadro è fuori de' limiti dell' iſolamento, quella imprime nello ſteſſo la ſua ſpecie con forza non meno d' un terzo maggiore di queſta.

Finchè il quadro è dentro i limiti dell' iſolamento, quella induce piena carica ſotto la diſtanza di due pollici (*Ser.* 3. *n.* 1), queſta fa lo ſteſſo alla diſtanza di tre (*Ser.* 4. *n.* 4). In quella ai ſei pollici la carica è molto meno di metà (*Ser.* 3. *n.* 3). In queſta alla ſteſſa diſtanza è già ben vicina alla metà (*Ser.* 4. *n.* 3); ed ai quattro pollici è qui maggiore che in quella (*Ser.* 4. *n.* 4).

Fuori de' limiti poi quella induce carica da far ſenſo di ſcoſſa alla diſtanza di dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 4). Queſta fa lo ſteſſo ſoltanto a' pollici nove (*Ser.* 4. *n.* 2), nella quale diſtanza è il quadro fuori dell' iſolamento per la maggior lunghezza del filo della punta. E perciò col confronto delle ſcoſſe, e delle ſole diſtanze dalle

punte ſarebbe quella maggiore d' un terzo eſatto. Ma ſiccome col confronto degli ultimi cenni di luce quella arriva al di là de' ventitre (*Ser. 3. n.* 5), e queſta non ſi eſtende al di là de' dieci (*Ser.* 4. *n.* 1), a' quali aggiunti pollici tre linee nove della lunghezza della punta, non arrivano a' quattordici; perciò non ho ſtimato di ſcoſtarmi dalla verità eſprimendone la proporzione non meno d'un terzo.

2. La punta di vitrea elettricità diſperde la ſua ſpecie raccolta o accorrente di continuo nel conduttore con forza minore della punta oppoſta alla ſteſſa elettricità.

Le ſcintille, che moſtrano i reſidui dell' elettricità non diſperſa, furono ſempre minori in pari diſtanze colla punta oppoſta alla vitrea elettricità, che colla prima (*Ser. 3. n. 9. Ser.* 4. *n.* 6). Dunque la punta di vitrea elettricità diſperde meno.

Ma queſta minor diſperſione ſi prova ancor più eſattamente dalla maggior forza, colla quale quella ſpinge nell'oppoſto quadro i ſegni della ſua elettricità. Poichè quella inoltra la carica ſenſibile fino ai dodici pollici (*Ser. 3. n.* 4), e gli ultimi ſegni fino ai ventiquattro pollici (*ivi n.* 5). Queſta nella carica non oltrepaſſa i nove, e negli ultimi ſegni non paſſa i dieci pollici (*Ser.* 4. *n.* 1, 2). Sommando queſte ragioni ſono come 36 : 19, e perciò quella diſperſione è poco meno di ſubdupla.

3. La punta di vitrea elettricità non induce nell'oppoſto quadro ſe non tenue forza di carica, quando queſto è rimoſſo ai limiti dell'iſolamento.

Riſulta dall' immediato confronto del n. 4 e 7 della terza Serie.

4. E non arriva ad indurne forza ſenſibile al di là d'un quinto de' limiti dell' iſolamento.

Non oltrepaſſa tale forza dodici pollici (*Ser.* 3. *n.* 5), e l'iſolamento è dieci.

5. La forza della carica impreſſa dalla punta ſteſſa nel quadro, tanto entro, come oltre i limiti dell' iſo-

lamento, ha proporzionale diminuzione di ſcintilla tratta dal tubo nell' atto che ſi fa quella carica.

Colla progreſſione, che ſi allontana il quadro, ſcema la forza della carica impreſſa (*Ser.* 3. *n.* 3, 4, 5); e nella ſteſſa progreſſione creſce la frequenza e la vivacità della ſcintilla (*Ser.* 3. *n.* 9).

6. Viceverſa la punta oppoſta alla vitrea elettricità continua ad indurre nel ſuo quadro qualche forza di carica fino alla diſtanza di nove decime dell' iſolamento del tubo, e quando l' armatura del quadro è poco meno di tre decime fuori de' limiti dell' iſolamento.

Ai nove pollici è ancor ſenſibile nel quadro la forza di ſcuotere (*Ser.* 4. *n.* 2), e l' iſolamento è dieci.

Per dichiarazione dell' ultima parte non ſi ha, che aggiugnere ai nove altri pollici tre e linee nove, che ſono poco meno di tre decime fuori de' limiti dell' iſolamento.

7. E la carica impreſſa arriva alla metà della piena ſua forza, quando la punta è diſtante dal tubo tre quinti dell' iſolamento, e quando l' armatura è ancor di poco inoltrata entro que' limiti.

Si ha la metà della carica a pollici ſei della punta (*Ser.* 4. *n.* 3), che ſono tre quinti dell' iſolamento dieci. Ma l' armatura è più in dietro per tutta la lunghezza della punta, che è pollici tre linee nove. Dunque in tal atto l' armatura è appena inoltrata di tre linee ne' limiti dell' iſolamento.

8. E qui pure nell' atto che ſi fa la carica ſi ſcorge la ſcintilla nel tubo diminuita in proporzione dell' aumento della carica ſteſſa.

Si prova dal numero 4 e 6 della quarta Serie col raziocinio ſimile a quello del Corollario quinto, ſe non che qui a diſtanze eguali a quelle del Corollario quinto la carica è alquanto maggiore, e in proporzione minore la ſcintilla. Fuori poi de' limiti dell' iſolamento, come niuna è la carica, così niuna è la diminuzione della ſcintilla.

INTRODUZIONE

Alla teoria delle punte negli elettrici fenomeni.

NOn altro avendo io riconofciuto colla privata meditazione de' fenomeni delle elettriche punte defcritte dai celebri Fifici, che ful bel principio accennai, fe non anguftie d' inveftigazione, anche ne' più grandiofi apparati, e figlia di quelle la confufione e la contraddizione, quanto fatte per eccitare meraviglia e forprefa, altrettanto inette per iftruire; mi propofi di rifolvere tutti i poffibili fenomeni delle punte ciafcuno ne' fuoi diftinti elementi, e di ridurre ciafcun elemento a mifure e proporzioni, quanto più fi poteffero, precife. Trovai a quefti oggetti infufficiente l' ufo degli elettrometri anche più delicati, come altrove dimoftrerò; e fui per le difaftrofe e lunghe vie dell' analifi condotto in fine a nuove e luminofe fperienze, che ho diftribuite in tre parti. Formano la prima quelle quattro Serie di fperienze co' Corollarj fin qui propofti, e co' feguenti Teoremi. Comprende la feconda parte altra Serie di fperienze con punte oppofte a punte, e fuperficie a fuperficie, ne' Corollarj e Teoremi delle quali faranno vie più confermate le verità ftabilite nella prima parte; e compariranno alfine sfatati il pennello, la ftelletta, e fimili apparenze di elettrica luce. Abbraccia la terza parte le combinazioni delle punte e delle fuperficie procedenti dalle oppofte facce di bocce o quadri caricati di elettricità, le quali fecondo l' ufo noftro poffono maneggiarfi con tale efpreffione che fanno dai veri fonti, e naturalmente fcorrere tutte

le novità con ſingolare diligenza deſcritte da *Franklin*, da *Bergman* (*), da *Barbier* de *Tinan*, e da *Naime*.

Ripigliando frattanto il filo della prima parte oſſerverò, che non per altra ragione io arrivai a dedurre chiare e diſtinte proporzioni in una materia, quanto ribadita, altrettanto confuſa, e perciò riputata alieniſſima dalla matematica preciſione, e dal calcolo, ſe non perchè raccolſi in quel quadro verticale l' elettricità del conduttore, e la riduſſi non meno nella ſcintilla, che nella ſcoſſa agli eſtremi e ai termini ſenſibili colle indicate diſtanze. E qui benchè io ſia alieniſſimo dalla novità di nomi, co' quali ſogliono alcuni abbacinare il volgo, e rarefare i più ſemplici principj delle ſcienze, fui non oſtante coſtretto a diſtinguere le precedenti Serie di ſperienze ciaſcuna col proprio nome per non involgere i miei lettori e me ſteſſo in un labirinto di vani paradoſſi, che ſorgono inevitabili qualunque volta ſotto l' ambiguità di nomi celiamo un continuo cambio di mezzo termine, ed in vece di ſeguir fedelmente l' ingenuità de' fenomeni vogliamo a bello ſtudio deviare dalla diſtinzione delle idee e de' vocaboli che le eſprimono.

Sarebbe dopo ciò più la noja che l' utile, ſe voleſſi qui trattenermi nel racconto delle varie combinazioni, e de' replicati tentativi, per mezzo de' quali fui condotto a quelle ſperienze luminoſe. Gioverà piuttoſto avvertire, che avendo provato le Serie ſteſſe con varietà d' apparato, d' iſolamento, e di elettricità, trovai in ogni Serie proporzionali le diſtanze e gli effetti; ed ho preſcelte queſte proporzioni delle diſtanze e degli effetti,

---

(*) Le ſperienze di *Bergman* quanto ſono più belle, tanto meno ſono conoſciute. Le riporterò qui colle ſteſſe ſue parole: *Apices poſitivi ſtant, & negativi quoque; quod ad oculum monſtrari poteſt, phoſphoro illito. Nam vapores alias vage e corpore non electriſato ſurgentes, inſtar caudæ cometæ tam poſitivi quam negativi ad magnam diſtantiam ejectant. Difficulter cum privatione, rarefactione, & adfluxu fluidi electrici conciliari poſſunt phænomena allata.* Nelle Tranſazioni Filoſofiche di Londra Vol. 54 ann. 1764 pag. 87.

come le medie, e più costanti, dopo averle ripetute non meno di sei volte in ciascun atto e termine loro.

E siccome le prime Serie mi hanno presentato facili e chiari i Corollarj precedenti; così colla combinazione di questi fra loro e colle stesse sperienze mi vedo nascere inaspettati Teoremi, che comincierò ad esporre coll' ordine più naturale.

TEOREMA I.

La punta di resinosa elettricità induce nell' opposto quadro la sua carica con forza per lo meno quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità.

Nella resinosa la carica ancor piena è alla distanza di quattro pollici, che sono pur quattro entro l' isolamento, nè arriva sotto alla metà, che agli otto, limite dell' isolamento (*Ser.* 1. *n.* 3, 8); e l' ultimo termine della carica è ai quattordici pollici, che sono tre quarti fuori del limite dell' isolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 4).

Nella vitrea non è piena la carica, che sotto ai due pollici, che sono piedi otto dentro l' isolamento (*Ser.* 3. *n.* 1, 2, 7); a' sei pollici è gia molto meno di metà, benchè sia ancor quattro entro l' isolamento (*ivi n.* 3); e l' ultimo termine è ai dodici pollici (*ivi n.* 4), che sono un quinto fuori del limite dell' isolamento, nel qual limite, come colla resinosa era la carica poco meno di metà, così qui non è, se non prossima all' ultimo decadimento (*ivi n.* 4).

Calcoliamo queste proporzioni, che sono
nella piena carica in distanza di pollici -- 4 : 2
entro l' isolamento sono pollici - - - - - 4 : 8
Ma siccome l' isolamento fu aumento
maggiore di forza, così dovrà inver-

terſi (*) la ſeconda ragione, e ſaranno perciò comparandole, come - - - - - - 32 : 8
Similmente verſo la metà della carica ſono le diſtanze pollici - - - - - - - - 8 : 6
Entro l' iſolamento pollici - - - - - - - - 0 : 4
Invertendo i termini dell' iſolamento ſono come - - - - - - - - - - - - - - - 32 : 6
L' ultimo termine della ſcoſſa ſono pollici quattordici ai dodici, che ſono come pollici - - - - - - - - - - - - - - - 7 : 6
Fuori dell' iſolamento ſono $\frac{3}{5} : \frac{1}{5} = \frac{15}{4}$ come - - - - - - - - - - - - - - - - - - 15 : 4

E perciò compongono la ragione, come 105 : 24

Ai confini dell' iſolamento, ove non rimane che la ſemplice ragione della forza di carica, è queſta nella prima poco meno di metà, nella ſeconda è proſſima all' ultimo decadimento.

Ora tanto in queſta ultima ſemplice, come nelle antecedenti proporzioni, preſe ſolitarie, o ſommate (**), è in alcuna fino a quintupla, non è mai in veruna meno di quadrupla quella forza, come abbiamo propoſto.

TEOREMA

(*) Eſſendo che l' iſolamento maggiore corriſponde alla minor diſtanza del quadro dalla punta: e quella fa creſcere, come la maggior diſtanza fa ſcemare la carica impreſſa nel quadro; perciò nel miſurare la forza, che la imprime, aſſumo la funzione dell' iſolamento in ragione ſemplice inverſa dentro i limiti, e diretta fuori di que' limiti, benchè ſia forſe in ragione maggiore, che non ſono quelle ſemplici miſure. Per un Matematico che bramaſſe d' inveſtigare la funzione degl' iſolamenti vi ſono dati ſufficienti nelle Serie di ſperienze.

(**) Come ſi tratta di gradi, o varietà corriſpondenti di effetti ſimili, le ragioni devono comporſi ſommando: quando poi ſi conſiderano diverſi elementi, che concorrono a compire un effetto ſolo, come le diſtanze, e gl' iſolamenti in ciaſcun termine della forza della carica, devono comporſi moltiplicando.

TEOREMA II.

La punta di resinosa elettricità unita ad un conduttore disperde l'elettricità raccolta o accorrente di continuo nello stesso con forza per lo meno decupla della punta di vitrea elettricità.

L'elettricità non estinta, nè dispersa dalla punta, che parte da un conduttore, si riconosce colla frequenza e colla vivacità delle scintille che a quello si traggono.

Ora quando al conduttore non fu unita la punta, le scintille di resinosa elettricità comparvero più rapide e vivaci, che quelle della vitrea.

Colla punta unita al conduttore nell'una e nell'altra specie di elettricità fu tanto notabile la differenza, che posto nella vitrea il quadro vicino alla punta più d'un pollice e mezzo e fin verso ad un pollice, si ebbero ancora dal tubo conduttore assai meno fiacche le scintille, che non lo furono colla resinosa posto il quadro al di là dei quattordici pollici (*Ser. 3. n. 8*).

Se si volesse anche qui comporre la ragione delle distanze con quella degl'isolamenti, risulterebbe di lunga mano maggiore la vera superiorità di forza disperdente della resinosa in confronto della vitrea elettricità. Ma lascieremo a que' pochi, che sanno riconoscere ne' fisici fenomeni la precisione matematica, il piacere di rintracciarla, e di convincersene da per se stessi; e dall'immediata ragione dell'indebolimento di scintille, e dalle distanze di quattordici pollici a meno di uno e mezzo, concluderemo frattanto essere nella resinosa elettricità la dispersione per lo meno decupla, che nella vitrea, come abbiamo proposto.

TEOREMA III.

La punta di resinosa elettricità spinge la sua specie raccolta e accorrente da un conduttore isolato contro uno strato resistente opposto 1. fuori de' limiti dell' isolamento con forza pressochè quadrupla, che non la punta di vitrea elettricità. 2. dentro i limiti dell' isolamento con forza non meno di dupla della punta di vitrea elettricità.

1. Quella ne' limiti dell' isolamento induce nel quadro forza di carica tanto notabile, che è verso la metà (*Ser.* 2. *Cor.* 3), e segue ad indurla sensibile anche a tre quarti al di là di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Questa non induce che tenue forza, quando il quadro è verso i limiti dell' isolamento (*Ser.* 4. *Cor.* 3), e non arriva ad indurne se non l' ultimo grado sensibile al di là d' un quinto di que' limiti (*ivi Cor.* 4).

Ora paragonandosi la metà della carica con picciolissima forza della stessa può prendersi con sicurezza non meno di quadrupla di questa; e così ne' limiti dell' isolamento sarà la forza impressa in ragione di 4 : 1.

Al di là de' limiti l' ultima carica sensibile è nella prima oltre i tre quarti, nella seconda ad un quinto appena. Ridotta la ragione di $\frac{3}{4}$: $\frac{1}{5}$ risulta similmente per lo meno come 15 : 4, cioè pressochè quadrupla, come si è proposto.

2. Dentro i limiti dell' isolamento quella fa piena carica fino ai quattro pollici (*Ser.* 1. *n.* 1), la quale soltanto a' sei è alquanto scemata (*ivi n.* 2), agli otto, ch' è l' ultimo confine dell' isolamento, è appena sotto la metà (*ivi n.* 3).

Questa ai due pollici è appena carica piena (*Ser.* 3. *n.* 1), ai tre già scema, ed ai quattro è già verso la metà (*ivi n.* 2), a' sei è di molto sotto la metà (*ivi*

n. 3), ai dieci, ch'è l'ultimo confine dell'isolamento, è vicina all'ultimo grado sensibile (*ivi n.* 4).

Raccogliendo queste proporzioni di semplici distanze, sono

Piena carica come - - - - - - - - - - - - -	4 : 2
Prima diminuzione di carica come - - - -	6 : 3
Verso la metà per lo meno come - - - -	8 : 4

le quali sono tutte di ragion dupla.

OSSERVAZIONE.

Abbiamo anche in questo Teorema calcolate le semplici ragioni delle distanze, tanto dentro, come fuori de' limiti dell'isolamento; e non la ragione composta, come nel primo Teorema. Se ci piaccia di calcolarla, risulterà in questo, come in quello, non solo più di quadrupla, ma ancora più di sestupla. Eccone il calcolo

Piena carica - - -	4 : 2	Prima diminuzione di carica - 6 : 3	Verso la metà - 8 : 4
Entro l'isolamento - -	4 : 8	- - - - - - - - 2 : 7	- - - - 0 : 6
moltiplicate	32 : 8	- - - - - - - - 42 : 6	- - - - 48 : 4
invertendo	42 : 6		
la seconda	48 : 4		
Sommate - -	122 : 18		

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione poco meno di settupla

Volli ridurre gl'isolamenti a misura comune per via delle frazioni seguenti

Piena carica $\frac{1}{2}:\frac{4}{5}$. Prima diminuzione $\frac{1}{4}:\frac{7}{10}$. Metà di carica o: e perciò si trascura quest'ultima ragione, e si compongono colle distanze le due prime soltanto.

Ridotte adunque le ſteſſe frazioni ſono			
Piena carica -	5 : 8	Prima diminuzione -	10 : 28
Diſtanze corriſpondenti ---	4 : 2	------------	6 : 3
Invertendo gl' iſolamenti	32 : 10	------------	168 : 30
	168 : 30		
I prodotti ſommati ſono	200 : 40		

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione quintupla.

TEOREMA IV.

L'armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità continua a raccogliere (*) nel quadro 1. al di là de' limiti dell' iſolamento la carica in proporzione tanto maggiore dell' armatura oppoſta alla punta di vitrea elettricità come 15 : 4. e 2. dentro i limiti dell' iſolamento quella raccoglie la forza della carica con proporzione tanto maggiore dell' armatura oppoſta alla vitrea elettricità, quanto lo è la piena forza della carica a poco più della metà, o come la metà di carica al grado proſſimo all' ultimo della forza di ſcuotere.

1. L' ultimo grado ſenſibile di ſcoſſa in quella è ai tre quarti fuori de' limiti dell' iſolamento (*Ser.* 2. *Cor.* 3), in queſta non oltrepaſſa un quinto fuori dell' iſolamento

(*) Queſto termine di *raccogliere* non ſi prenda in equivoco, quaſichè foſſe l' elettricità emanante, o ſparſa dal conduttore; ma s' intenda di raccogliere l' elettricità, che intorno all' eſtenſione dell' armatura ſteſſa viene ſmoſſa, o ſciolta da quella del conduttore per azione della punta, e per la via del continuo mezzo frappoſto.

(*Ser.* 4. *Cor.* 4); onde ridotte queſte ragioni ſono, ſecondo che ſi è propoſto nella prima parte, come 15 : 4.

2. Nell' armatura oppoſta alla punta di reſinoſa elettricità, entro i limiti dell' iſolamento vi è piena carica ai quattro pollici, ch' è la metà dell' iſolamento (*Ser.* 1. *n.* 1), ed è ancor vicina la metà ai pollici otto (*Ser.* 1. *n.* 3), ch' è l' ultimo confine dell' iſolamento.

Nell' armatura oppoſta alla punta di vitrea elettricità la carica è verſo la metà tra i pollici quattro e i ſei (*Ser.* 3. *n.* 2, 3), e così può prenderſi più della metà ai cinque pollici, che ſono la metà del ſuo iſolamento. Ai dieci pollici, che è il confine di queſto iſolamento, la carica è proſſima all' ultimo grado (*Ser.* 3. *n.* 4).

Ritenendoſi adunque i termini comuni delle diſtanze di metà, e de' limiti degl' iſolamenti riſulta in ambedue la proporzione propoſta nella ſeconda parte (*).

TEOREMA V.

Viceverſa la punta oppoſta alla reſinoſa elettricità, conſiderate le ſole diſtanze, induce la carica nel quadro, da cui parte, con forza per lo meno ſubtripla della punta oppoſta alla vitrea elettricità.

Alla diſtanza d' un pollice dal conduttore quella fa piena la carica (*Ser.* 2. *n.* 6), nè reſta vicina alla metà di carica oltre alla diſtanza di due pollici (*ivi n.* 5), nè principia la carica ſenſibile prima di tre (*ivi n.* 3).

Queſta comincia la carica ben ſenſibile ai nove pollici (*Ser.* 4. *n.* 2), ai ſei è vicina alla metà (*ivi n.* 3), ai tre è piena la carica (*ivi n.* 4).

(*) Ho ſtimato di ſervirmi di queſte proporzioni di fenomeni, che eſprimono una funzione da inveſtigarſi; dell' andamento però della quale abbiamo idea molto ſenſibile, e reale, benchè non determinata in numeri.

Abbiamo dunque le diſtanze per la prima
carica - - - - - - - - - - - - - - - - - - = 1 : 3
per la metà di carica - - - - - - - - - - = 2 : 6
per principio ſenſibile - - - - - - - - - - = 3 : 9
Le quali o ſommate, o preſe diſtintamente, anche ſenza comporle coll' altra funzione degl' iſolamenti, che le renderebbero aſſai minori, danno la propoſta ragione per lo meno ſubtripla.

OSSERVAZIONE.

Se ſi vuole introdurre la funzione degl' iſolamenti, eccone il calcolo:

Piena carica -	1 : 3	Metà 2 : 6	Principio ſenſ. 3 : 9
Diſtanze corriſpond. entro l'iſolamento -	7 : 7	- - - 6 : 4	- - - - - - - - 5 : 1
Moltiplicate	7 : 21	- - - 8 : 36	- - - - - - - - 3 : 45
invertendo	8 : 36		
queſt' ultima	3 : 45		
Sommate	18 : 102		

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di ſubquintupla.

Provai anche la riduzione degl' iſolamenti a comune miſura, come nel ſeguente calcolo

Piena carica - - -	1: 3	Metà 2: 6	Princ. ſenſ. 3: 9
Frazioni corriſpondenti - - - - -	7: 7	- - 3: 2	- - - - - - - 5: 1
	8: 10	4: 5	8: 10
Ridotte - - - - - -	70: 56	- - 15: 8	- - - - - - 50: 8
Moltiplicate colla	56:210	- - 16:90	- - - - - 24:450
prima ragione in-	16: 90		
vertendo i termini	24:450		
di queſta, e in			
fine ſommate ſono	96:750		

COROLLARIO.

Sarebbe la ragione anche meno di subsettupla.

TEOREMA VI.

La punta, opposta alla resinosa elettricità, scema l'elettricità del conduttore, a cui si presenta con forza minore di subdupla della punta opposta alla vitrea.

Colla punta opposta alla resinosa elettricità continuò la scintilla dal conduttore in tutta la sua forza, finchè quella punta non si accostò più di quattro pollici; e seguitò assai viva ai tre, e perfino al di là dei due pollici (*Ser.* 2. *n.* 8).

Colla opposta alla vitrea non fu mai piena la scintilla, che ritirata la punta al di là dei dieci pollici; agli otto era bene inferiore alla piena sua forza; ai quattro ancor più tarda e debole (*Ser.* 3. *n.* 9. *Ser.* 4. *n.* 8).

Sono dunque per lo meno le distanze di

piena scintilla - - - - - - - - - - - come	4	:	10
di prima diminuzione - - - - - - - - - -	3	:	8
di maggior diminuzione - - - - - - - - -	2	:	4
	9	:	24

Le quali o sommate, o distinte dimostrano molto minore di subdupla la proposta ragione.

TEOREMA VII.

La punta opposta alla resinosa elettricità 1. fuori de' limiti dell'isolamento non induce alcun cenno di elettricità nell'armatura, o conduttore, da cui parte, mentre la punta opposta alla vitrea ne induce i primi segni; 2. e dentro que' limiti non ha forza d'indurre la carica se non tanto minore della punta opposta alla vitrea, quanto lo è il primo grado di carica sensibile alla piena forza della carica.

Quella fino ai quattro pollici non dà segni costanti nel suo quadro (*Ser.* 2. *n.* 3); comincia picciolissima carica ai tre (*ivi n.* 4); ai due è meno di metà (*ivi n.* 5); e la prima carica è meno d' un pollice (*ivi n.* 6).

Questa ai limiti comincia moti (*Ser.* 4. *n.* 1); ai nove pollici già è sensibile carica (*ivi n.* 2); a' sei ben vicina alla metà (*ivi n.* 3.); ai quattro è di molto sopra la metà (*ivi n.* 4); al di là dei tre è di piena forza (*ivi n.* 5).

Riduciamo in una tavola queste ragioni:

Dalla punta opposta alla resinosa elettricità alla punta opposta alla vitrea

distanze pollici		
10	- - - - - - - - o	ai primi segni
9	- - - - - - - - o	carica sensibile
6	- - - - - - - - o	carica verso la metà
4	primi segni :	carica sopra la metà
3.	carica sensibile :	piena carica
2.	carica meno di metà	carica ridondante
1.	piena carica	carica ridondante

Dalla semplice esposizione di queste ragioni è manifesta la prima parte; e alla distanza di pollici tre si riconosce in termini la proporzione fissata nella seconda parte (*).

TEOREMA VIII.

L' armatura, da cui parte la punta opposta alla resinosa elettricità nello sforzo, o capacità di ricevere segni, o carica elettrica, sta all' armatura, da cui parte la punta opposta

(*) E qui pure esprimiamo senza numeri queste ragioni, perchè comprendono quella ragione composta, che lasciamo da investigare ai Matematici; la quale frattanto porge a noi idea ben reale della vera efficacia delle specie di elettricità.

oppoſta alla vitrea fuori de' limiti dell'iſolamento, 1. come zero alla metà della carica. 2. e dentro que' limiti quella ſta a queſta, come ſono i primi ſegni di elettricità a più di metà della carica, ovvero come lo è meno di metà alla carica piena.

Abbiamo nel Teorema quinto fiſſate le proporzioni delle punte oppoſte alla reſinoſa elettricità, ed alla vitrea colla ſemplice conſiderazione delle diſtanze loro dal conduttore: e nel precedente Teorema ſettimo abbiamo conſiderate le diſtanze ſteſſe in riguardo ai limiti dell'iſolamento. Non ci reſta qui che di paragonare le diſtanze dal conduttore delle armature, dalle quali partono quelle punte tanto fuori, come entro i limiti dell'iſolamento. Per queſto fine a ciaſcuna delle diſtanze della tavola precedente aggiugneremo pollici tre e linee nove, che ſono la lunghezza del filo della punta ſteſſa fiſſato ſu quelle armature.

Armatura oppoſta alla reſinoſa ſta all'armatura oppoſta alla vitrea elettricità

Diſt. pollici	13. lin. 9	- - - - - - - - - -	o. primi ſegni
	12. 9	- - - - - - - - - -	o. carica ſenſibile
	9. 9	- - - - - - - - - -	o. verſo la metà di carica
	7. 9	primi ſegni - - -	: molto ſopra la metà
	6. 9	carica ſenſibile - -	: piena carica
Segg. diſt. pol.	5. lin. 9	carica meno di metà	carica ridondante
	4. 9	carica piena	

E richiamando in mente, che l'iſolamento nella reſinoſa è di pollici otto, e nella vitrea di dieci, dedurremo dalla precedente le ſeguenti proporzioni.

1. Quella oltre i limiti dell'iſolamento, e ne' limiti non dà ſegni, nè carica, queſta dà i primi ſegni quando è ancor fuori dell'iſolamento pollici tre linee nove; preſenta la prima carica ſenſibile ancor fuori di que' limiti pollici due linee nove; e porta la carica verſo la

metà quando è ancor ſuori di que' limiti linee tre: onde riſulta la proporzione fiſſata nella prima parte, come zero alla metà della carica.

2. L'armatura oppoſta alla reſinoſa ſta all'armatura oppoſta alla vitrea elettricità entro i limiti dell'iſolamento

Diſtanze			
lin.	3.	primi ſegni di elettricità	carica molto ſopra la metà
lin.	15.	prima carica ſenſibile	
	27.	carica ancor meno di metà:	piena carica
	39.	piena carica - - - - - - :	carica ridond.te

Onde alle diſtanze di linee tre, e di linee quindici entro i limiti dell'iſolamento abbiamo la proporzione in primo luogo fiſſata nella ſeconda parte; ed abbiamo l'altra in termini alla diſtanza di linee ventiſette.

OSSERVAZIONE.

Con queſti primi Teoremi la cauſa d'ogni elettrica teoria, fin qui agitata fra le ipoteſi e le ſcolaſtiche forme, io la produco al tribunale de' Matematici, che ſono in fine i veri giudici dell'evidenza; e conſegnandola nelle mani loro io ne rimetto a' medeſimi la cognizione e la ſentenza. Prima dunque di paſſar oltre a ſvolgere i diſtinti elementi delle elettriche punte, i quali non poſſono far meno di non guidarci a' veri fonti della teoria, da cui derivano, gioverà raccogliere in una tavola, e rappreſentare in un colpo d'occhio le diſtinte proporzioni di queſti fondamentali Teoremi, per dedurne con maggior ſicurezza, e comprenderne con più facilità le conſeguenze.

COROLLARIO.

La punta di reſinoſa elettricità ſta alla punta di elettricità vitrea,

1. Nella forza d'imprimere la carica in ragione per lo meno quadrupla.

2. Nel disperdere l'elettricità raccolta in ragione decupla.

3. Fuori de' limiti dell'isolamento per imprimere carica ha forza quadrupla, entro que' limiti non meno di dupla.

4. L'armatura opposta alla punta di resinosa elettricità sta all'armatura opposta alla punta di elettricità vitrea nel raccogliere la carica,

fuori de' limiti dell'isolamento, come 15 : 4.

entro que' limiti, come la piena carica alla sua metà, ovvero come la metà di carica al grado prossimo all'ultima scossa sensibile.

5. La punta opposta alla resinosa elettricità sta alla punta opposta alla vitrea nella forza d'indurre carica in ragione subtripla.

6. Per disperdere, o scemare l'elettricità del conduttore in ragione subdupla.

7. Per indurre elettricità fino ai limiti dell'isolamento, siccome zero a' primi segni.

Entro que' limiti, come il primo grado di carica alla carica piena.

8. L'armatura, da cui parte la punta opposta alla vitrea nel raccogliere la carica fuori de' limiti dell'isolamento, come zero alla metà della carica.

Entro que' limiti, come meno di metà alla carica piena.

TEOREMA IX.

L'isolamento, o mezzo resistente influisce ne' fenomeni delle elettriche punte, 1. Come recipiente, e quasi vaso contenente l'una sempre a fronte dell'altra le due specie d'elettricità. 2. Come ostacolo frapposto da superarsi dalle medesime nel compiere la loro unione. 3. Ma qualsivoglia considerazione del mezzo è per se

ſola inſufficiente per adeguare la ſpiegazione di que' fenomeni.

1. L'iſolamento, e mezzo reſiſtente altro non è, che l'oſtacolo frappoſto a qualſivoglia ſpecie di elettricità raccolta o accorrente, che tende a riunirſi coll'oppoſta ſpecie ſmoſſa attraverſo del mezzo ſteſſo, o raccolta nelle ſuperficie conduttrici eſteſe in tutto o in parte dagli eſteriori limiti del mezzo, o ſtrato iſolante.

(*a*) Dopo le luminoſe oſſervazioni del celebre *Epino* non è più permeſſo di chiamare effuſione di elettricità la sfera di elettrica azione attraverſo i mezzi reſiſtenti. Le piane, o cilindriche, o sferoidali ſuperficie d'un conduttore elettrico ſono come l'armatura interiore d'una boccia Leidenſe; l'aria ambiente co' corpi iſolanti, che ſoſtengono quel conduttore, ſono come la ſoſtanza del vetro della boccia ſteſſa; e i corpi non iſolanti intorno all'eſteriore limite dell'aria ambiente ſono come l'eſteriore armatura della boccia.

(*b*) A norma di queſte idee l'interiore ſuperficie del mezzo reſiſtente (*), che circonda un conduttore elettrico, può conſiderarſi (quaſi come in Idraulica ſi conſidera la capacità d'un vaſo per contenere i liquidi) come la capacità ſteſſa di contenere l'elettricità raccolta, o concorrente in quel conduttore. Colla differenza però, che in Idraulica quella capacità corriſponde alla cavità del vaſo o recipiente; qui in vece non ſono le ſole miſure della ſuperficie ambiente che determinano quella capacità, ma ſotto le ſteſſe miſure queſta ſoggiace a leggi di capacità da quelle aſſai diverſe. E primieramente deve conſiderarſi la forza propria della elettricità ſteſſa raccolta; la qual forza, per inſiſtere ſulla premeſſa

(*) Sia il mezzo ſolido, o fluido; ſia uniforme, e di una ſola ſoſtanza, come nelle bocce, e ne' quadri, ovvero di ſoſtanze diverſe, come intorno a' conduttori ſoſtenuti da corpi ſolidi, cioè ſete, reſine, o vetri, e nel reſto circondati dall'aria.

ſimilitudine, corriſponderebbe alla ſpecifica gravità de' varj liquidi. Inoltre ſi deve tener conto della mobilità della ſpecie oppoſta di elettricità, che attraverſo del mezzo ſteſſo deve ſmuoverſi. In terzo luogo viene da conſiderarſi la fluidità, o fiſſità delle parti del mezzo ſteſſo, nel che conſiſte la differenza de' mezzi ſolidi o fluidi. Poichè ſebbene in ſoſtanza nulla monti per l' iſolamento la ſolidità, o fluidità; pure i fluidi per la mobilità delle loro particelle ſono dalla elettricità ſteſſa agitati con moto inteſtino non meno delle proprie parti, che de' corpicciuoli eſtranei fra quelle innatanti, che ſi rende viſibile qualora ſono inveſtiti dalla luce d' un raggio ſolare; e con tale moto ſi facilita l' inſenſibile e continua riunione delle oppoſte elettricità in proporzione che vengono ſmoſſe, o raccolte. Creſce infine quella capacità ſecondo la facilità, colla quale il mezzo, o ſtrato reſiſtente ſi preſta a ritener vicine in maggior copia, ſenza però che attraverſo di quello poſſano mai riunirſi, le due oppoſte elettricità, come ne' ſottili ſtrati di vetro abilitati a tale effetto con le armature eſterne non iſolate (*). Poichè l' uffizio del mezzo non è, che di reſiſtere all' unione delle oppoſte elettricità, ma non mai d' impedire la tendenza mutua a tale unione. Che anzi quella tendenza incontra nel frappoſto mezzo capacità di eſercitarſi; e in tale eſercizio conſiſte l' ammaſſamento delle oppoſte elettricità nelle bocce, ne' quadri, e nelle elettriche batterie.

(c) Quindi è, che le oppoſte elettricità non poſſono mai conſiderarſi ſolitarie, e intieramente diſgiunte l' una dall' altra. Non può una ſcioglierſi, che non reſti

D iij

(*) Vi è un'altra maniera di accreſcere la capacità de' conduttori, oſſervata da Gordon, e Monnier, dalla quale io ho dedotto altrove (*Phyſ. Spec. art.* 5.) la coſtruzione di paradoſſi elettrici a ſomiglianza de' veri paradoſſi idroſtatici.

ſciolta inſieme l'altra; nè può ciaſcuna adunarſi, o raccoglierſi, ſenza che ſi ſmuova, o ſi raccolga intorno l'oppoſta ſpecie. Ma lo ſmovimento o ſcioglimento di elettricità nel mezzo reſiſtente non è mai dell'omologa a quella del conduttore movente. Poichè queſta omologa reſta libera e ſciolta ſoltanto indirettamente; ond'è, che ne' conduttori frappoſti, o immerſi in tal atto nel mezzo ſteſſo, ſi raccoglie e ſi porta l'omologa in fuori, e la oppoſta in dentro, cioè verſo il confine della elettricità movente; come riſulta dalle più eſatte ſperienze de' moti elettrici, e ſi riconoſce direttamente nelle oppoſte armature iſolate d'una boccia, o d'un quadro mentre ſi carica.

(*d*) Ora come il modo e la ſpecie e la quantità di tali elettriche ſoluzioni interamente deriva dalla ſpecie e quantità raccolta nel conduttore; così la figura e l'andamento delle ſoluzioni medeſime ne' ſucceſſivi ſtrati del mezzo ambiente dalla ſola figura di quel conduttore pienamente ſi regge, e ſi determina. Se tale figura ſia piana, ovvero di cilindrica, o sferoidale curvatura uniforme, non può non eſſere ſimilmente uniforme, ed equabilmente diſtribuito lo sforzo dell' elettricità muovente contro tutti i ſucceſſivi punti del mezzo ambiente; e perciò reſtano le elettricità ſciolte ſucceſſivamente a onde, o ſtrati uniformi in tutta la maſſa del mezzo a ſeconda di quella prima figura. Talchè le varie onde o ſtrati delle elettricità ſmoſſe nelle ſucceſſive diſtanze uguali dalla ſuperficie del conduttore rappreſentano come altrettanti indumenti o coperte della ſuperficie ſteſſa, che vanno attenuandoſi nelle ſucceſſive diſtanze, e ſono uniformi ſoltanto in ciaſcuna. Si può in queſto ſenſo dire, che ſi diffonde e propaga queſta elettrica azione quaſi per raggi divergenti dal conduttore, come diciamo del calore, e della luce, che ſi propagano intorno ne' mezzi uniformi quaſi in una sfera procedente dal corpo infuocato, o lucido, come da centro. E per ſeguitare in

queſte idee non ancora abbaſtanza note e familiari a ſollevare l' intelletto colle ſimilitudini di coſe già ben inteſe, dirò, che tolta l' uniformità e la proporzione di lunghezza nel conduttore, ſuccede nell' andamento di quell' elettrico sforzo ciò, che ſuccede alla luce introdotta in lenti, o in mezzi più refringenti, che non più è quella ne' ſucceſſivi intervalli uguali uniformemente diffuſa, nè propagata in forma di sfera.

(*e*) Ciò che ſono le lenti in Ottica, lo ſono le punte nella elettricità. Turbano queſte l' uniforme azione delle elettricità, e le raccolgono talvolta in modo, che ſi eſercitano come per vortice, e ſimulano una effuſione. Qualora pertanto nell' armatura, o nel conduttore iſolato vi ſieno allungamenti di ſuperficie, ovvero ſpigoli, o punte, le quali altro non ſono che ſpigoli più allungati, lo sforzo della elettricità in quel conduttore raccolta converge nell' apice di tale allungamento, e ne riſulta un aumento di sforzo nella ſteſſa, che può per ſimilitudine paragonarſi alla velocità, che vien nominata *adulta* in Idraulica, colla quale i liquidi eſcono dagli anguſti fori, o lumi di vaſi molto ampj; ovvero a quell' impeto, con cui dall' eſiliſſimo becco d' una eolipila eſce il vapore, o altro fluido elaſtico. Dico *per ſimilitudine* in quanto alla ſomma dell' aumento, ma non nel modo. Poichè qui non è, come in quelle, ſemplice impeto ed effuſione, ma vera effervеſcenza ed eſploſione con infiammazione.

(*f*) Ciò che ſi è detto del conduttore, che è come l' interiore armatura del mezzo reſiſtente, s' intende con proporzione de' conduttori poſti intorno a' limiti dell' iſolamento, che ne rappreſentano l' eſteriore armatura. Se in queſta vi ſieno allungate ſuperficie, o ſpigoli, o punte, ivi ſi facilita lo ſviluppo delle oppoſte elettricità moſſo da quel conduttore, in quanto che nell' apice di quelle punte ſi raccoglie, e confluiſce l' oppoſta ſpecie (*c*), che ſenza di queſte reſterebbe uniformemente dif-

fuſa nel limite di tutta l' eſtenſione degli eſterni conduttori (*d*). E può queſt' azione per ſimilitudine paragonarſi alla ſcintilla, che dallo ſpolverino ſi comunica a ſvolgere tutta la maſſa della polvere inchiuſa, e riſtretta in un cannone. Se non che ivi ſi fa l' eſploſione per mera eſpanſione verſo la bocca del cannone; ma qui ſuccede attraverſo lo ſtrato reſiſtente una ſubita e veementiſſima effervefcenza, immediato effetto della riunione delle oppoſte elettricità, che per tal via viene eccitata e promoſſa con rapidiſſima progreſſione. Ed in queſta via dell' allungamento di ſuperficie conſiſte principalmente l' uſo dell' *arco conduttore* (*), col quale eccitiamo l' eſploſione delle bocce caricate. Quelle parità non ſono che per ſuſſidio dell' imaginazione; ſono ſimili in certi riguardi, e nel rimanente conducono a riconoſcerne meglio colla ſimilitudine le proprietà, e le diverſità. Il prenderle a rigore ſi chiamerebbe roveſciare le idee, e far torto alla Meccanica ed alla Chimica, non per difetto de' loro principj, ma per la chimerica applicazione.

(*g*) Così s' intende l' azione della elettricità frenata e raccolta dal mezzo reſiſtente frappoſto, e accreſciuta per la figura allungata o acuta non meno dell' eſterno conduttore, che delle conduttrici ſuperficie poſte intorno, o ſporgenti in dentro del mezzo iſolante.

A più chiara intelligenza deve qui notarſi il diverſo ſtato delle ſpecie di elettricità ſoltanto ſmoſſa ne' varj ſtati del mezzo, e di quelle che ſono raccolte nell' eſtenſione de' conduttori. A queſte conviene il momento di accelerazione,

---

(*) Indi accade, che la punta poſta all' eſtremità dell' arco, che ſi preſenta per cavar la ſcarica, ne accreſce per modo il momento, che indeboliſce la forza dell' eſploſione, e in certo modo la previene. Indi ſimilmente le punte procedenti da qualſivoglia conduttore ne diſperdono l' elettricità quaſi in proporzione, che in eſſo ſi raccoglie, purchè ſieno a diſtanze, ed a ſtato di mutua azione con la oppoſta ſpecie.

accelerazione, che ſpiegai, analogo all' adulta velocità, e non a quelle, finchè ſtanno fra loro in tale poſitura e diſtanza, che poſſono egualmente o ſepararſi o riunirſi l' una con l' altra a onde e ſtrati finitimi per qualunque picciola mutazione di forza movente, o accreſciuta, perchè reſtino diviſe, o diminuita, perchè tornino a riunirſi. Queſto ſtato di elettricità è ciò che io chiamo ſmovimento delle contrarie ſpecie, che coſtituiſce i primi gradi della loro ſoluzione, o ſeparazione, che ſi eſtende gradatamente minore a grandiſſime diſtanze attraverſo i mezzi reſiſtenti, ed in quello ſtato ſuſſiſtono finchè ſono come involte nella ſoſtanza de' mezzi ſteſſi reſiſtenti. Se da queſti paſſano dentro o intorno a ſoſtanze conduttrici, allora ſi raccolgono più diviſe, e ſciolte ciaſcuna nella ſua ſpecie, e ſi muovono perciò in qualche ſomiglianza come gli altri fluidi.

2. Che ſe in ſecondo luogo ſi conſideri il mezzo come ſemplice oſtacolo frappoſto alla riunione delle oppoſte elettricità, anche per la via delle punte viene quell' oſtacolo notabilmente diminuito. Poichè l' intero prodotto della reſiſtenza del mezzo conſiderato preciſamente contra tale unione non altrimenti riſulta, ſe non dalla groſſezza del mezzo ſteſſo moltiplicata per la ſua larghezza come baſe. Ora quando queſta larghezza ſi riduce all' apice d' una punta, reſta la baſe infinitamente picciola; e perciò la colonna o maſſa del mezzo reſiſtente rimane in quella proporzione minore; ed oppone conſeguentemente tanto minore oſtacolo alla riunione della elettricità. Ed in queſta diminuzione di oſtacolo, e nell' accreſciuto momento, che abbiamo qui ſopra ſpiegato, conſiſte la facilità, con cui le ſteſſe forze aſſolute, ed oppoſte ſi riuniſcono più prontamente per la via delle punte, che delle piane o sferiche ſuperficie. E qui noteremo, che mal ſi prenderebbero queſti elementi preciſamente; ma d' uopo è aver riguardo alle forze aſſolute delle elettricità, e allo ſtato di mutua loro azione, e

E

diſtinguere inoltre i caſi, ne' quali ſi riducono ad agire per la via delle punte le ſpecie già accumulate in copia maggiore, o minore, e le ſpecie ſteſſe, che cominciano ſoltanto, e progrediſcono ad accumularſi.

3. Sebbene però l'uno e l'altro de' ſuddetti modi influiſca nella piena azione delle punte, nondimeno nè ciaſcuno, nè l' uno e l' altro inſieme hanno ſufficienza per adeguarne i fenomeni. E primieramente quel primo aumento ſi fonda ſulle forze reali, e vere potenze eſiſtenti tanto nell' interno, che nell' eſterno conduttore, e ſuppone inoltre fra quelle forze mutua azione. Senza le quali forze, e ſenza l' azione loro vicendevole ſarebbe lo ſteſſo il conduttore negli effetti delle punte, che ſe ſi pretendeſſe in Meccanica di accreſcere il momento per la via delle macchine ſenza potenza alcuna, ovvero con applicare la potenza ſenza oppoſizione, e ſenza unità di centro del moto comune della reſiſtenza.

Nè ſimilmente può prenderſi quella diminuzione di oſtacolo proccurata dalla coſtruzione delle punte per una efficienza, o aumento di forza delle punte ſteſſe. Si riuniſcono le oppoſte elettricità con quel reſiduo dell' aſſoluta e mutua forza loro, che non reſtò diſperſa, e diſtrutta nel mezzo frappoſto. Ora queſto reſiduo non ſuſſiſte tanto maggiore, ſe non quanto per la via delle punte ſi fa minore la reſiſtenza del mezzo. Ma qui pure, come nell' antecedente, ſe ſi prende in conſiderazione il mezzo come reſiſtenza, e ſi preſcinde poi dall' aſſoluta efficacia, e coſpirazione delle elettriche forze, ſi fa lo ſteſſo, che aſſumere l' aſtratto per la realtà, e ſoſtituire l' artifizio per diminuire gli oſtacoli alla eſiſtenza, ed all' idonea applicazione delle forze naturali. Al Meccanico non baſtano le macchine, ci vogliono le forze. Come al roveſcio quando le forze non baſtano, ſi ricorre ad unire con queſte il ſuſſidio delle macchine.

Ciò poi, che ſoprattutto dimoſtra l' inſufficienza delle ſole conſiderazioni del mezzo, o iſolamento, per ad-

eguare la ſpiegazione de' fenomeni delle punte, ſono le inſigni varietà che nelle ſteſſe circoſtanze di mezzo, e d' iſolamento, riſultano da' precedenti Corollarj, e Teoremi, della quale varietà diremo più opportunamente ne' ſeguenti.

TEOREMA X.

L' azione delle elettriche punte non è ſemplice; nè queſte conſiderate aſſolutamente per ſe ſteſſe altro preſentano, che fenomeni confuſi, e irreducibili.

(*a*) Le punte conſiderate per ſe ſteſſe altro non ſono, che una diminuzione di ſuperficie per eſemp. di una baſe di cilindro, la quale con ſuccèſſiva diminuzione ſi riduce ad apice d' un cono (*). Per dichiarare ciò adequatamente, ſupponganſi da principio due eguali baſi di cilindro a certa diſtanza oppoſte, le quali abbiano tale quantità di vicendevole azione, che ſia rappreſentata diviſa in parti eguali con un dato numero di fili paralleli fiſſati ad altrettanti punti corriſpondenti di quelle baſi. Se mentre una di queſte reſtà intera, l' altra va ſucceſſivamente diminuendoſi, è manifeſto, che per far ſuſſiſtere quella prima loro azione vicendevole, ogni volta che in quella diminuzione s' incontra un punto, cui ſta fiſſo alcuno di que' fili, che ne rappreſentano le parti, dovrà queſto riportarſi fiſſo ad altro punto di quei, che reſtano nella baſe diminuita; e così continuando la diminuzione reſteranno per ultimo tutti que' fili fiſſati al ſolo apice del cono, in cui finalmente fu ridotta.

(*) E' dunque il nome di punta termine relativo, che ſignifica confronto di ſuperficie minore con altra maggiore; e però anche la sfera, e qualſivoglia ſuperficie a fronte d' una maggiore può rappreſentare una punta.

(*b*) Al contrario se in proporzione che fu diminuita la base, si fossero troncati i fili, che fissati ne' punti di quella ne esprimevano la intera somma, è altresì manifesto, che tale azione più non sussisterebbe, se non per quell' unica parte, che corrisponde all' unico punto e filo residuo nell' apice del cono. E perciò questo sarà tratto a sè dalla base opposta con tanta superiorità di forza, quanta è la somma di tutti que' fili divisa per quell' unico.

(*c*) Riduciamo ora ambedue queste ipotesi alla estimazione de' momenti delle forze, che si usa in Meccanica. Si sa, che le potenze, e le resistenze, ossia qualsivoglia genere di forze, si rappresentano nelle macchine con pesi o masse corrispondenti. Si sa, che due sono le vie di rendere in equilibrio due masse rappresentanti forze di qualsivoglia genere; cioè, se ineguali sono le masse, si fa che dal centro del moto della macchina non descrivano, e non possano nello stesso tempo non descrivere, che spazj reciprochi alle masse medesime. Tolto l'uno, o l'altro di questi modi, più non sussiste l'equilibrio; ma vi è preponderanza in ragione delle masse, quando eguali sono gli spazj, o in ragione degli spazj, quando le masse sono eguali, o in ragione composta delle masse, e degli spazj, se quelle e questi sono ineguali.

(*d*) Nella prima ipotesi adunque sussiste l' equilibrio di azione della punta colla intera superficie dell' opposta base per la sola ragione, che colla successiva diminuzione della prima base non si rende punto alterata la vicendevole azione coll' opposta; ma ciascun filo, che da questa procede, va successivamente raccogliendosi, e concentrandosi perfino nell' ultimo punto, a cui la prima si riduce. Supponendosi ora all' uso meccanico, che ciascun punto corrispondente rappresenti una eguale quantità di massa, niuno è che non veda espressa colla base una massa tanto maggiore, che non è la massa della punta,

quanto lo è il numero de' punti divisi per quell' unico, a cui fu ridotta la punta. Onde non rimane qui altra via di equilibrio, che la reciprocità degli spazj colle masse medesime. E siccome in Meccanica la reciprocità degli spazj, posto, come lo è nelle macchine, eguale il tempo, equivale alle reciproche velocità; non altrimenti sussisterà l' equilibrio della punta colla base intera, se non con altrettanta velocità nella punta sopra la velocità della base, quanta è la ragione della somma dei fili o punti, che rappresentano la massa della base, al filo unico, che rappresenta la massa della punta.

(*e*) E questo modo di considerare la vicendevole azione elettrica fra la punta e la più ampia superficie opposta, dedotto dal meccanico principio della reciprocità degli spazj e delle velocità colle masse, non altro esprime, se non che ciascun punto dell' opposta superficie esercita nello stesso tempo la sua attività contro il solo corrispondente alla punta, e questa a vicenda esercita l' azione sua in un sol tempo contro ciascun punto della base; onde ne deriva eguale nella punta e nella base la quantità di moto, o di sforzo a muoversi, che esprime nella sua estimazione la indicata velocità reciproca colle masse; nel che consiste il meccanico momento delle punte.

(*f*) Questo *momento meccanico* è diverso da quello, che spiegato abbiamo colla similitudine della velocità *adulta*, il quale perciò potrebbe a maggior distinzione chiamarsi *momento idraulico*. Poichè quello procede dalla simultanea azione delle parti del fluido contenute nel vaso, o nella capacità del conduttore elettrico, prementi per ogni verso, e raccolte contro quelle parti, che escono dalla punta, come da un tenue foro; e qui il momento nasce precisamente al rovescio, cioè per l' azione della elettricità della punta non già spinta dall' omogeneo fluido contenuto nel conduttore, ma esteriormente accresciuta dalla simultanea e mutua azione di tante

parti eguali di oppofta elettricità, quanti fono i punti che le efprimono nella fuperficie della bafe.

(g) Siccome però fuffifterebbe quel momento primo per fola preffione o sforzo del fluido raccolto nel conduttore, come in vafo, da cui parte la punta; e quefto acciocchè fuffifta efige la vicendevole azione colla elettricità dell'oppofta fuperficie; così non doveano l'uno coll'altro confonderfi. Maffimamente perchè quefto meccanico momento ha luogo fenza quel primo, come accade affai frequente, quando un corpicello elettrico fenza veruna unione con altro conduttore fi prefenta per fe fteffo ad una fuperficie più ampia inveftita da contraria elettricità; nel qual cafo fi efercita la vicendevole azione loro; e ne rifulta l'attrazione, per la quantità del moto richiefta dal meccanico momento, che ora fpiegato abbiamo. Come al contrario, da che lo fteffo corpicello arriva al contatto della più ampia fuperficie, ed ivi s'inveſte della fua elettricità, fe fi trovi a quella adattato in modo, che prefenti come uno fpigolo o punta procedente dalla fteffa fuperficie, allora in vigore di quell'idraulico momento, che nel precedente Teorema fpiegai, farà rifpinto e ripulfo infieme alla propria elettricità, purchè fia quefta fuperiore di forza alla gravità, o alla coefione del medefimo.

(h) Siamo qui ridotti ad anticipare di paffaggio un cenno della vera cagione efficiente degli elettrici moti. Poichè dai premeffi principj ognuno per fe fteffo comprende, che fe la maffa rapprefentante la punta fia mobile dovrà accoftarfi, e indi fcoftarfi dalla più ampia fuperficie con tanto ecceffo di velocità, quanto è reciprocamente l'ecceffo delle maffe che rapprefentano le forze loro. Combinandofi poi, e rifolvendofi così le varie ragioni di velocità, e di maffe, di mobilità, o immobilità col primo, o fecondo genere di momento nel concorfo de' varj corpi inveftiti dalle elettriche potenze, che rapprefentano la bafe, o la punta, fi porta all'ul-

tima evidenza, come altrove dimostrerò, la ragione de' moti elettrici, non meno che delle adesioni, la quale restò finora involta nella più densa caligine di vani sforzi d'ingegno.

(*i*) Proseguendo frattanto nella proposta materia, l'azione della punta non sussiste altrimenti per se stessa. Poichè se si prescinde dalla vicendevole azione permanente, e non mutata nella successiva diminuzione della punta opposta alla base, entriamo immediatamente nella seconda ipotesi (*b*); nella quale ben lungi dal sussistere l'equilibrio colla reciprocità degli spazj, ci riduciamo alla semplice ragione delle masse, la quale è tanto maggiore nella base, che non nella punta, quanto è il numero de' fili al solo filo residuo (*b*, *c*.).

(*k*) La punta adunque per se stessa diminuirebbe il momento delle elettriche potenze in ragione della massa diminuita; il che è contrario ai più noti fenomeni. Se poi ci rivolgiamo alla varietà degli effetti delle punte, che nella resinosa sono di forza or quadrupla, or decupla della vitrea (*Teor.* 1, *e* 2), e della stessa punta, che opposta all'una o all'altra specie di elettricità non ha nell'una, se non forza or subdupla, or subtripla dell'altra (*Teor.* 5, *e* 6); sarà fuori d'ogni dubbio, non altro scorgersi nelle punte considerate in se stesse, che nodi inestricabili.

(*l*) Ma se consideriamo le punte in riguardo all'ostacolo da superarsi, cominciamo ad accrescere l'effetto delle elettriche potenze colla diminuzione della massa stessa opposta dal mezzo, come ostacolo (*Teor.* 9. *n.* 2). Se poi si riguardano come un foro più angusto d'un vaso assai ampio, da cui esce l'azione dell'elettrica potenza, seguono ad accrescerne il momento, come fanno in Idraulica i liquidi, che escono con adulta velocità (*Teor.* 9.*e*, *f*). Se in oltre si aggiunga il meccanico momento, che più sopra spiegato abbiamo, e si componga cogli antecedenti, c'inoltreremo vie più nella cognizione

degli elementi diversi, che concorrono a formare l'intera azione delle elettriche punte, ma non la compiono finora, nè ciascuno per sestesso, nè composti insieme, come seguitiamo a spiegare ne' seguenti Teoremi.

TEOREMA XI.

Sussistono que' confusi, e irreducibili fenomeni, finchè si considera l'azione delle punte, come effetto d'una forza sola procedente in qualsivoglia modo dal solo conduttore elettrico, da cui quelle partono, o a cui si presentano.

Si richiamino qui i fenomeni, che dopo la seconda Serie (*Cor.* 1, *e* 2), e dopo la quarta (*Cor.* 1, *e* 2.) abbiamo stabilito: cioè, che la punta di resinosa elettricità induce carica con forza quadrupla, e disperde la sua specie con forza settupla della punta opposta alla specie medesima; e viceversa la punta di vitrea elettricità induce la carica con forza or minore, or d'un terzo maggiore, e disperde la sua specie con forza sempre minore della punta opposta alla specie medesima.

E siccome questi fenomeni comprendono le proporzioni dell'elettrica forza procedente dal conduttore, da cui nello stesso modo partono, o a cui si presentano quelle punte; così essendo quelle proporzioni tanto diverse non potranno ripetersi da una forza sola, senza che questa non comparisca contraddittoria ne' suoi effetti, e nelle proporzioni loro, che sono le sole vie, che ci guidano a conoscerne l'esistenza, e l'identità, o la diversità.

Ma rendesi vie più manifesta questa contraddizione nell'ipotesi d'una sola forza procedente dal conduttore, da cui parte la punta, o a cui si presenta, se si rivolge lo sguardo alle proporzioni ristrette nel Corollario universale de' primi otto Teoremi.

Poste le quali io ragiono così: Se unica fosse la forza, o un solo il fluido, che costituisce la potenza nelle elettriche punte, posti eguali tutti gli altri elementi, che

che concorrono a ſormare il momento, come ſono il mezzo, e l'applicazione delle punte ſteſſe, eguale e coſtante dovrebbe di neceſſità riſultare l' azione ſua tanto nell'imprimere la carica, come nel diſperdere la ſpecie raccolta, o accorrente. E qui per farmi vie meglio intendere nella novità di queſte idee ricorrerò novamente alle ſimilitudini d' idee già note e familiari nella ſcienza naturale. Quando in Idraulica ſi calcola l' effetto dell' adulta velocità, poſte le medeſime proporzioni di grandezza del vaſo, e del lume, da cui eſce il liquido, ſe queſto pure è ſempre lo ſteſſo, niuna differenza nè varietà s'incontra giammai nell'eſtimazione dell' effetto. Che ſe, mutata la ſpecie del liquido, riſultano colla identità di vaſo e di lume delle differenze di effetto, riconoſciamo queſte ſenza meno provenienti dalla diverſa maſſa, o gravità ſpecifica de' liquidi ſteſſi, e concludiamo con certezza, che per eſtimare l'intero effetto del liquido proſiliente non baſta il ſolo elemento di adulta velocità, ma deve queſto comporſi coll'altro, ch' è intrinſeco ai diverſi liquidi, e corriſponde alla ſpecifica loro gravità.

Non altrimenti dobbiamo ragionare dell'azione delle elettriche punte; e perciò ſiccome, poſti eguali i precedenti elementi, che concorrono a compierne il momento, ſi preſentano tante e tanto inſigni differenze, forza è di concludere, che tali differenze provengono dall'intrinſeca diverſità di que' fluidi, ai quali corriſpondono, e che coſtituiſcono le oppoſte ſpecie di elettricità. Onde nel calcolare l'intero effetto delle elettriche punte d' uopo è aggiugnere ai precedenti elementi la ſpecifica forza di ciaſcun fluido, come in Idraulica ſi aggiugne la gravità ſpecifica di ciaſcun fluido emanante.

Nè, paragonando io la ſpecifica forza de' fluidi elettrici colla ſpecifica gravità de' liquidi, voglio in verun modo indicare, che quella abbia nulla di comune con

questa, o possa l'una coll'altra sostituirsi. Che anzi, se taluno da me ricerchi, in che consista quella specifica differenza delle opposte elettricità, io dirò apertamente, che sono contento per ora di averla dimostrata reale, ed esistente, e lascio a più felice incontro, o a più felici ingegni la cura di rintracciarla. Così l'immortale *Neuton* nell' analisi della luce fu contento di aver dimostrata con esatte esperienze e proporzioni la diversa refrangibilità de' raggi, che la compongono; e ne lasciò il modo, e la natura all'arbitrio, e alla futura investigazione.

TEOREMA XII.

Nè porgesi più felice scioglimento di quel confuso e inestricabile nodo de' fenomeni, qualora si consideri l'azione delle punte, come effetto d'una sola forza procedente dall' armatura o conduttore non elettrico, da cui quelle partono, o a cui si presentano.

(*a*) Appartengono a questo Teorema i fenomeni de' Corollarj 6, 7, e 8, tanto della seconda, che della quarta Serie di sperienze, e più distintamente le proporzioni de' medesimi fenomeni raccolti in fine del Corollario universale dai Teoremi 5, 6, 7, e 8.

(*b*) Ragionando sopra di questi similmente, come sopra quelli, che furono esposti nell' antecedente Teorema, ne siegue per necessità, che non può in verun modo assumersi una sola forza, o un fluido solo smosso dal conduttore elettrico nell' armatura del quadro, o conduttore non elettrico, da cui parte quella punta, o a cui si presenta.

(*c*) Ma siccome nella varietà delle antecedenti proporzioni abbiamo riconosciuta non meno la diversa attività delle due specie di elettrici fluidi, che l'esistenza, e realtà de' medesimi; così nella presente varietà delle proporzioni di attività della punta stessa procedente

dal conduttore non elettrico, ed oppofta or all' una or all'altra fpecie di elettricità, ovvero or dall' una or dall'altra di quefte prefentata alla fteffa non elettrica armatura, dovremo fimilmente riconofcere nell'armatura o conduttore non elettrico non meno la diverfa facilità di ricevere l'azione dell'oppofta elettricità, che l'influenza, o neceffità di quefta facilità fteffa nella piena eftimazione, e rifoluzione di que' compofti fenomeni.

(*d*) E qui pure gioverà farfi ftrada alle nuove idee col parallelo di principj familiari a chi non è affatto nuovo nelle Fifiche teorie. Per calcolare in Idraulica l'azione di un fluido profiliente, non vaga ed aftratta, ma effettiva e reale, non bafta, come già offervai, tener conto dell' adulta velocità, e inoltre della fpecifica gravità del liquido; che quefti due elementi non riguardano, fe non l'attività in fe fteffa. Ma fe quefta fi riduce all'atto di produrre un dato effetto, d'uopo è allora di riguardare anche l'altro termine dell'effetto medefimo, come farebbe per efempio, l'ala d'una ruota da muoverfi, contro la quale quel liquido percuote. Ora la quantità della percoffa corrifponde è vero in aftratto alla formola di velocità adulta, e di gravità fpecifica del liquido, l'effetto però è vario fecondo la maggiore o minore fuperficie dell'ala percoffa, e in oltre, fupponendofi coftante, anzi la fteffa direzione, occorre varietà nell'effetto, fecondo la diverfa mobilità della ruota, cui quell'ala appartiene; e fono quefti gli elementi dell'altro termine, in cui fi compie l'effetto di quella formola prima.

(*e*) Siccome adunque in Idraulica dalle varietà e dai limiti, che riconofciamo nell' applicazione della fola formola affoluta al determinato effetto d'una ruota da muoverfi, concludiamo ficuramente l'influenza, e la realtà degli elementi dell' altro termine, in cui fi compie l'azione; così la varietà di proporzioni provenienti dalle punte, che partono da un conduttore non elettrico, o

a questo si presentano, porgeranno la prova, e la misura della diversa facilità, con cui l'elettricità naturalmente equilibrata e fissa ne' corpi non elettrici si muove, e si svolge per l'azione dell'una, o dell'altra specie già sciolta, e raccolta nell'opposto conduttore.

(*f*) Or questa facilità, che si scorge nella elettricità fissa ne' corpi ad essere smossa e sciolta per opera delle opposte elettricità, costituisce un nuovo e distinto termine, che concorre a compiere l'azione delle elettriche punte; e vuole perciò essere considerato più distintamente. In primo luogo la punta, che procede da conduttore non altrimenti elettrico, non ha se non minima azione, che da questo si estenda all'opposto conduttore elettrico; e perciò entra nell'ipotesi, che fu antecedentemente spiegata (*Teor.* 10, 6, 4), poichè ben lungi dall'influire nell'aumento di vicendevole azione, non presenta a questa, se non soggetto tanto minore, quanto è minore la superficie stessa della punta, a confronto di quella dell'armatura, e dei conduttori. Il che, sebbene sia chiaro per se stesso, e consacente alle verità precedenti, può nondimeno direttamente dedursi dalle stabilite proporzioni.

(*g*) Invero la punta opposta alla resinosa elettricità sta alla punta opposta alla vitrea in forza d' indurre nel quadro la carica fuori de' limiti dell'isolamento, come zero ai primi segni di elettricità; e dentro i limiti dell' isolamento come il primo grado di carica alla carica piena (*Teor.* 7).

(*h*) E l'armatura, da cui parte quella punta, sta all'armatura, da cui parte la seconda, in forza d'indurre la carica fuori de' limiti dell' isolamento, come zero alla metà della carica; e dentro i limiti come meno di metà alla carica piena (*Teor.* 8).

(*i*) Per riconoscere in queste proporzioni la superiorità delle superficie in confronto della punta, si compongano in uno i termini della prima ragione delle punte fuori

de' limiti dell' isolamento; e si compongano similmente in uno i termini della prima ragione delle armature fuori degli stessi limiti; e sarà il prodotto delle punte al prodotto delle armature, come sono i primi segni alla metà della carica.

(*k*) Si compongano similmente i termini dell' altra ragione delle punte, ed i corrispondenti delle armature entro i limiti dell' isolamento; ed essendo in ambeduē comune il termine di carica piena, sarà il prodotto delle punte a quello delle armature, come sono i primi termini fra loro, cioè come sta il primo grado di carica incirca alla metà della carica stessa.

(*l*) Quindi è tanto maggiore l' azione mutua del conduttore elettrico, e del quadro, quanto è maggiore certa funzione della superficie dell' armatura sopra la superficie della punta.

(*m*) La punta adunque, finchè non ha nel conduttore, da cui parte, qualche specie di elettricità smossa e sciolta, è inetta ad accrescere la mutua azione.

(*n*) Quando poi siavi nel conduttore, da cui la punta si parte, elettricità sciolta, allora si riduce alla prima ipotesi già spiegata (*Teor.* 10. *a*), ed acquista l'elettricità stessa per la via della punta quel momento che dichiarai (*Teor.* 9. *n.* 1 *e*, *f*); e che sarebbe superfluo di spiegare più diffusamente. Aggiugnerò soltanto, che di questo stesso momento ne abbiamo esempio nella celere progressione di aumento di carica, che si osserva nella Serie seconda, e nella quarta delle sperienze in confronto dell' altre due corrispondenti; nella prima delle quali dai pollici tre all' uno ascende alla piena carica, e nella seconda dai nove ai tre arriva alla carica piena: quando all' opposto nelle corrispondenti Serie, nelle quali l' armatura non ha punta, la prima ha la differenza dai quattordici pollici fino ai quattro, e la terza dai dodici fino ai due per arrivare alla prima forza della carica.

(*o*) Che se poi si consideri nella elettricità natural-

F iij

mente equilibrata e fiſſa la riſpettiva o ſpecifica facilità ad eſſere ſmoſſa e ſciolta dalle oppoſte ſpecie, riſulta dalle proporzioni ſteſſe precedentemente citate (*g*, *h*), che tanto nelle punte, come nelle armature, ſi ſvolge più facilmente la ſpecie oppoſta alla vitrea, che alla reſinoſa. Poichè nelle ſteſſe diſtanze riſpettivamente delle punte, e delle armature, tanto entro come fuori de' limiti dell'iſolamento, è ſempre inſignemente maggiore la forza di carica raccolta nel quadro colla vitrea, che colla reſinoſa elettricità del conduttore. Il che ſervirà per convincerci tanto più efficacemente della maggiore mobilità, o facilità di ſcioglierſi nella ſpecie reſinoſa, ſe ſi riflette, che la forza ſpecifica della reſinoſa eſſendo per lo meno quadrupla della vitrea (*Teor.* I), dovrebbe il conduttore elettrico di quella ſpecie imprimere quadrupla la carica nell' oppoſta armatura, quando la mobilità delle due ſpecie, che devono ſmoverſi a tal effetto, foſſe in ambedue eguale. Ora quando non s' imprime quadrupla, ma di gran lunga minore colla reſinoſa, che colla vitrea, non può ciò d' altronde ripeterſi, che dalla propoſta differenza di mobilità nelle ſpecie ſteſſe che ſi ſciolgono.

(*p*) Sembrano fin qui ridotti a tale diſtinzione e realtà i varj elementi, che concorrono a compiere l' azione delle elettriche punte, che può ciaſcuno di eſſi riconoſcerſi ne' ſuoi effetti, e perſino calcolarſi nella ſua quantità. Ci piace prima di por termine a queſto Teorema d' indicarne alcun eſempio tra i molti, che ſi preſentano ne' precedenti Corollarj e Teoremi. Si rifletta alle proporzioni delle diſtanze, e alle differenze che riſultano tra la prima carica ſenſibile e la piena carica nelle quattro Serie poco fa indicate in fine del penultimo paragrafo (*n*). Nella Serie prima le differenze della diſtanza della prima carica ſenſibile fino alla carica piena ſono dai quattordici pollici fino ai quattro; e nella terza dai dodici fino ai due, cioè in ciaſcuna dieci pollici, i

quali sommati sono venti. Per contrario nella Serie seconda sono dai tre fino ad uno, cioè due pollici; e nella quarta dai nove fino ai tre, cioè sei; i quali sommati cogli antecedenti due fanno otto pollici. Siccome dunque le distanze calcolate anche cogl' isolamenti ci condussero negli antecedenti Teoremi a conoscere la forza specifica delle specie sciolte di elettricità; così queste ci porgeranno dati per calcolare la diversa mobilità delle specie, che devono sciogliersi: e siccome nella Serie prima, e terza, nelle quali la punta si trova unita al conduttore elettrico, oltre la specifica forza di ciascuna elettricità, ha luogo l' Idraulico momento di accelerazione per la via della punta; così nella Serie seconda, e quarta, nelle quali la punta appartiene all' armatura stessa, in cui si sciolgono quelle elettricità, oltre alla rispettiva e specifica mobilità o facilità a sciogliersi in ciascuna specie, avrà pure luogo l' Idraulico momento, in proporzione che vengono sciolte. Ma basti di aver ciò accennato, che si spiegherà pienamente con nuovi appoggi di sperienze nella Parte seconda, e terza della presente Analisi.

TEOREMA XIII.

L' azione delle elettriche punte è composta; nè altrimenti corrisponde ai fenomeni, se non si risolve ne' suoi distinti elementi 1. del mezzo resistente come ostacolo frapposto alla riunione delle opposte elettricità, 2. del meccanico momento di reciproca azione, 3. della specifica forza di ciascuna specie di elettricità eccitata, o sciolta, 4. della specifica mobilità o facilità a sciogliersi di ciascuna specie, quando sono naturalmente equilibrate ne' corpi, 5. dell' Idraulico momento d' isolamento considerato come capacità, o recipiente delle sciolte elettricità.

1. La quantità di ostacolo del mezzo frapposto può diminuirsi in due modi. Primo, con diminuirne la grossezza stando salva l' ampiezza della base; e questo mo-

do facilita bensì l' azione vicendevole delle opposte elettricità, e concorre in ragione della capacità del mezzo a formare de' grandi ammassi di opposte elettricità; ma non ne compie giammai l' unione, se non per la rottura del mezzo stesso, ovvero soltanto di quelle particelle, nelle quali la grossezza frapposta sia ridotta a zero. E furono queste le vie, colle quali giunse *Epino* ad imitare non solamente la boccia Leidense con superficie simili opposte alla superficie d' un elettrico conduttore; ma inoltre a rendere esteriormente insensibile l' azione delle contrarie elettricità sciolte, e accumulate, e farla nuovamente, e ad arbitrio, sensibile colla sola separazione, e distanza delle superficie stesse, nelle quali quelle erano raccolte.

Si diminuisce in oltre l' ostacolo con diminuirne la base, salva restando la grossezza del mezzo; e ciò si ottiene per la via delle punte, come a suo luogo si dichiarò (*Teor. 9. n. 2*). Indi il massimo effetto dell' elettrica scarica, che è la riunione stessa delle opposte elettricità, si ha sempre fra due punte disposte a conveniente distanza; e se ad una punta si opponga più ampia superficie, il massimo effetto si trova sempre raccolto dalla parte della punta, e diviso al contrario in tutta quella parte di superficie, nella quale si estende l' elettrica azione, secondo certa funzione delle distanze, e della specifica forza delle elettricità. Che se si paragoni l' azione d' una specie di elettricità spinta da un conduttore per la via d' una punta ad una opposta superficie non elettrica; o viceversa dalla superficie elettrica del conduttore spinta contro una punta non elettrica, allora risulta il massimo dell' azione tanto nello sciogliere, che nel riunire le contrarie elettricità; e similmente la massima esplosione, o forza di scintilla, che corrisponde alla minima diminuzione della elettricità raccolta nel conduttore secondo le funzioni delle distanze composte cogli altri elementi di forza specifica, e di specifica mobilità. Talchè anche colla

punta

punta oppoſta al conduttore elettrico ſi trova tale diſtanza, nella quale piena rimane in queſto la forza della ſcintilla non altrimenti, che ſe allo ſteſſo oppoſta foſſe una eguale ſuperficie a diſtanza tanto minore (*Ser.* 2. *Cor.* 8. *e Ser.* 4. *Cor.* 5, *e* 8).

2. Ed in queſte reciprocità di ſuperficie colle diſtanze, alle quali ſi eſtende la vicendevole azione delle elettricità o ſciolte o da ſcioglierſi, conſiſte quel meccanico momento, che più ſopra dichiarato abbiamo, e propoſto in ſecondo luogo, come diſtinto elemento delle elettriche punte.

3. Della ſpecifica forza delle oppoſte elettricità ſciolte nulla ci rimane da aggiugnere, eſſendo già colcolata la reſinoſa per lo meno quadrupla della vitrea nell' indurre la carica, e per lo meno decupla nella propria diſperſione (*Teor.* 1, *e* 2).

4. Similmente nulla aggiugneremo della mobilità, o maggiore facilità a ſcioglierſi nella ſpecie oppoſta alla vitrea ſopra la ſpecie oppoſta alla reſinoſa; eſſendoſi già ridotta a certe proporzioni tanto di numeri, come di fenomeni (*Teor.* 5, 6, 7, 8) più diſtintamente nel Teorema duodecimo.

Non tralaſcierò qui d' avvertire, che tanto la ſpecifica forza in terzo luogo propoſta, quanto queſta ſpecifica mobilità delle due ſpecie di elettricità potrebbe calcolarſi più preciſamente ſecondo le Oſſervazioni aggiunte ai Teoremi 3, e 5; e ſecondo le funzioni dell' iſolamento, e de' fenomeni, ai quali ridotte ne abbiamo le proporzioni. A noi però baſta per ora di averne ſtabilita l' eſiſtenza, e l' andamento, riſervandoci a calcolarne giuſtamente le proporzioni in progreſſo dell' Opera col ſuſſidio di nuovi dati, che ci ſomminiſtreranno le ſucceſſive ſperienze.

5. Intorno all' Idraulico momento tanto della elettricità ſciolta e raccolta, come di quelle che ſi vanno ſucceſſivamente ſciogliendo e radunando ne' conduttori

due ſole riflesſioni ci ſembrano degne di particolare memoria, dopo ciò che detto ne abbiamo negli antecedenti Teoremi.

Primieramente come in Idraulica non ogni apertura di lume è opportuna per proccurare la masſima velocità del fluido emanante, ma ogni determinata altezza, e grandezza di recipiente ha tale apertura, o lume, per cui eſce il liquido colla masſima velocità, e colla minima reſiſtenza: non altrimenti negli elettrici fenomeni ogni forma o grandezza di conduttore, o di armatura ha il ſuo masſimo per queſto momento nelle varie proporzioni di palla, o punta ſmuſſata, o più acuta, ſecondo la corriſpondente forma, o lunghezza, o grandezza di que' conduttori, come vedremo in altre ſperienze a queſto fine dirette.

In ſecondo luogo a queſta idea d'Idraulico momento non vorremmo che taluno aſſociaſſe altri modi o altre idee di forza eſpanſiva, o di elaſticità; quaſichè ciaſcuna ſpecie di elettricità aveſſe in ſe ſteſſa principio e termine di queſto momento. Sembra a noi all'oppoſto, che tanto in queſti come univerſalmente in altri fenomeni di elettricità non debba mai preſcinderſi dalla mutua azione delle ſpecie ſteſſe fra loro, ſenza la quale ſi riduce la coſa a mere finzioni, ed a caſi imaginarj; mentre in realtà non vi è mai verun ſegno di elettricità, che non prenda principio, e incremento dalla proporzione ſteſſa di mutua azione delle due oppoſte ſpecie. In queſto ſenſo ridurremo qui principalmente que' ſoffj, e quaſi sbuffi, che ſembrano partire ſpontanei dai limiti degl'iſolamenti, ove ſono ſcabrezze, e termini acuti di corpi conduttori, non oſtante che ſiano quegli involti e coperti da un ſottile intonaco di ceralacca, o di maſtice, quando è aſſai forte l'elettricità. Così quando lo ſtrato reſiſtente ſia di ſimili materie reſinoſe ſi fora ſimilmente, e ſi trapaſſa con facilità, e reſta perciò inetto a raccoglier carica, ſe ha

punte ſporgenti internamente dall' una all' altra armatura. Per ſimile ragione infine i conduttori e le armature ſopraccariche e ridondanti di elettricità ſembrano ſoffiare e sbuffare ſpontaneamente per forza interna da ogni loro ſcabrezza, o ſpigolo, o prominenza; perchè appunto per queſte vie maſſimamente eſtendono la vicendevole azione coll' oppoſta elettricità ſmoſſa a grandiſſime diſtanze ne' corpi ambienti.

OSSERVAZIONE.

In queſta prima Parte della noſtra Analiſi delle punte ragionando, non come ſi è fatto da molti finora, dalla generale ipoteſi ai particolari fenomeni, ma bensì dal particolare all' univerſale, e dalla riſoluzione del compoſto al ſemplice, che ſono le uniche vie di Fiſica induzione, ci ſi preſenta naturalmente innanzi una idea delle elettriche forze ben diverſa da quella, che corre tanto alla moda della Frankliniana ipoteſi. Se dobbiamo giudicare della realità di queſta ipoteſi, che *Kinnersley* chiamò lepidamente *ortodoſſia elettrica*, dalla confuſione, e contraddizione introdotta non meno ne' fenomeni delle elettriche punte, che in ogni altro ben diſtinto fenomeno di elettricità, non ſappiamo trovar nulla, che ci rechi il minimo ſcrupolo di eſſerci ſcoſtati da quella mal concepita ortodoſſia elettrica. Chi avrà forza di ſpirito da eſaminare con imparzialità le opere degli Autori celebri, che hanno coltivate le coſe elettriche dopo *Franklin* ſeguendo la ſua ipoteſi, potrà per ſe ſteſſo convincerſi, che hanno eſſi più ſovente ſottilizzato, che analizzato, e troverà in quelle piuttoſto rarefatte, che eſteſe le cognizioni. Si forzano e ſi ſoggiogano i nuovi e diſtinti fenomeni ai precarj principj della ipoteſi; s' involgono e ſi compongono quelli con queſti; e ſi coniano di ſiffatta miſura nuovi nomi per tener fermi i ſettarj, ed abbagliare i proſeliti; in vece di

estendere, o limitare, o variare que' principj secondo l'ingenuità, e l'espressione de' semplici fenomeni.

A prendere le cose nella vera sorgente l'appellazione, e la preferenza di *positiva elettricità*, e di *fluido unico* attribuita a quella specie, che si eccita nello sfregamento de' vetri lisci, sembra non avere altro fondamento, che l'azzardo per cui *Franklin*, in quelle sue bellissime sperienze, sulle quali edificò la sua ipotesi, non ebbe per mano se non vetri, e cristalli più tosto che zolfi, e resine; ovvero perchè raccolse piuttosto l'elettricità dal vetro strofinato, che dal cuscinetto strofinante. Se avesse da principio fatte le sperienze stesse con globi di zolfo, come poi le fece *Kinnersley*, forse il nome di positiva elettricità non toccava mai più alla vitrea, ma restava per lo stesso titolo di primogenitura in infinito a tutta la linea de' corpi resinosi. Per verità nella prima Risposta a *Kinnersley* si trovò *Franklin* molto sorpreso da quelle sperienze; e le sospettò piuttosto fallaci ed equivoche per sola differenza di quantità, che non per diversità nella specie, o nella direzione. E nella seconda Risposta non le esaminò distintamente, ma contentandosi di averne replicate alcune con quell'apparato, che si trovò più comodo, che perfetto, non seppe ricusarne la verità; ed imaginandosi da quelle poche ripetute anche la realtà delle altre, le spiegò colla sua idea di *elettricità negativa*, e col *difetto* di quel fluido unico, ch'egli avea stabilito nel vetro. *Mais* (conchiude egli stesso) *ce ne sont ici que des pensées jettées à la hate*.

Grande fu il genio di *Neuton*; e la sua nobile Teoria della luce, e de' colori regge costante nelle vicende dei tempi, perchè non fu egli pago di gettarla a lampo d'ingegno, ma invecchiò prima di ridurre a termine l'analisi de' fenomeni, sui quali seppe fondarla. Fu pur grande il genio di *Cartesio*; ma le sue ipotesi perirono con lui, perchè insofferente nella osservazione, e nell' analisi fisica, si contentò di ridurle a meri voli d'in-

gegno. Grande è il genio di *Franklin;* ma qual confidenza dovrà averfi in un fuo penfiero azzardato fopra le due oppofte fpecie di elettricità, delle quali egli non ebbe idea ben diftinta ? Tanto più che ebbe egli idea affatto falfa della sfera di attività delle medefime, che fu impropriamente detta, e continua a dirfi *elettrica atmosfera*, la quale idea venne poi rettificata da *Epino*.

Indi fu con non minore fpirito, che giudizio, da qualche Fifico non volgare propofto il problema, non mai prima d'ora fciolto, nè rigettato, cioè: " Suppo-
,, fta vera fecondo l'opinione di *Franklin* la realità e
,, l'azione d'un fluido folo ne' fenomeni delle due op-
,, pofte fpecie di elettricità, dimoftrare direttamente,
,, che quel fluido abbia fede piuttofto nella vitrea, che
,, nella refinofa; ovvero a quale di quefte due realmente
,, convenga il nome di pofitiva ". Poteva in quefto afpetto la *Frankliniana* opinione annoverarfi fra quelle ipotefi verfatili, che fogliono inverterfi egualmente fenza verun pregiudizio, che fenza vantaggio veruno della verità.

Che fe poi voglia ridurfi ad efattezza di mifure e di proporzioni, che fono la vera pietra di paragone della realtà degli effetti, e delle caufe, fi fcorge mancante non folo ne' fenomeni delle elettriche punte, ma coi più folenni fenomeni della elettricità. Dimoftro in altre Memorie feparate l'incoerenza de' cardinali principj, da' quali fi deriva la fpiegazione della boccia Leidenfe. Quante fallacie, e quante illufioni non s'intrufero poi, e non lafciano tuttavia di foftenerfi tra il volgo de' Fifici nelle vere leggi degli elettrici moti, non bene da principio conofciute da *Franklin*, e poco felicemente in feguito dichiarate, o diffimulate dai *Frankliniani*? Chi intefe mai col folo difetto, o coll'affenza d'un fluido le ripulfioni tra i corpi dotati di refinofa elettricità non meno infigni, nè meno coftanti, che tra i corpi inveftiti dalla vitrea? Come s'intefero colla fola forza ef-

panſiva d'un fluido unico le elettriche adeſioni, o coeſioni? Eppure ſono queſte il primo, e più coſtante tra gli elettrici fenomeni. Poichè allo ſtrofinamento per eccitare l'elettricità immediatamente ſuccede l' adeſione de' corpi ſtrofinati fra loro, come mi occorrerà di rendere altrove manifeſto colle più ſplendide prove; e gli altri elettrici ſegni non ſi manifeſtano mai altrimenti, che inſieme, o dopo la ſeparazione di que' corpi ſtrofinati, e aderenti; la quale ſeparazione ſi fa egualmente alzando, o ſtriſciando la ſuperficie ſtrofinante, che traendo, o ruotando la ſtrofinata. Ma delle elettriche adeſioni non ebbe *Franklin*, che idea aſſai vaga; e i *Frankliniani* o le diſſimularono affatto per comodo della loro ipoteſi, non annoverandole neppure fra i ſegni; o ne declinarono la ſpiegazione con chiamarle *fenomeni acceſſorj*: quaſichè la diſſimulazione, o la tergiverſazione foſſero vie degne di un Fiſico per accoſtarſi alla verità.

TEORIA

Del nuovo Astro osservato prima in Inghilterra.

Del Sig. Ab. RUGGERO GIUSEPPE BOSCOVICH
Professore di Ottica al Dipartimento della Marina
a Parigi.

PROPOSIZIONE I.

Trovare la distanza, la posizione, e la grandezza dell' arco descritto dal nuovo Astro per mezzo di quattro osservazioni fatte nell' intervallo di più mesi.

LA brevità del cammino percorso da quest' Astro in sei mesi fa conoscere abbastanza esser egli molto remoto; si dee quasi tutto alla parallasse dell' orbe annuo della terra. L' arco descritto deve essere assai prossimamente rettilineo, e la velocità in esso sensibilmente costante. Quindi la di lui distanza, posizione, e grandezza potranno determinarsi per mezzo di quattro osservazioni, applicando a tale determinazione il problema di una retta segante in modo quattro rette date di posizione, che tre segamenti di essa intercetti dalle stesse rette siano in data ragione, cioè nella proporzione degl' intervalli del tempo. Questo problema, anche dal *Neuton* proposto nella sua Aritmetica universale per le orbite rettilinee delle comete, è stato altra volta da me dimostrato non aver luogo per l' orbite comuni delle comete (*Dissert. de Cometis An.* 1746.), e più

diffusamente in altra Operetta su lo stesso soggetto, che il Signor *Castillon* aggiunse nell'ultimo Tomo dell'Aritmetica Neutoniana da se con egregie annotazioni illustrata. Ma nel nostro caso la brevità del cammino corrispondente alla smisurata distanza ne permette l'uso. Trovata la distanza in supposizione d'un moto rettilineo ed uniforme, agevolmente si potrà conoscere, che la correzione, la quale dovrebbe corrispondere alla curvatura ed ineguaglianza della velocità, sfugge realmente ogni senso nel caso nostro.

Siano T, T', T'', T''', (*Fig. I.*) quattro luoghi della terra, P, P', P'', P''' quattro luoghi dell'Astro ridotti al piano dell'ecclittica a traverso i quali passano le direzioni delle longitudini osservate TE, $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$. Si tratta di trovare la distanza, la posizione, e la grandezza della retta PP''', i cui segamenti PP', $P'P''$, $P''P'''$ siano nella proporzione data degl'intervalli del tempo infra quelle osservazioni.

Siano A, A', A'' le intersezioni della retta TE colle rette $T'E'$, $T''E''$, $T'''E'''$, e le rette $P'''B$, $P''B'$ parallele alle rette $E'T'$, $E''T''$ s'incontrino colla medesima retta TE ne' punti B, B'.

Nel triangolo TST' dalle date distanze ST, ST' del sole dalla terra, e coll'angolo dato TST' uguale al moto del sole tra la prima osservazione e la seconda, si ricaverà la corda TT' cogli angoli STT', $ST'T$: gli angoli STA, $ST'A$ si scopriranno dalla differenza delle longitudini del sole, e dell'Astro. Quindi si avranno gli angoli ATT', $AT'T$, che saranno la somma o la differenza degli angoli STT', STA, ed $ST'T$, $ST'A$. Una figura anche trivialmente delineata, che contenga i luoghi T, T' nell'orbita circolare della terra colle rette TE, $T'E'$ indefinite, farà vedere se prender si debba la somma, o la differenza. La somma sarà da usarsi nel caso espresso dalla figura per l'angolo ATT'; la differenza per l'$AT'T$. Anzi basterà trovare l'uno

solamente

solamente di quegli angoli, essendo il terzo TAT' la differenza data delle longitudini dell' Astro nella prima, e seconda osservazione. Quindi si troverà la retta TA, e nel modo stesso troverannosi le rette TA', TA'' nei triangoli $A'TT''$, $A''TT'''$ col mezzo de' raggi ST'', ST''', degli angoli TST'', TST''', e degli angoli $TA'T''$, $TA''T'''$ uguali ai moti del sole, e dell' Astro in longitudine dalla prima alla terza, e quarta osservazione.

Si dicano t, t', t'' i tempi dalla prima osservazione alla seconda, alla terza, alla quarta; m, m', m'' i moti dell' Astro in longitudine dalla prima osservazione alla seconda, da questa alla terza, dalla terza alla quarta. L' angolo $A''P'''B$, il cui lato $A''P'''$ ha la direzione della longitudine quarta, e il lato BP''' parallelo all' AP' la direzione della seconda, sarà $= m' + m''$, l' angolo $A''P'''B'$ sarà $= m''$ per la direzione $B'P'''$ parallela alla direzione $A'P''$ della terza longitudine: l' angolo poi $A''BP'''$ sarà $= m$ per le direzioni BA'', BP''' delle longitudini prima e seconda, e l' angolo $A''B'P'''$ sarà $= m + m'$ per le direzioni $B'A''$, $B'P'''$ delle longitudini prima e terza. Si facciano i seni di questi angoli $a =$ sen. $(m' + m'')$, $a' =$ sen. m'', $b =$ sen. m, $b' =$ sen. $(m + m')$. Si facciano pure $AA'' = c$, $A'A'' = c'$, $PA'' = x$.

$$\text{Sarà } t : t'' :: PP' : PP''' :: PA = x - c : PB = \frac{t''x - c\,t''}{t};$$

$$\text{e perciò } A''B = \frac{t''x - c\,t''}{t} - x = \frac{(t'' - t)\,x - c\,t''}{t} : \text{così}$$

$$\text{sen.} A''P'''B = a : \text{sen.} A''BP''' = b :: A''B : A''P''' = \frac{(t'' - t)bx - bct''}{at}.$$

Con le stesse proporzioni sostituendo le rette $A'P''$, $B'P'''$ alle rette AP', BP''', e perciò i valori a', b', c', t' ai valori a, b, c, t, si avrà l' altro valore della medesima $A''P''' = \dfrac{(t'' - t')\,b'x - b'c't''}{a't'}$. Laonde fatto $\dfrac{(t'' - t)b}{at} = m,$

$\frac{bct''}{at} = n$, $\frac{(t''-t')b'}{a't'} = m'$, $\frac{b'c't''}{a't'} = n'$, si avrà $A''P'''$ $= mx - n = m'x - n'$, e perciò $x = \frac{n-n'}{m-m'} = A''P$.
Avuto questo valore, e il valore $AP''' = mx - n$ coll' angolo $PA''P'''$, il quale è il moto in longitudine dalla prima osservazione alla quarta $= m + m' + m''$, si avrà nel triangolo PAP''' tutto il cammino PP''' cogli angoli in P, e P''', che esibiscono la di lui posizione rispetto alle rette TE, $T'''E'''$; e le distanze TP, $T'''P'''$ si avranno aggiungendo le $A''P$, $A''P'''$ qui trovate alle trovate prima TA'', $T'''A''$; e perciò si avrà ciò che si dovea ritrovare.

SCOLIO.

Non ho qui in villa, dove sì fatte cose scrivo, la soluzione di questo Problema proposto dal *Neuton* nella sua Aritmetica universale, nè quella di *Simpson*, di cui mi sono servito nell' accennata Operetta stampata dal *Castillon*, e molto meno l' altre anteriori, di cui fa menzione il *Neuton*. Quelle si potranno riscontrare, ed usarle quando esibiscano un più spedito calcolo numerico. Il metodo però da me qui usato nella soluzione dello stesso Problema sembra assai naturale, e diretto, ed offre una formola molto semplice.

PROPOSIZIONE II.

Trovare la specie, e la grandezza dell' orbita.

Nella *fig.* 2. i punti S, T, P siano i medesimi che nella prima, e i punti A, P', T' siano gli A'', T''', P''' di quella: siano poi C C' i luoghi dell' Astro nella sua orbita. Moltiplicando TP, $T'P'$ per le tangenti della

latitudine prima ed ultima si troveranno le rette PC, $P'C'$ perpendicolari al piano dell' eclittica, e perciò perpendicolari alla retta PP', a cui se si concepisca la retta CI parallela ed uguale, sarà anch' essa cognita con la differenza $C'I$ delle rette PC, $P'C'$; e però si avrà anche la corda dell' orbita CC', ipotenusa del triangolo CIC', la quale per la latitudine di quest' Astro picciolissima appena differisce dalla retta PP'. Se questa si divida in due egualmente in H, e s' inalzi HH' fino alla corda CC', che sarà la semisomma delle rette PC, $P'C'$, e si tirino SP, SH; si avranno nel triangolo SPT i lati ST, TP coll' angolo STP, che è la differenza delle longitudini del sole, e dell' Astro, e perciò si troverà SP, e l' angolo SPT, che coll' angolo trovato APP' darà l' angolo SPH; questo poi col lato SP, e $PH = \frac{1}{2} PP'$, darà la retta SH, dalla quale e dalla retta HH' si avrà SH'. E' noto poi anche il lato $CH = \frac{1}{2} CC'$, e facilmente si troverà SC dai lati SP, PC cogniti coll' angolo retto SPC: quindi si avrà anche l' angolo $SH'C$, cioè la posizione della retta CC', la quale può prendersi per la tangente dell' orbita per rispetto al raggio vettore SH'. La perquisizione diverrà molto più semplice se si prendano PP', SH, SHC invece di CC', SH', $SH'C'$, il che sarà lecito in quest' Astro, che ha le latitudini così picciole.

La lunghezza della corda CC' riferita al tempo tra le osservazioni estreme offre la velocità, che paragonata colla velocità del corpo che ha da rivolgersi in cerchio nella distanza SH', determinerà il genere della sezione conica, nella quale l' Astro si move, e quell' istessa velocità, insieme coll' angolo $SH'C$, determinerà la di lei specie, e la grandezza nel modo seguente. Si dica n lo spazio, che col moto medio della terra vien percorso nel tempo di un minuto, la distanza media della terra dal sole posta $= 1$, r il raggio vettore SH', c la corda CC', t il tempo dalla prima osservazione all' ul-

tima. Il quadrato dello ſpazio corriſpondente al tempo t in quel moto medio ſarà $n^2 t^2$; ed eſſendo i quadrati delle velocità in cerchj intorno al ſole in ragione reciproca dei raggi, il quadrato dello ſpazio corriſpondente al medeſimo tempo nel circolo, il cui raggio $= r$, ſarà $\frac{n^2 t^2}{r}$. Per la qual coſa il quadrato della velocità in quel circolo ſarà al quadrato della velocità di quell' Aſtro come $\frac{n^2 t^2}{r}$ a c^2. L'altezza, da cui cadendo con un moto uniformemente accelerato con la forza, che rattiene il mobile nel cerchio, ſi acquiſterebbe la velocità circolare, è, per li teoremi *Hugeniani* la quarta parte del diametro; di modo che per quel cerchio è $= \frac{1}{2} r$, e le altezze dovute alle diverſe velocità, con pari forza, ſono come i quadrati delle ſteſſe velocità. Quindi l'altezza dovuta alla velocità dello ſteſſo Aſtro ſarà $= \frac{c^2 r^2}{2n^2 t^2}$.

In una mia diſſertazione, che ha per titolo, *Del modo di trovare l'orbita d'un pianeta coll' ajuto della catottrica*, ho da gran tempo pubblicata una ſempliciſſima ed elegantiſſima coſtruzione del problema, in cui data la diſtanza, la velocità, e la poſizione della tangente ſi cerca la ſezione conica da deſcriverſi; la qual coſtruzione ho ivi dedotta dalla ſoluzione d'un certo problema catottrico. Ho di poi dedotto la ſteſſa coſtruzione da ſoli principj appartenenti alla teoria delle forze decreſcenti in ragione reciproca duplicata delle diſtanze in altra Operetta intorno alle perturbazioni di Giove, e di Saturno, come ſegue.

Sieno nella *fig.* 3. i punti S, C i medeſimi che nella *fig.* 2., ed H ſia lo ſteſſo che H'. Si pigli HK verſo S uguale all' altezza dovuta alla velocità, ed SL terza continuatamente proporzionale a SK, SH nella

direzione SK. Si conduca LT perpendicolare alla tangente HC, e si prolunghi in M. L'asse primario della curva ricercata sarà uguale alla retta SL; i due fuochi saranno S, M, e nel loro mezzo il centro N; dati i quali è manifesto, ch'è data pure la sezione conica.

La curva sarà un'ellissi, una parabola, o un'iperbola secondo che l'altezza HK sarà minore, uguale, o maggiore per rispetto al raggio SH. In questo ultimo caso i punti K, L giaceranno nella retta SH prolungata dalla parte di S. Nel caso dell' ellissi si avrà il circolo, se sarà $SK = \frac{1}{2} SH$, e l' angolo SHC retto. Nel caso della parabola, svanendo la SK, la longitudine dell'asse SL diventerà infinita, e i punti N, M allontanandosi all' infinito, la posizione dell' asse, e la distanza perielia si determineranno facilmente con quest' altra costruzione. Col centro S, e coll'intervallo SH si trovi nella stessa tangente il punto Q, e tagliata in due egualmente la HQ in O, si trovi OV perpendicolare alla retta SQ: sarà V il vertice della parabola, SV la distanza perielia, la cui direzione determinerà la longitudine del perielio nell'orbita: nel caso dell'ellissi la direzione SM offrirà la longitudine dell'afelio, SN l'eccentricità, SL il tempo periodico, che si avrà dal teorema Kepleriano, qualora si prenda la radice quadrata del cubo della metà dell' asse SL, la quale esibirà il numero degli anni.

Per ritrovare l'altezza $HK = \frac{c^2 r^2}{2n^2 t^2}$ si ha il valore trovato $SH = r$, $CC' = c$, e il tempo t, che assumer si deve in minuti: bisognerà in oltre trovare il valore n. Il che potrà farsi nel seguente modo. L'anno sidereo è nell' Astronomia del Sig. *de la Lande* di giorni 365. 6^h. $9'$. $10'' = 31558150''$; lo spazio fatto in questo tempo nel cerchio, il cui raggio $= 1$, è la circonferenza $= 2 \times 3,1415927$; e però lo spazio n corris-

pondente ad un minuto, cioè a 60″, ſarà $\frac{12 \times 3,1415927}{3155815}$,

e il logaritmo del valore $\frac{1}{2n}$ 2 ſarà $= 7,8534090$.
Se gli ſi aggiunga il doppio logaritmo della diſtanza r, e del valor della corda c, e il doppio complemento aritmetico del logaritmo del tempo t eſpreſſo col numero de' minuti, ſi avrà il valore dell'altezza HK, il quale paragonato colla diſtanza SH eſibirà un' elliſſi, una parabola, o un' iperbola, ſecondo che per riſpetto ad eſſa ſarà minore, uguale, o maggiore.

PROPOSIZIONE III.

Trovare tutti gli elementi della Teoria di queſt' Aſtro.

La longitudine del nodo, e l' inclinazione con facilità ſi troveranno anche indipendentemente dalla ſpecie dell'orbita. Sia nella *fig.* 2. R l'interſezione delle rette $P'P$, $C'C$: ſarà SR la linea dei nodi, la di cui direzione eſibirà la longitudine del nodo aſcendente, ſe tutte due le latitudini, come qui, ſaranno boreali, e $P'C'$ maggiore parimenti, come qui, della PC. Fatto $P'C' - PC = C'I : PC :: P'P : PR$, ſi troverà queſto lato del triangolo SPR, in cui è manifeſto anche l'angolo SPR, ſupplemento dell' angolo trovato SPH: il lato poi SP coll'angolo TSP ſi avrà nel triangolo TSP, nel quale ſi hanno i lati ST, TP coll' angolo in T, che è la differenza della longitudine del ſole, e dell' Aſtro nella prima oſſervazione; e perciò troveraſſi l'angolo PSR. L' angolo STP aggiunto qui a quella longitudine del ſole eſibirà la longitudine eliocentrica della direzione SP, e l'angolo PSR levato da quella ſomma eſibirà la longitudine ricercata della direzione SR tendente al nodo aſcendente.

Se ſi concepiſca un piano perpendicolare alla retta *SR* condotto per la retta *PC*, colla quale *SR* s' incontri in D; l' inclinazione ricercata ſarà l' angolo *PDC*, la di cui tangente è $\frac{PC}{PD} = \frac{PC}{SP \times sen.\ PSR}$. Perciò ſi avrà anche l' inclinazione.

Per la longitudine del perielio ſi ha nella *fig.* 2. l' angolo *PSH* nel triangolo *SPH* già riſoluto; il quale aggiunto qui all' angolo *RSP* eſibirà l' angolo *RSH*: la di cui tangente diviſa pel coſeno dell' inclinazione darà l' angolo *RSH'*. Imperciocchè ſe il piano *HD'H'* parallelo al piano *PDC* s' incontri con la medeſima *SR* in *D'*; ſarà *HD'H'* l' inclinazione, e la retta *HD* ſarà il coſeno di quell' angolo col raggio *D'H'*, mentre queſte due rette ſono tangenti degli angoli *RSH*, *RSH'* col raggio comune *SD'*. L' angolo *RSH'* aggiunto qui alla longitudine del nodo, cioè della direzione *SR*, offrirà la longitudine della direzione *SH'*. Si ha l' angolo $HRD = PRD = APP' - PSR$, la di cui tangente pure moltiplicata pel coſeno dell' inclinazione somminiſtrerà l' angolo *H'RD'*. Quindi ſi avrà $SH'C' = RSH' + H'RD'$, che è il medeſimo, che l' angolo *SHQ* della *fig.* 3. Il ſupplemento del doppio angolo *SHQ* ſarà l' angolo *HSQ*, per eſſere iſoſcele il triangolo *HSQ*; il quale aggiunto alla longitudine della direzione *SH* darà per il caſo della parabola la longitudine del perielio; e dalla teoria poi generale dell' orbita parabolica la diſtanza perielia *SV* è $= SH \times$ ſen.^{2} *SHQ*, e perciò anche que' due elementi facilmente ſi avranno nel caſo della parabola. Qui pure ſi conſeguirà l' effetto più facilmente ſe nella *fig.* 2. ſi aſſumano i punti *P*, *H*, *P'* invece de' punti *S*, *H'*, *C'*.

Per il caſo dell' elliſſi, date nella *fig.* 3. *SH*, *HK*, ſi avrà *SK*, ed *SL*, la cui metà ſarà il ſemiaſſe maggiore uguale alla diſtanza media. Si avrà ancora $HL = SL - SH$, e perciò anche *LT* perpendicolare alla

tangente $HC = HL \times$ sen. LHC. Quindi si avrà LM doppia di essa; ed avendosi nel triangolo SLM anche il lato SL, e l'angolo L complemento dell'angolo LHC, si troverà SM doppia della eccentricità SN, e l'angolo MSL, il quale tolto dalla longitudine della direzione SH darà la longitudine dell'afelio. Le distanze perielia ed afelia si avranno dalla differenza, e dalla somma della distanza media, e dell' eccentricità trovata, e il semiasse minore sarà medio proporzionale geometrico tra di esse. Simile è l' operazione per l'iperbola; se qualche somma non si muti in sottrazione, o viceversa secondo le leggi della trasformazione dei luoghi geometrici.

Il tempo dell'arrivo al perielio nella parabola si avrà dalla teoria generale del moto parabolico, in cui si ha un bellissimo, e poco avvertito teorema del *Neuton* nel primo libro dei Principj della filosofia naturale, di cui ho io da gran tempo fatto uso per determinare assai facilmente per ogni giorno, e ad ogni due giorni i luoghi della cometa nella parabola graficamente delineata. Il teorema è questo. Mentre la cometa progredisce in quella curva con un moto assai ineguale, il centro del circolo che passa per il sole, per il vertice dell'asse, e pel luogo della stessa cometa, si muove con un moto uniforme nella retta linea, che taglia in due parti eguali, e ad angoli retti la distanza perielia, e nel tempo, che dal perielio la cometa deviene all' anomalia di 90 gradi, percorre un segamento di essa uguale all'istessa distanza perielia. Indi poi per qualunque anomalia, data la quale si ha pur anche il raggio vettore, dividendo la distanza perielia per il quadrato del coseno di mezza l'anomalia, si deduce agevolmente la formola molto semplice, che ci dà il tempo corrispondente a quell' anomalia.

Nella *fig.* 4. le rette MN, ON che segano in due ugualmente, e ad angoli retti la distanza perielia SV, ed il

ed il raggio vettore SH s'incontrano scambievolmente nel punto N, ch'è il centro del circolo, che passa per li punti S, V, H: la retta MP è perpendicolare alla retta SH: e con essa s'incontra in Q la retta NQ parallela ad OS. Se il raggio vettore SH si faccia $= r$, la distanza perielia $SV = u$, l' anomalia $VSH = a$; sarà $SP = \frac{1}{2} u \, cos. a$, $OP = \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} u \, cos. a = NQ$. L'angolo NMQ sarà eguale all'angolo $MSP = a$, essendo l'uno e l'altro il complemento dell'angolo SMP. Quindi sarà $MN = \frac{NQ}{sen. a} = \frac{r - u \, cos. a}{2 \, sen. a}$.

Il numero de' giorni corrispondenti all' anomalia di 90 gradi nella parabola avente la distanza perielia $= 1$ si chiami n; il numero ad essa corrispondente nella data parabola sarà $= nu^{\frac{3}{2}}$ e però se si faccia $SV = u$:

$$MN = \frac{r - u \, cos. \, a}{2 \, sen. a} :: nu^{\frac{1}{2}} : \frac{nu^{\frac{1}{2}}}{2 \, sen. a} \, (r - u \, cos. \, a)$$

questo ultimo termine esprimerà il numero de' giorni debito all'anomalia a. In oltre il numero n è $= 109$, 6, e perciò il numero cercato sarà $\frac{54,8 \, u^{\frac{1}{2}}}{sen. a} (r - u \, cos. a)$.

Questo numero aggiunto al tempo medio tra le osservazioni estreme darà il tempo dell' arrivo dell' Astro al perielio. In fatti la formola qui trovata è molto semplice, e può essere di grandissimo uso tanto per computare la tavola parabolica dei tempi corrispondenti alle anomalie, quanto ancor molto più per ritrovare il tempo, qualora le tavole già computate non s'abbiano alle mani, o qualora l'anomalia ecceda la massima di quelle, che nelle stesse tavole si contengono. Dove si tratta di computare la tavola, riesce la formola anche più semplice fatto $u = 1$.

Se l'orbita è poi ellittica, quel tempo si computerà

coll' ajuto del settore ellittico riferito all' area totale. Se nella *fig.* 5. i punti S, N, H siano i medesimi, che nella *fig.* 3., e siano poi A, P i punti dell' afelio e perielio, e la retta HK perpendicolare all' asse attraverso AP prolungata dalla parte di H s' incontri col cerchio circoscritto in I, e si tirino le rette SI, SH, NI; si avrà l' angolo ASI, facendo come il semiasse maggiore trovato NI al semiasse conjugato medio geometricamente proporzionale fra le distanze AS, SP afelia e perielia similmente ritrovate, così la tangente dell' angolo NSH avuto nella risoluzione del triangolo SLM alla tangente di quell' angolo. Il valore dell' arco $IL = \frac{SN \times IK}{NI} = SN \times sen.\ ANI$ si riduca alle parti angolari facendo come $113 : 355 :: NI : \frac{355}{113} \times NI$, ch' è il valore di mezza la circonferenza, così $\frac{355}{113} \times NI$: $IL = SN \times$ sen. $ANI : 180° : \frac{113 \times 180°}{355} \times \frac{SN \times sen.\ ANI}{NI}$; fatto questo valore $= M$, si farà come $360°$ ad $ANI + M$, così il tempo periodico al quarto: quest' ultimo valore sarà il tempo corrispondente all' anomalia ASH; trovato il quale, si avrà il tempo dell' arrivo al perielio.

Se il moto si faccia nell' iperbola, non difficilmente si otterrà il tempo ricercato mediante il valore dell' area iperbolica, che si ha per mezzo de' logaritmi: ma egli sembra molto improbabile, che i corpi, se ve n' ha che si movano in iperbole, di tal maniera a noi s' avvicinino, che cadano sotto gli occhi.

Se il moto sia diretto, o retrogrado, facilmente si scoprirà dall' osservazione stessa della *fig.* 1., delineata anche grossolanamente dopo determinata la distanza della retta PP'', e la posizione del punto A'', che è il con-

corſo delle direzioni TE, $T'''E'''$. Si ha in oltre pur queſta regola generale. Se l'uno dei punti S, A'' giacerà tra le rette $T''T$, $P'''P$ indefinitamente prolungate, e l'altro fuori; il moto ſarà retrogrado: altrimenti ſarà diretto. Qui ſi troverà l'uno e l'altro dai punti di dentro: quindi il moto ſarà diretto. Così tutti ſi avranno gli elementi della Teoria, che ſi dovevano determinare.

S c o l i o.

Il metodo finora eſpoſto appoggiato alla prima Propoſizione non può adoperarſi, ove ſi tratti delle comete comuni che non cadono ſotto gli occhi ſe non ſe in diſtanze molto minori; perchè ſe ſi prenda l'arco maggiore, la curvatura e l'ineguaglianza della velocità ſi oppongono all'ipoteſi, ſopra di cui ſi fonda quella ſoluzione: ſe poi ſi prenda l'arco minore, in cui ſembri che quella curvatura ed ineguaglianza ſi poſſa traſcurare, allora l'arco eziandio deſcritto dalla terra è pure rettilineo ſenſibilmente, e vien percorſo colla velocità anche meno ineguale: quindi tanto l'arco cometico, quanto l'arco terreſtre ſi dovranno avere inſieme per linee rette, l'una e l'altra delle quali da quattro direzioni della longitudine è ſegata nella medeſima proporzione del tempo. Per altro in quell'antica mia Diſſertazione ſulle comete, e nello Schediaſma impreſſo dal *Caſtillon* appiè dell'Aritmetica univerſale del *Neuton* io ho dimoſtrato, che nel caſo che quelle quattro rette date paſſano per li quattro binarj de' punti appartenenti alle due rette tagliate in quei punti nella medeſima ragione, rieſce il problema indeterminato per tal modo, che preſo qualunque punto in una di quelle rette in qualunque diſtanza, poſſa condurſi altra retta, che da quelle quattro medeſime ſarà ſegata in quella ſteſſa ragione. Donde naſce, che ſe ſi abbia la determinazio-

ne, ella non corrisponde alla natura del problema, ma ai piccioli errori dell'osservazioni, e alle quantità neglette per dar luogo alla supposizione d'un moto rettilineo ed uniforme.

Nel nostro caso va la cosa molto diversamente. Altro metodo, ch'esporrò fra poco, il quale mediante tre osservazioni ricerca la distanza nell' ipotesi d'un moto parabolico, mi fa vedere, che la distanza stessa è doppia della distanza di saturno dal sole, la quale invero mi si appalesò dover'essere di quella grandezza, anche essendo il moto circolare. In quella distanza l'arco anche di sei mesi non differisce sensibilmente da una linea retta, nè il moto s'allontana dall'uniforme, di maniera che non ne può provenire l'errore neppur d'un secondo; mentre il moto della terra in un arco così grande moltissimo differisce dalla retta linea. Quindi nella *fig.* 1. le rette linee $T'E'$, $T''E''$ segano la corda TT''' in ragione assai diversa dalla ragione dei tempi, in cui segano la corda PP''', il che toglie l'indeterminazione, e dà speranza d'uno scioglimento abbastanza accurato. L'esattezza della soluzione dipende dalla grandezza del numeratore, e del denominatore della formola trovata nella Proposizione prima $x = \frac{n - n'}{m - m'}$, la quale nel caso dell' indeterminazione renderebbe vana la soluzione, dando $\frac{0}{0}$, o una frazione derivata da' soli errori delle osservazioni. Quanto più differenti saranno tra di sè le ragioni de' segamenti di quelle corde, tanto maggiori saranno que' valori, e perciò tanto meno si altereranno per li piccioli errori delle osservazioni; per la qual cosa potrà sperarsi la determinazione abbastanza esatta, se le ultime osservazioni sieno distanti l' una dall' altra l' intervallo di sei mesi. Dopo sei mesi la corda TT''', che è la base della parallasse annua, diminuisce; il che pure nuoce ad una esatta de-

terminazione. A prima vista sembrano sommamente acconce le osservazioni fatte tre mesi avanti, e tre dopo la congiunzione col sole, che in quest'anno è succeduta poco innanzi al solstizio estivo, o l'opposizione, che si avrà presso al solstizio invernale, perchè allora quella base non sarà obbliqua; ma se si adoperino le osservazioni fatte avanti, e dopo la stazione, che si avrà prima della metà di Ottobre, i segamenti della corda TT''' avranno una ragione molto più diversa dalla ragione de' segamenti della corda PP'''. Questa differenza sarà ancora molto più grande, se un anno intero sia lontana l' ultima osservazione dalla prima; nel qual tempo altresì l' errore nato dalla curvatura dell' arco di quest' Astro sarà così picciolo, che si potrà trascurare, e agevolmente potrassi determinare, se piacerà, per poterne tener conto: la corda TT''' svanirà; ma le corde TT'', TT'' saranno abbastanza grandi, e la soluzione avrà luogo adattata appuntino a quel caso. Intanto potrà sperarsi qualche successo dalle osservazioni fatte nel principio di Aprile, e da farsi nel principio del prossimo Ottobre con due intermedie assai distanti da quelle, e da sè scambievolmente.

Il metodo, che suppone l'orbe circolare, o parabolico, non soggiace a questo pericolo, se nella soluzione del problema si adoperi anche la relazione, che la grandezza della CC' nella *fig.* 2. deve avere alla distanza dal sole. Per l' orbe circolare bastano due osservazioni, tre pel parabolico. Esporrò questi metodi nelle due seguenti Proposizioni.

PROPOSIZIONE IV.

Trovare il raggio del cerchio nell' ipotesi circolare col mezzo di due osservazioni.

Primamente questo raggio si troverà poco lontano dal vero col metodo seguente. Nella *fig.* 2., che offre due osservazioni, si troverà la corda TT', e la retta TA, come nella Proposizione prima: indi nel triangolo STA troverassi SA dai lati ST, TA, e dall' angolo in T, tutte cose note. Poichè tutto l'angolo TAT', che è il moto totale in longitudine di questo Astro assai lento, è di pochi gradi; sarà l' angolo ASH molto picciolo eziandio dopo lo spazio di sei mesi, e perciò la retta SH', che qui similmente quasi nulla differisce dalla retta SH, sarà prossimamente uguale alla somma delle rette SA, AH, la prima delle quali se si chiami a, l'altra x, sarà $SH' = a + x$. E mentre sia il triangolo PAP' isoscele, la retta PP' sarà perpendicolare alla retta AH, e perciò pochissimo differente dalla retta perpendicolare alla retta SH, intercetta dalle rette $AP \times AP'$, la quale sensibilmente non differirà dalla CC', che le corrisponde, e questa dall' arco del circolo intercetto fra le rette TC, $T'C'$. Se poi l'angolo PAP' si chiami m, sarà PP' in caso d' isoscelismo $= 2\,AH \times \tan.\frac{1}{2}\,PAP' = 2x \tan.\frac{1}{2}m$, in luogo di cui si può porre $x \tan. m$, perchè le tangenti de' piccioli angoli sono proporzionali assai prossimamente agli stessi angoli; e ciò sarà assai prossimamente il valore dell' arco CC'.

Nella Proposizione seconda si è trovato lo spazio n, che in un minuto di tempo vien percorso nella distanza media della terra dal sole. Quindi se il tempo fra queste osservazioni, ridotto a minuti, si chiami t, sarà lo spazio debito a quel tempo in quel circolo nt. Ora il raggio SH' di quest' orbita circolare essendo $a + x$, sa-

rà il quadrato dello ſpazio corriſpondente a quel cerchio $= \frac{n^2 t^2}{a+x}$, eſſendo li quadrati delle celerità reciprocamente proporzionali ai raggi de' cerchj. Quel valore fatto $= CC'^2 = x^2 \, tan.^2 m$, ſarà $x^3 + a x^2 - \frac{n^2 t^2}{tan.^2 m} = 0$ l'equazione di terzo grado, che darà il valore ricercato x il più proſſimo al vero.

Trovato il valore x per tale equazione, agevolmente ſi troverà il valore più accurato della diſtanza col metodo di falſa poſizione. Preſo quel valore per la retta AH, e il triangolo PAP come iſoſcele (dalla qual forma pochiſſimo potrà egli differire) ſi avrà $HP = HP' = x \, tan. \frac{1}{2} a$, ed $AP = \frac{x}{coſ. \frac{1}{2} a}$; e nel triangolo TSP ſi avrà ST, e $TP = TA + AP$ coll' angolo STP, e perciò troveraſſi il valore SP, che deve eſſere aſſai proſſimamente uguale al valore SH, e queſto al valore SH', come ancora CC' aſſai proſſimamente uguale al valore PP'. Il quadrato di queſto moltiplicato per SH' deve eſſer uguale al valore ritrovato $n^2 t^2$. La differenza ſarà l'errore da correggerſi per altra poſizione del valore x, il quale ſi dovrà pigliar minore o maggiore, ſecondo che per lo contrario quel prodotto riuſcirà per ſorte minore o maggiore del valore $n^2 t^2$; imperciocchè accreſciuto il valore di x s'accreſcerà tanto PP', quanto SH'. L'error nuovo paragonato col primo eſibirà il valore di x, il quale correggerà l'errore, ſe i precedenti errori ſaranno ſtati piccioli, come ſaranno di fatto: altrimenti lo diminuirà in tal guiſa, che per nuove poſizioni ſi dileguerà ben preſto.

Dalle oſſervazioni del dì 3 Aprile, e 17 Luglio ho trovato la diſtanza TP aſſai proſſimamente $= 19, 6$. Se ſi adoperi la ſeconda oſſervazione ancor più remota, trovato per mezzo di eſſa il valore TA, e da queſto

valore levato TP, il rimanente ſi potrà aſſumere per AP; così PP' per $= 2AP \times$ ſen. $\frac{1}{2}$ PAP', e trovato il valore SP nel triangolo STP, ſi avrà $PP'^2 \times SP$, valore da paragonarſi col valore n^2t^2. In tal maniera ſi eviterà l'equazione del terzo grado. Ma anche più facilmente la coſa ſi condurrà ad effetto, dove foſſe nota la longitudine dell' Aſtro in oppoſizione da paragonarſi colla longitudine in congiunzione col ſole, che di leggieri ſi deduce dalle oſſervazioni del meſe di Maggio, e di Luglio: imperciocchè circa la congiunzione lo ſteſſo moto apparente, per altro lentiſſimo, dovette eſſere quaſi accuratamente equabile. La differenza di queſte longitudini ſarà il moto angolare intorno al ſole: facendo come queſta differenza delle longitudini a 360°, così l'intervallo del tempo fra quelle due poſizioni al quarto termine, queſto darà il tempo periodico, dal quale per la terza legge di *Keplero* riſulterà la diſtanza dal ſole.

Ho data qui una ſoluzione di queſto problema analoga al mio metodo più generale che ſerve per le orbite paraboliche; ma eſſo ſi ſcioglie molto più facilmente per la falſa poſizione in queſt' altra maniera. Si prenda nella ſteſſa fig. 2. un raggio SP arbitrario: nel triangolo TSP ſi avrà l'angolo in T, che è la differenza delle longitudini geocentriche del ſole, e dell' Aſtro, e la diſtanza ST del ſole dalla terra: così ſi avrà l'angolo SPT, il cui ſeno è $= \frac{ST \times ſen. STP}{SP}$: eſſo dovrà eſſere aggiunto alla longitudine geocentrica dell' Aſtro data dalla oſſervazione, o dovrà eſſerne ſottratto, ſecondo le diverſe circoſtanze facili a determinarſi, per avere la longitudine eliocentrica dell' Aſtro medeſimo. Così ſi avranno le due longitudini eliocentriche di eſſo corriſpondenti a' due tempi delle due oſſervazioni, e però ſi avrà l'arco deſcritto in quell' intervallo di tempo. Queſto ſi paragonerà a quello, che dovrebbe deſcriverſi in eſſo

in esso intervallo in vigore della distanza assunta. Se un anno tropico sia $= a$; la distanza assunta $= r$; quell' intervallo $= t$; la circonferenza del circolo $= c$; l'arco, che corrisponde a quel tempo, sarà $= \frac{tc}{ar^{\frac{3}{2}}}$, ciò che facilmente si ricava dalla regola di *Keplero* de' quadrati de' tempi proporzionali a' cubi delle distanze: in vigor di essa il tempo periodico di esso Astro sarà $= ar^{\frac{3}{2}}$ preso r nelle unità uguali alla distanza media del sole dalla terra; e l'arco cercato sarà il quarto termine proporzionale dopo questa quantità, il tempo t, e l'intera circonferenza. Questo arco confrontato con quello, che avevano dato le due osservazioni, dà l'errore della posizione; la quale rifatta, quanto bisogna, deve dare al fine la vera distanza, da cui si ricaverà anche il tempo della rivoluzione, che avrà per numero di anni il solo valore $r^{\frac{3}{2}}$.

Convien però avvertire di correggere le osservazioni dell'Astro col liberarle dall'aberrazione del lume, e dalla nutazione, correggendo il luogo del sole colla nutazione sola: non occorre aver riguardo alla precessione degli equinozj; giacchè la rivoluzione siderale dell' Astro contiene lo stesso numero degli anni siderali, che la rivoluzione tropica degli anni tropici.

Quando nella scorsa state del 1781 composi questo opuscolo, trovai coll'altro metodo la distanza 19, 6, servendomi di due osservazioni, che erano troppo vicine fra loro, come ho detto qui innanzi, onde i piccoli errori delle osservazioni portavano un errore più considerabile nel risultato; oltrechè non aveva impiegato le picciole correzioni sopra accennate, bastandomi allora di avere a un dipresso la distanza da determinarsi meglio colle osservazioni più lontane, come appare negli Scolj seguenti. Adoperando poi delle osservazioni più lontane con questo altro metodo, e facendo uso delle debite correzioni, ho trovato la distanza di 18, 90. Un'os-

ſervazione del 25 Aprile confrontata con una del 12 Decembre mi ha dato 18, 914, e con una del 21 Febbrajo 18, 892: il numero di mezzo, diſprezzando le milleſime, reſta il ſuddetto 18, 90½. Queſto viene confermato anche dalla differenza delle longitudini nella congiunzione, ed oppoſizione, di cui ho pur fatta menzione in queſto opuſcolo. Ma per avere il tempo, e il luogo della congiunzione eſatti, e non all' ingroſſo, non ſi può ſupporre il moto geocentrico dell' Aſtro uniforme; giacchè la diſtanza della terra dal ſole, e dall'Aſtro medeſimo variandoſi, varia la velocità di eſſo moto; e come l' Aſtro non avendo latitudine ſenſibile, ed avendo una luce sì debole, reſta naſcoſto dietro al ſole per troppo lungo tempo; queſta diſuguaglianza nuoce ſenſibilmente alla determinazione cercata. Ho un metodo per evitare queſto inconveniente, che ſpiegherò in altro opuſcolo, dove darò anche l' applicazione di varie combinazioni di oſſervazioni a' metodi qui propoſti.

Aggiungerò qui ſolo, che il Sig. *de la Lande* ha trovato per la diſtanza 18, 913, e calcolando con queſta un gran numero di oſſervazioni ha trovato una differenza di pochi ſecondi; ciò che dimoſtra, che l' orbita non ſi diſcoſta molto dalla circolare, e ci aſſicura, che queſto è un vero pianeta diſcoſto dal ſole quaſi eſattamente al doppio di ſaturno.

PROPOSIZIONE V.

Trovare l'orbita parabolica col mezzo di tre oſſervazioni.

Sieno nella *fig. 6.* tre luoghi della terra T, T', T'' con tre direzioni delle longitudini TE, $T'E'$, $T''E''$, S il luogo del ſole, P, P', P'' tre luoghi dell' Aſtro nell' orbita parabolica, il cui arco in iſmiſurata diſtanza potrà qui prenderſi per rettilineo, e il moto per uniforme. Sia poi il ſegamento Tt della corda TT'' alla corda TT'', come il tempo fra la prima e ſeconda oſſervazione al tempo tra la prima e terza; e ſe la terra

ſi moveſſe con moto uniforme per la corda TT'', il luogo di eſſa nella ſeconda oſſervazione ſarebbe in t, e la ſeconda longitudine avrebbe avuto la direzione tP' in vece della direzione $T'P'$ cavata dall' oſſervazione. Soſtituita queſta longitudine alla longitudine oſſervata, e fatti t, t', t'' i tempi dalla prima oſſervazione alla ſeconda, dalla ſeconda alla terza, dalla prima alla terza, ed m, m', m'' i moti in longitudine, che corriſpondono a que' tempi, ſi avrà la ſeguente proporzione $T'P' : TP :: \frac{t'}{ſen.\ m'} : \frac{t''}{ſen.\ m''}$, e queſt' altra $T'P' : T''P'' :: \frac{t}{ſen.\ m} : \frac{t''}{ſen.\ m''}$.

Queſto teorema ſi deduce da quello, che ho dimoſtrato nella ſeconda delle due operette impreſſe nel Tomo VI. degli Opuſcoli, che dall' Accademia di Parigi ſi pubblicano col titolo di *Memoires preſentès à l' Academie*. Ivi a' luoghi della terra, e della cometa ne' ſuoi archi curvilinei piccioliſſimi ho ſoſtituito le interſezioni de' raggi vettori colle loro corde. Dimoſtrai che in caſo, che la ſaetta dell' arco deſcritto intorno al centro delle forze ſia picciola aſſai per riſpetto al raggio vettore, può prenderſi il moto di queſta interſezione per equabile; ſoſtituita poi la longitudine della direzione, tendente dall' interſezione del raggio terreſtre colla ſua corda all' interſezione del raggio cometico colla ſua, alla longitudine della direzione tendente dal luogo della terra al luogo della cometa nella ſeconda oſſervazione, ſi ottengono le proporzioni qui propoſte. Mentre alla interſezione del raggio terreſtre colla ſua corda ſi ſoſtituiſce qui il punto t ſegante la corda ſteſſa in ragione de' tempi, e non curata la ſaetta dell'arco cometico troppo picciola per la ſmiſurata diſtanza, l'interſezione del raggio cometico alla corda dell' arco ridotto al piano dell' eclittica ſi confonde in P col luogo

dell' Aſtro, è manifeſto che il medeſimo teorema deve qui pure aver luogo.

Queſto teorema ivi m' offerſe un metodo ſpeditiſſimo, onde determinare l' orbita della cometa, aſſai proſſima alla vera, col mezzo di tre oſſervazioni, adoperando il metodo di falſa poſizione. Imperciocchè, preſa la diſtanza accorciata ſeconda $T'P'$, ſi trovano con quella proporzione la prima, e la terza; e col loro mezzo per una grafica coſtruzione ſpedita, o per la riſoluzione di ſei triangoli, de' quali tre ſono rettangoli, trovaſi tanto la corda PP'', quanto la corda dell' orbita CC'' coi raggi vettori SC, SC''. Ivi poi ho dimoſtrato anche queſt' altro teorema: ſe il prodotto dal quadrato dello ſpazio, che col moto medio della terra ſi percorrerebbe in due minuti di tempo, moltiplicato nel quadrato del tempo t'' ridotto a minuti, ſi chiami a, e la ſomma di tali raggi b; deve eſſere $bc^2 - \frac{c^4}{12b} = a$, traſcurate le quantità, che nel caſo di queſta ſaetta picciola riſpetto al raggio vettore ſicuramente poſſono traſcurarſi: il logaritmo poi di quel quadrato trovai eſſere 0, 756499, al quale aggiunto il doppio logaritmo del valore t'', il valore a facilmente riſulta; ed una volta trovato rimane coſtante in tutte le propoſizioni. La differenza del valore della formola dal valore a è l' errore da diminuirſi dopo la nuova poſizione, o da correggerſi; donde naſce, che per una ſola ſerie di poſizioni ſi deviene ai valori ricercati, mentre col metodo comune ſi ricerca la ſerie di molte ſerie, il che eſigge una fatica di calcoli quaſi intollerabile. Ho poi anche il metodo, con cui per le comuni comete delineata facilmente una figura molto ſemplice, ſi forma giudizio della grandezza da aſſumerſi per la prima poſizione, ſicchè ſi ha appena biſogno della terza poſizione. Agevolmente poi avute tre longitudini, e latitudini l' una dall' altra diſtanti l' intervallo di pochi giorni, e

adoperata l'operazione grafica coll'ajuto del calcolo numerario, nello ſpazio di due o tre ore ſi trovano gli elementi proſſimi ai veri, e da correggerſi poi facilmente coll'oſſervazioni più remote.

In queſto metodo ſpeſſe volte può traſcurarſi la riduzione della ſeconda longitudine, potendoſi dimoſtrare, che la retta che congiunge le interſezioni dei raggi vettori colle corde è parallela alla retta che congiunge gli ſteſſi punti degli archi, allor quando la cometa nella ſeconda oſſervazione è in congiunzione col ſole, o in oppoſizione, o sì veramente in una diſtanza dal ſole uguale alla diſtanza del ſole dalla terra; per la qual coſa in quell'Operetta ho omeſſa tal riduzione, di che però ed ivi, e in quell'antica prima Diſſertazione ſopra le comete fatto aveva menzione. Ho poi un metodo generale molto ſpedito d'aver la ragione della riduzione ſteſſa, che ho propoſto alla ſteſſa Accademia, e con molte altre coſe appartenenti alla teoria delle comete eſpoſto in un'opera di giuſta mole, che ho già da gran tempo bella e compiuta, cui già con molti ſupplementi da aggiungerſi ho accennato due anni fa in fine della nuova edizione del mio poema ſopra l'ecliſſi pubblicato in Parigi colla traduzione in franceſe. Queſta riduzione è qui del tutto neceſſaria, dovendoſi a cagion del moto troppo picciolo uſare le oſſervazioni avute in uno intervallo di tempo molto più lungo, in cui ſi può bensì avere per rettilineo l'arco di queſt'Aſtro; ma la curvatura dell'arco terreſtre è sì grande, che non ſi può del tutto traſcurare. Queſta riduzione ſi farà, trovato che ſia l'angolo $T'P't$ per qualunque poſizione.

Queſt'angolo ſi conſeguirà facilmente, e tutta la rimanente perquiſizione potrà effettuarſi nel modo ſeguente. Ne' triangoli TST', TST'' con le diſtanze ST, ST', ST'' del ſole dalla terra, e cogli angoli in S uguali al moto del ſole in longitudine corriſpondente ai tempi t, t'', ſi troveranno le corde TT', TT'', e gli angoli in T, T', T'', e

le diſtanze TA, $T''A$ nel triangolo TAT''. Facendo t'' : t : : TT'' : Tt, ſi troverà queſto lato del triangolo $TT't$, in cui avraſſi ancora il lato TT', e l'angolo $T'Tt$, differenza degli angoli STT'', STT'. Laonde ſi avrà $T't$, e l'angolo $TT't$, dal quale ſe ſi levi l'angolo $TT'E'$ differenza dell'angolo $ST'T$ dall'allungazione $ST'E'$, ſi avrà l'angolo $tT'E$. Queſte coſe dovranno trovarſi una volta; le quali ſaranno poi le medeſime per tutte le poſizioni inſieme col valore a una volta trovato per mezzo del logaritmo $0,756499$ aggiunto al doppio logaritmo del tempo t'' ridotto a minuti.

Ora preſo un valore arbitrario per la diſtanza $T'P'$, ſi avranno nel triangolo $P'T't$ i lati $T'P'$, $T't$ coll'angolo in T', ch'è il medeſimo che il trovato $tT'E'$. Laonde ritroveraſſi l'angolo $T'P't$ da aggiungerſi qui alla longitudine della direzione $T'P'$ per aver la longitudine della direzione tP', la quale dovrà adoperarſi per trovare i valori m, m' ridotti. Il ſeno di queſt' angolo ſarà $\frac{T't \times ſen.\, T'tP'}{tP'}$. Per la qual coſa trovato una volta il valore $T't \times$ ſen. $T'tP' = T't \times$ ſen. $T'tE'$, queſto per ciaſcheduna delle poſizioni ſi dovrà dividere per il valore tP', per cui ſi potrà prendere $T'P' - T't$, onde avere la riduzione $T'P't$.

Allora poi ſi avrà $TP = \frac{t''\, ſen.\, m'}{t'\, ſen.\, m''} \times T'P'$, e $T''P'' = \frac{t''\, ſen.\, m}{t\, ſen.\, m''} \times T'P'$. Togliendo poi TA, $T''A$ ſi avranno le AP, $A''P''$, e perciò nel triangolo PAP'', in cui l'angolo PAP'' è uguale al moto totale m'' in longitudine, ſi avrà PP''. Quindi ſi avranno coll' ajuto delle latitudini PC, $P''C''$, $C''I = P''C'' - PC$ colla corda $CC'' = c$. Nel triangolo SPT co' lati dati ST, TP coll'angolo in T ſi troverà SP, e nello ſteſſo modo SP''. Queſti due lati con PC, $P''C''$, e cogli angoli in

P, P'' retti daranno i raggi SC, SC'', e perciò la somma $SC + SC'' = b$. Basterà qui confrontare il valore bc^2 col valore a, imperciocchè il valore $\frac{c^4}{12b}$ svanirà, come sarà manifesto a chi ne faccia esperienza, per il valore della corda c troppo picciolo rispetto al valore b.

Distrutto l' errore col mezzo di alcune posizioni si troveranno tutti gli elementi dell' orbita parabolica, come nella Proposizione terza. Ho applicato questo metodo alle osservazioni de' giorni 3 Aprile, 7 Maggio, e 17 Luglio, che qui esibisco colle posizioni del sole.

	T.M.	Long. dell' Astro	lat. B	long. ☉	dist. ☉
Apr. 3	$9^h.19$	$2^s.24°.52',7$	$0.\ 5'.38''$	$0^s.14°.29',9$	1,00124
Mag. 7	8. 35	2. 26. 12,4	0. 8. 36	1. 17. 32,7	1,01019
Lug. 17	15. 17	3. 0. 17,7	0.12. 10	3. 25. 43,2	1,01612

Il tempo medio è per Parigi. Ho per altro tralasciato i secondi a causa del moto in uno ancora e più minuti insensibile. Nelle longitudini ho usato le sole decime parti de' minuti, perchè così non si trascurano se non se al più tre secondi, l' error de' quali in queste osservazioni corrisponde unicamente alla quinta parte di un secondo di tempo. Nelle latitudini, che più accuratamente si definiscono per le declinazioni non dipendenti dal tempo, ho ritenuto i secondi, e ciò molto più, perchè gli errori di esse, molto minori in sè, nuocono assai più riferiti ad esse cotanto picciole, qualora si cerca la posizione della linea de' nodi, e l' inclinazione, i quali due elementi perciò saranno molto meno certi.

Ho trovato i valori $a = 13,1101$, $TA = 14,8947$, $T''A = 15,4811$. Dopo poche posizioni, nelle quali molto tempo innanzi alla fine del calcolo osservai, che il valore della corda PP'' riferito alle distan-

ze, era per dare gli errori troppo grandi, posi $T'P' = 20$, ed avendo veduto, che le picciole differenze della posizione mi offerivano mutazioni smisurate nella grandezza dell'errore, assunsi le rette SP, SP'', PP'' per eguali alle rette SC, SC'', CC''. Il valore bc^2 mi riuscì 13, 6920, mentre $\frac{c^4}{12\,b}$ fosse minore di 0, 0001, e perciò da trascurarsi del tutto. Quindi l'errore fu + 0, 5819. Posto 19, 8, riuscì l'errore — 2, 2049. Indi la nuova posizione dovette essere 19, 9584, la qual pur usata, l'errore fu depresso a 0, 0855. Per questi due ultimi errori trovai le mutazioni assai picciole delle rette TP, $T''P''$, PP'', SP, SP'' trovate in quest' ultima posizione. Queste poi corrette adoperai per trovare PC, $P''C''$, e coll' ajuto loro trovai tosto i primi due elementi, e così gli altri tutti col metodo esposto nella Proposizione terza. Può bensì essere che in tanti calcoli numerici mi siano sfuggiti degli errori in quest' età mia d' anni 71, avendogli fatti mentre villeggiava lungi dalla capitale, siccome ancora mi trovo, scrivendo queste cose, dove non ho veruno assistente ai calcoli. Nondimeno più volte ripetuti gli stessi calcoli, e corretti, mi pare di potermene fidare; e trasmessi poi questi elementi a Parigi, furono giudicati abbastanza congruenti con quelli, che ivi da altri furono ritrovati con altri metodi, e dopo fatte molte osservazioni.

Qui aggiungerò una cosa, che diminuita alquanto la distanza può ritrovarsi altra corda, che al problema soddisfaccia, in cui però l' Astro s'allontanerebbe dal sole, e dalla terra, e perciò molto tempo innanzi sarebbe egli stato visibile. Avendo da principio usate le osservazioni più vicine per la corda più vicina, col mio metodo comune alle orbite delle comete, trovai un' orbita, che restò tosto dalle seguenti osservazioni abbandonata, il che addivenne pur anche ad altri. Considerando

rando a fondo la cosa trovai avervi quattro corde, ciascuna delle quali soddisfarebbe, due prossime e due remotissime: escluse quelle, si dovette ricorrere a queste.

Proporrò qui infine dell' operetta gli elementi trovati per la parabola, e vi aggiugnerò la figura, (*Tav. annessa*), in cui è delineato ogni movimento di questo Astro, che si avrà per più anni eziandio dopo l' arrivo al perielio, se l' orbita di esso è parabolica. La specie dell' orbita si determinerà più accuratamente dopo molte combinazioni di quattro osservazioni, e ciò anche più accuratamente se ciascuno di questi luoghi si cavi per interpolazione da più osservazioni fatte in molti giorni, onde gli errori di esse si distruggano scambievolmente. Pel metodo parabolico potranno usarsi con maggior frutto, e con calcolo più facile i luoghi corrispondenti a tre mesi in circa, ma in eguali intervalli dal mezzo corrispondente alla stessa opposizione, intorno alla quale facilmente si osserverà l' Astro nel fine di quest' anno, e nel principio del seguente: imperciocchè allora il punto t cadrà nella retta $T'E'$ della *fig. 6*, cosicchè non sia d' uopo della riduzione della seconda longitudine; essendo poi eguali i tempi t, t', sarà TP : $T''P'$: : sen. m': sen m, e perciò senz' aver alcun riguardo alla seconda distanza accorciata TP, si potrà la posizione fare per la sola TP, presa la quale, e fatto una volta il valore $\frac{\text{sen.}\,m}{\text{sen.}\,m'} = r$, sarà $T'P' = r \times TP$, come proposi nella seconda di quelle mie operette stampate per ordine dell' *Accademia*; ed in vero si potrà pur anche, se piaccia, usare il metodo della prima operetta, che riduce il problema ad un' equazione di sesto grado. Ma quelle operette intendersi non possono interamente, se non si corregga l' erronea trasposizione delle tavole, che giunto in Francia trovai in quel sesto volume impresso a Parigi avanti la mia venuta: la tavola che ivi fu apposta dopo il fine della prima operetta

insieme colla terza apposta dopo il fine della seconda, devono essere la prima, e la seconda della seconda operetta; e le due prime apposte all' operetta seconda appartengono alla prima. Essendo le medesime operette moltissimo nello stesso volume distanti l' una dall' altra, e le pagine, ove debbono inserirsi da' legatori, non incontrandosi col fatto, nessuno a caso indovinerà i veri luoghi delle tavole, e perciò senza siffatto avvertimento quell' operette non possono essere di alcun uso.

Se usar si debbano le osservazioni di due o tre anni, si dovrà far conto della curvatura, e dell' ineguale velocità, il che certamente per l' uno e l' altro metodo facilmente si otterrà, determinando l' effetto della gravità verso il sole relativamente alla distanza da esso prossimamente cognita, il quale effetto determina la posizione del punto dell' arco, in cui è l' Astro, dal punto della corda, da cui è divisa in ragione dei tempi. Qui presa la distanza = 19 trovai la riduzione della seconda longitudine indi nata non giugner neppure ad un secondo, come di sopra ho accennato.

Elementi in supposizione dell' orbita parabolica.

Longitudine del nodo - - - - - - - - -	2^s. 25°. 13, 3
Inclinazione - - - - - - - - - - - - - - -	2. 17, 6
Luogo del perielio nell' orbita - - - -	5. 22. 16, 9
Distanza perielia - - - - - - - - - - - - -	10, 2756
Arrivo al perielio - - - - - - - - - - - -	13. Marzo 1790,

Moto diretto.

Mem. della Società Italiana Tomo I. Pag. 82

Linea de' nodi
Orbita della Terra
Eclittica
Scala per la divisione della Parabola
1780
1785
1790
1795
Orbita del nuovo Astro se è Parabolica
1792

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6

Fig. 1

Fig. 2

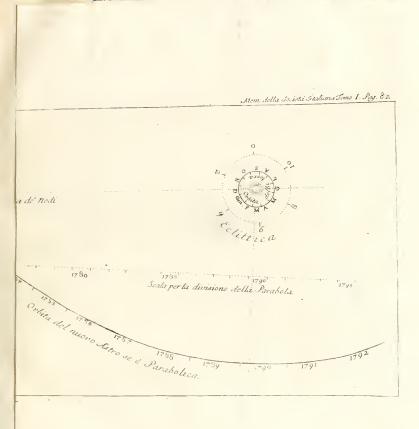
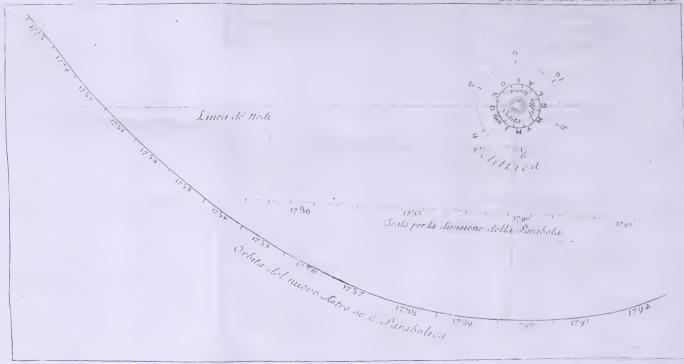
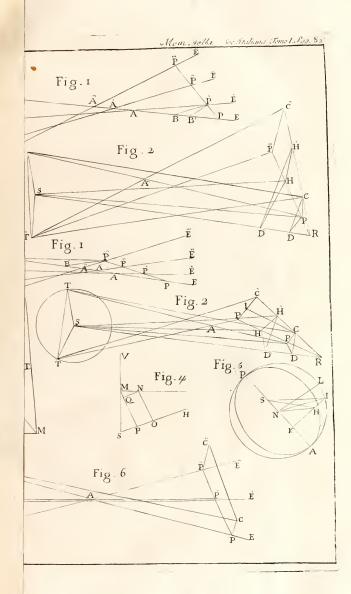
Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

RISULTATI

Di ſperienze ſopra l' elaſticità de' Fluidi Aeriformi permanenti ſul mercurio.

Del Sig. Felice Fontana Direttore del Gabinetto Fiſico del Gran Duca di Toſcana.

Mi pareva, che foſſe una ricerca nuova ed importante per la fiſica moderna di conoſcere le leggi, con cui gli ſpazj occupati dalle arie fattizie erano diminuiti dai peſi comprimenti, e ſe le denſità di quei fluidi elaſtici erano proporzionali ai peſi comprimenti, come lo ſono nell' aria atmosferica.

Per maggior facilità io ho penſato di far le mie eſperienze nella macchina da comprimer l' aria, ed ho paragonato gli ſpazj occupati dalle arie artificiali a quelli dell' aria comune, che mi ſervì ſempre di termine di paragone. Ho fatto uſo di due cilindri di criſtallo alti 10 pollici e larghi mezzo pollice ben calibrati per tutto, e ne' quali il pollice era diviſo in 20 parti.

La quantità delle arie introdotte era coſtante, ed occupava nei tubi otto pollici in altezza. In uno dei due tubi laſciai per tutto il tempo delle mie ſperienze l' iſteſſa quantità, e qualità di aria comune, cioè otto pollici in altezza. I due tubi erano ſituati dentro di una tazza, ed immerſi in parte nel mercurio l' uno a canto dell' altro in modo che era facile oſſervare gli ſpazj occupati dalle arie attraverſo il groſſo recipiente della macchina di compreſſione. Oſſervava, che il calore foſſe ſempre il medeſimo, e paragonava le diminuzioni del-

le arie fattizie con quelle dell' aria comune tutte le volte che queste erano ridotte a quattro pollici, a due poll., ad un poll.

I.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Deflogisticata di $\frac{1}{59}$.

II.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Flogisticata di $\frac{1}{100}$.

III.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Infiammabile di $\frac{1}{60}$.

IV.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Nitrosa di $\frac{1}{100}$.

V.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Fissa di $\frac{1}{60}$.

VI.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Vitriolica di $\frac{1}{32}$.

VII.

L' aria comune fu trovata egualmente compressibile dell' aria acida Marina.

VIII.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Alcalina di $\frac{1}{57}$.

IX.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' *aria Regia* dello stagno di $\frac{1}{100}$.

X.

L' aria comune fu trovata meno compressibile dell' aria Spatosa di $\frac{1}{30}$.

XI.

L' aria comune fu trovata egualmente compressibile dell' aria Arsenicale.

XII.

L' aria comune fu trovata meno compreſſibile dell' aria Epatica di $\frac{1}{45}$.

Il Cavalier *Newton* ha dimoſtrato che ſe le particelle d' un corpo ſi reſpingono con forze reciprocamente proporzionali alle loro diſtanze, comporranno un fluido, la denſità del quale ſarà proporzionale ai peſi comprimenti. Molti Fiſici hanno dedotto da quella verità matematica, che l' aria doveſſe la ſua elaſticità e natura ad una tal forza.

Qui abbiamo dodici fluidi o arie oltre l' aria comune, in cui ſi verifica la legge fiſſata dal *Newton*, giacchè le minime differenze trovate da noi coll' eſperienza ſono traſcurabili, nè l' aria comune ſteſſa ſegue a rigore quella legge, e queſte dodici arie ſon ben lontane dal formare un fluido elaſtico ſimile all' aria comune, che anzi ſono tutte dodici di una natura affatto differente fra loro, e differente dall' aria comune. Il teorema del *Newton* ſerve a provar ſolamente, che le noſtre arie fattizie convengono bensì coll' aria comune nella elaſticità, oſſia che quella forza ideale di repulſione è ſufficiente a rappreſentare i fenomeni delle elaſticità delle arie, ma non prova per queſto che eſiſta realmente ne' corpi, e che quei fluidi ſieno della medeſima natura ed indole dell' aria comune. Io ho ancor trovato per eſperienza, che gli ſteſſi fluidi aeriformi di ſopra ſi dilatano nel vuoto della ſteſſa quantità, di cui ſi ſono condenſati nel pieno, o nell' aria compreſſa.

Deve bensì parer ſingolare, che tanti fluidi, e sì diverſi fra di loro oſſervino una medeſima legge di dilatazione e di riſtringimento; il che farebbe credere che vi è una forza fiſica in natura, un principio non an-

cora noto agli Osservatori, per cui le particelle dei corpi nel momento, che diventano elastiche fra di loro, e permanenti sul mercurio, sono allontanate e respinte con quelle date leggi, che si sono vedute; e questa forza pare unica e sempre l' istessa, giacchè produce i medesimi effetti sopra tante sostanze diverse, e li produce costantemente in tutti i luoghi, ed in tutti i tempi.

Un' altra verità par che si possa dedurre, ed è, che l' elasticità non è una forza essenziale, non è una forza intrinseca dell' aria atmosferica, giacchè si vede che quella stessa forza è comune a tanti altri fluidi aeriformi, che sono sì differenti fra di loro.

Resterebbe da esaminare se quel medesimo principio, che rende elastici tanti fluidi aeriformi, è ancora la cagione dell' elasticità di tutti gli altri corpi anche solidi, che sarebbe una scoperta importante per la fisica generale, e di una gran semplicità. Alcune sperienze fatte sopra l' avorio, il vetro, e l' acciajo mi fanno sospettare, che l' elasticità di quei corpi è soggetta alle medesime leggi, onde che il principio fosse ancora l' istesso, e la differente elasticità nei diversi corpi potesse derivare dai diversi contatti delle molecole componenti. Ma molto mi resta ancora per assicurarmi della vera natura di questo principio generale, e come renda elastici i corpi, benchè molte sperienze da me fatte mi lusinghino, che la ricerca non è affatto impossibile.

Conviene, che io dica qualche cosa sopra l' aria, che ho chiamato *Regia*, e della quale poche persone posson intender cosa sia, e quali ne sono le principali proprietà. Io trovai il modo di far quest' aria nel 1778 in Londra, e la cavai dallo stagno per mezzo dell' acqua regia.

Nel medesimo tempo trovai un' altra aria cavata parimente coll' acqua regia, la quale si ottiene tanto dalla

platina, che dall' oro, e che chiamai fin d' allora aria della *Platina*. Questa seconda aria si ottiene quando la dissoluzione della platina, o dell' oro comincia a prosciugarsi. Hanno tutte due queste arie delle proprietà singolari, che farò conoscere nella mia opera *sulle Arie in generale*. Non ho fissato nè il peso, nè l' elasticità dell' aria della platina, e dell' aria dell' oro per le ragioni che saranno dette allora. Il Signor *Fabroni* ha bensì parlato di queste due nuove mie arie nelle note al *Cronsted*, che si doveva pubblicare in Londra sino dal 1779, e che depositò manoscritte nelle mani del nostro comune e rispettabile amico il Sig. *Kirwan*.

Nella mia opera *sulle arie* da pubblicarsi io esaminerò coll' esperienza alla mano le proprietà singolari di queste due nuove arie; e farò molte altre ricerche relative alle altre arie in generale, e specialmente se le dilatazioni di esse sieno proporzionali alle differenze del calore, e quanto ne deviino. Questi esperimenti sono molto delicati, ed esigono moltissime avvertenze nel farli. Ho ancora voluto fissare le leggi delle dilatazioni dei fluidi aeriformi esposti al medesimo grado di calore, ed ho ottenuto de' risultati, che non sono gran fatto uniformi a quelli pubblicati negli Atti di Berlino l' anno passato dal chiarissimo Signor *Achard*; la medesima discrepanza e maggiore io ritrovo nelle gravità delle diverse arie pubblicate dal medesimo Sig. *Achard*, nè io posso sospettare alcun errore nel metodo da me praticato. Nell' opera del Signor *Kirwan* pubblicata nelle Transazioni di Londra l' anno passato *sopra la quantità delle molecole acide, che si trovano negli acidi ordinarj*, si leggono i risultati delle mie sperienze fatte a Londra nel 1778 sopra i pesi delle arie naturali, ed artificiali, e questi esperimenti saranno di nuovo ripetuti da me nella mia opera citata di sopra, acciocchè i pesi sieno determinati anche con maggior precisione.

PRINCIPJ

PRINCIPJ GENERALI

Della solidità, e della fluidità de' Corpi.

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Gabinetto Fisico del Gran Duca di Toscana.

I.

QUalunque particella di materia tende ad accostarsi a qualunque altra per il principio d' attrazione, e da questa forza risultano i corpi solidi.

II.

Se nella natura non regnasse che questa sola forza, tutto sarebbe solido, ed immobile.

III.

Se vi sono de' corpi fluidi non vi possono essere che per un altro principio, o forza opposta alla prima, che li rende tali, onde se la prima forza tende ad accostare le particelle della materia, l' altra deve necessariamente allontanarle.

IV.

Tutti i corpi fluidi diventan solidi nel freddo, e il freddo naturale della Siberia rende solido il mercurio medesimo.

V.

Tutti i corpi solidi diventan fluidi nel caldo, il quale può aumentarsi a segno, che si risolvano fino in vapori invisibili; onde la materia del calore qualunque ella sia, e comunque si possa trovar modificata nelle diverse circostanze de' diversi corpi, è il secondo principio attivo, che regna nella natura, e sarà chiamato Forza Espansiva, perchè tende ad allontanare da sè le parti componenti dei corpi.

VI.

I fluidi anche i più pesanti, tolte e scemate le resistenze esterne, si dissipano in un momento, come si vede in una goccia d'acqua, e fin di mercurio messe nel vuoto. Dunque la forza espansiva, che è in essi, è in una continua azione, o *niso*, ed è maggiore della forza d'attrazione, che tenderebbe a consolidarli.

VII.

La forza espansiva ne' fluidi non è inferiore alla forza di gravità di essi fluidi, giacchè col solo scemarne la pressione esterna sopra di essi, i fluidi si dissipano in vapori, e sorton dai corpi in cui si trovano.

VIII.

L'aria comune, l'aria fissa, le sostanze spiritose e meno pesanti, messe in altre più pesanti (come per esempio l'acqua), l'aria medesima assorbita dal carbone, potranno sortire dai fluidi, e dai corpi in cui si trovano, non perchè sieno elastiche dentro quelle sostanze, ma bensì perchè, scemata la pressione esterna,

la forza espansiva prevale alla gravità, e le spinge, e urta, e caccia da essi in tutte le direzioni.

IX.

La fluidità ne' corpi può considerarsi come uno stato accidentale di essi, giacchè si arriva dal filosofo a torla in tutti fuorchè nell' aria, che per analogia non può essere eccettuata dagli altri fluidi, benchè il grado di freddo per tal effetto debba esser molto maggiore che negli altri.

X.

Questa forza espansiva comune ai fluidi e ai solidi può essere una delle principali e primitive cagioni delle ordinarie evaporazioni, e produrre fino le evaporazioni de' corpi solidi staccando e sollevando le impercettibili molecole di essi, giacchè una molecola quasi isolata può considerarsi benissimo come dominata dalla forza espansiva.

XI.

In questa maniera si vede che nei fluidi si debbono considerare due forze, l' una di gravità, l' altra d'espansione; e da questi due principj bisogna partire per render ragione delle qualità, o leggi che si osservano in essi.

XII.

I fluidi non elastici, come l'acqua, il mercurio.... non sono sensibilmente compressibili, almeno cogli ordinarj metodi, che si praticano: sono essi egualmente incompressibili anche allora che sono penetrati dal ca-

lore, e si sa che si dilatano sensibilmente col crescer sensibilmente il calore.

XIII.

Si può spiegare il singolar fenomeno della incompressibilità dei fluidi non elastici, e dilatati dal calore senza supporre una forza infinita nella materia del calore paragonata colle pressioni esterne. La sola variazione de' contatti, e de' siti delle molecole incompressibili basta a tutto. Queste molecole potendo occupare per il calore introdotto degli spazj maggiori di prima, e nel tempo stesso trovarsi in contatti continuati potranno resistere a tutte le pressioni esterne, le quali pressioni non avranno alcuna azione contro della materia del calore. Per ispazj maggiori non altro intendo che un minor numero di molecole, che si trovano in uno spazio medesimo.

XIV.

La forza de' vapori proviene da una gran quantità della materia del calore, che si unisce ad essi in quello stato. Si è scoperto in quest'ultimo tempo, che la materia del calore, che è in tutti i corpi, non vi è distribuita, nè in ragione de' volumi, nè della quantità di materia, ma secondo l' indole e natura diversa dei diversi corpi. Si è trovato ancora, che i corpi nel passare dallo stato di fluidi a quello di solidi perdono una grandissima quantità di calore, e che per l'opposto ne acquistano altrettanta quando dallo stato di solidi ritornano in fluidi. L'acqua per esempio perde 58 gradi di calore nell'atto che si diaccia, e ne acquista il diaccio 58 nell' atto che ritorna acqua: così mille altre sperienze hanno fatto vedere, che i corpi contengono una grandissima quantità di materia

del calore, e questo calore è preso da quelle minime molecole nell' atto, che diventano vapori, e lo perdono quando ritornano a formare i corpi di prima. Non si ignorano le forze de' fluidi, che si riducono in vapori, e si sa quel che possono poche gocciole di acqua, o di mercurio rinserrato, a cui nulla par che possa resistere; nè si ignora la forza prodigiosa del calore, che urta, e impelle tutti i corpi per tutte le direzioni, talchè non è più sorprendente che nell' atto di unirsi la materia attivissima del calore in sì gran quantità ai vapori, e nell' unirvisi nell' istante come fa, i vapori vincano tutti gli ostacoli più forti.

XV.

I vapori sono facilmente compressibili, ossia i fluidi incompressibili ridotti in vapori si comprimono facilmente. Tutte le sperienze ci assicurano di questa verità, e basta applicare al vapore una forza maggiore di quella, ch' egli ha di espandersi, per ridurlo sotto un volume minore.

XVI.

Si è detto perchè i fluidi sieno incompressibili, benchè penetrati più o meno dal calore. Questa causa non può aver luogo per nessun conto nei vapori, perchè si può provar facilmente, che le molecole di questi non si toccano per nessun modo a differenza di quelle de' fluidi; e si può fino provare che vi è tal vapore, in cui le particelle sono delle centinaja di migliaja di volte più lontane, che in altri. L' acqua ridotta in vapore può occupare uno spazio 20000 volte maggiore di prima. Non è adunque straordinario, che i vapori si possano comprimere, giacchè non si ha da vincere in essi, che la sola forza sfiancante del calore.

Di qui si vede quanto sia precaria l'ipotesi di quei filosofi, i quali hanno immaginato una forza di *repulsione* nelle molecole de' vapori, solo perchè non sapevano spiegare altrimenti gli effetti di essi vapori. Costa poco al matematico l' immaginarsi delle forze in rapporto dei fenomeni medesimi, e di figurarsi che le une comincino ad operare dove le altre finiscono, e che passino da repulsive in attrattive, e da attrattive in repulsive secondo i bisogni. Ma prima d'ogni altro bisogna provare che tali forze veramente esistano in quelle date circostanze, e casi, e che sieno in un rapporto esatto cogli effetti che vogliamo spiegare. La forza adunque de' fluidi ridotti in vapore, come l'acqua, il mercurio..,.. deriva dalla materia del calore, che è assorbita da essi in quello stato, e non già dalla forza di repulsione per cangiate distanze di quelle impercettibili molecole. Cresce ne' vapori la forza all'aumentarsi del calore, e nel momento in cui cessa il calore corrono a ricomporre il corpo fluido di prima.

XVII.

Noi abbiamo esaminato i corpi solidi, i corpi fluidi, e i corpi sotto forma vaporosa, e si è cercato di accennar le cagioni dei loro differenti stati. Ora ci rimane di esaminare un' altra sorta di fluidi, che meritano una distinzione particolare, che forma in oggi uno de' più vasti rami della fisica delle arie, e delle operazioni chimiche più dilicate. Queste sostanze si presentano sotto forma di aria elastica, trasparente, compressibile, che il freddo e il caldo restringe e dilata, ma che non riducono a formare il fluido di prima.

XVIII.

Questi fluidi aeriformi si possono ridurre a tre classi principali, che hanno la proprietà comune di esser permanenti sul mercurio, ma non già quando sono a contatto dell' acqua, o di altre sostanze fluide. Altri sono assorbibili per intiero dall' acqua, altri solo in parte, ed altri non lo sono punto. I primi sono l' aria acida marina, l' aria acida vitriolica, l' aria alcalina, l' aria spatosa, e questi formano la prima classe. Nella seconda classe mettiamo l' aria fissa, che non è assorbita dall' acqua, che del suo proprio volume. Nella terza si dovrà collocare l' aria nitrosa, l' aria infiammabile, l' aria purissima, e l' aria detta flogisticata.

Conviene però riflettere, che questi fluidi aeriformi per rapporto alla sorbibilità coll' acqua non differiscono, che dal più al meno; perchè ho provato per esperienza, che anche i non assorbibili sono più o meno assorbiti, se si mettono in contatto dell' acqua privata della sua aria naturale; ed ho fino trovato con particolari esperienze, che sono assorbiti benissimo, se si tengono lungo tempo a contatto dell' acqua benchè saturata della sua aria naturale.

XIX.

Si è veduto che il calore riduce in vapori i fluidi, ma si è ancor veduto che appena cessato il calore ritornano i vapori a formare i fluidi di prima. Vi è adunque qualche altro principio oltre il calore, che rende permanenti nel freddo i fluidi aeriformi. Non è difficile di provare che questo principio è ciò, che i chimici chiamano flogisto, e che mille fenomeni di composizioni e decomposizioni di corpi ne dimostrano coll' ultima evidenza le sue proprietà, e l' esistenza.

XX.

Si può dimoſtrare, che le arie della prima claſſe contengono di quel principio, e che quanto più ne hanno diventano tanto meno aſſorbibili all' acqua, ma non ſono però ſaturate del tutto da eſſo, e conſervano ancora una parte della loro natura primitiva. La ſola aria nitroſa ſi può conſiderare per ſaturata dal flogiſto, cioè per l' acido nitroſo ſaturato da eſſo, giacchè non dimoſtra punto la ſua natura acida in quello ſtato, fuorchè nelle circoſtanze da me pubblicate nella mia opera ſull' *aria nitroſa*; e perchè l' aria nitroſa è ſaturata bene dal flogiſto, non è aſſorbibile dall'acqua. Laddove tutti gli altri mantengono ancora in parte almeno le loro primitive qualità, per cui hanno più attrazione coll' acqua che col flogiſto, onde quando ſono a contatto di eſſa ritornano fluidi come prima.

XXI.

L' aria fiſſa contiene del flogiſto ed un acido ſottiliſſimo e debole, e perciò è aſſorbita dall' acqua meno delle arie della prima claſſe, e più di quelle della terza.

XXII.

L' aria nitroſa è compoſta di flogiſto, e di acido nitroſo ſaturato perfettamente; onde s' intende ſubito perchè non ſia aſſorbita dall' acqua. Le altre arie di queſta ultima claſſe non ſono ancora ben conoſciute, onde poco o nulla ſi potrà pronunziare ſopra di eſſe.

XXIII.

L' aria inſiammabile ha ſicuramente il flogiſto per uno de' ſuoi componenti, ma nulla ſi può dire degli altri

altri componenti, che pur deve avere. L'aria infiammabile non s' infiamma mai sola, anzi spegne i lumi, e fino il carbone acceso; ma s' infiamma, e arde se è mescolata coll' aria comune. Conviene adunque considerarla per una sostanza combustibile come tutte le altre, ma più pura e più semplice della fiamma ordinaria degli altri corpi combustibili, che non ardono mai nè anco essi senza l' aria respirabile, o nel vuoto; nè forse altro arde, e s' infiamma ne' corpi, che l' infiammabile, o i componenti di essa aria, che si trovano dentro i corpi combustibili. La gran leggerezza dell' aria infiammabile farebbe credere, che fosse composta di qualche principio sottilissimo, ed asciutto, il quale non avesse alcuna affinità, o pochissima coll' acqua, ma che fosse incorporato bene col flogisto, talchè s' intenderebbe subito allora, perchè non è assorbibile dall' acqua. Ma non è facile d' immaginare tali esperienze, che ci decompongano quell' aria, e per cui si possa giudicare della natura de' suoi componenti. Ho intrapreso altre volte un simile travaglio, ma sono ancor lontano da poter pronunziare con sicurezza. Si cava comunemente cogli acidi, ma si può cavare ancora colle sostanze alcaline, e fino col solo fuoco dai metalli. Si dimostra che non esiste in essi sotto forma d' aria, perchè non si cava dal ferro coll' acido nitroso.

XXIV.

Il fuoco o la fiamma non è una pura operazione meccanica, come la maggior parte de' filosofi ha creduto fino a questi ultimi tempi. L' ostinazione di non volere usare nella spiegazione de' fenomeni naturali, che de' principj dedotti dalle più semplici leggi del moto, e degli urti conosciuti fra corpo e corpo, ha ritardato di quasi un secolo i progressi della fisica. Ma da poco in qua felicemente questa scienza ha ricevuto un' esten-

N

ſione, di cui non pareva nè anco capace, e queſta ſi deve alla ſola chimica, per cui due ſommi uomini meritano la più grande ſtima dalla poſterità i Sigg. *Bergman*, e *Scheele*.

La fiamma, o il corpo che brucia, è in uno ſtato di nuove decompoſizioni, e di nuove combinazioni, le quali variano all' infinito al variare della natura, e componenti dei corpi combuſtibili. Non ſi dà mai fiamma ſenz' aria, nè vi è altra aria per la fiamma, che l' aria reſpirabile. Da queſte moltiplici decompoſizioni ſi ſchiude la materia del calore; ed è molto veriſimile, che ſi ſchiuda allora, o ſi precipiti la materia, che forma la luce, la qual luce ſi diffonda rapidamente per tutto all' intorno, e renda viſibili i corpi. La luce terreſtre, o de' corpi combuſtibili è molto analoga alla luce ſolare, e rendono l' una e l' altra viſibili i corpi ſenza biſogno d' aria.

XXV.

La fiamma è adunque per me una operazione tutta chimica, in cui ſi fanno continuamente delle decompozioni, e compoſizioni fra l' aria pura dell' atmosfera, ed il flogiſto de' corpi combuſtibili. Nell' incontro delle materie combuſtibili coll' aria ſeguono mille modificazioni nuove relative alla diverſa natura de' corpi.

Per modificazione di ſoſtanze, e di corpi io non voglio altro intendere, che ſemplici decompoſizioni di corpi più compoſti, e compoſizioni di altri più ſemplici, non conoſcendo alcuna eſperienza, o fatto ſicuro e luminoſo nella ſiſica, nè in tutta la chimica, che un corpo abbia propriamente cangiato la ſua natura di prima in un' altra eſſenzialmente diverſa. Tali metamorfoſi ſi ſuppongono, è vero, continuamente da' filoſofi, che non hanno eſaminato come conveniva le genuine proprietà de' corpi, e che hanno preſo o un cangia-

mento apparente e accidentale de' corpi per un cangiamento della natura medesima del corpo, o quel che è peggio abusando della parola *cangiamento* hanno confuso i cangiamenti nati per diminuiti o accresciuti principj colla cangiata natura del corpo medesimo. All' uomo non è ancor dato, che scomporre un certo limitato numero di corpi composti in altri più semplici, e di ricomporne di nuovo un numero ancor minore de' primi; ed in questo il filosofo non fa altro, che secondar la natura, che tende a render più semplice il più composto, e più composto il più semplice.

XXVI.

La materia elettrica non è certamente un principio semplice, come una gran parte de' fisici ha creduto, ma è una vera fiamma, o sostanza in combustione. Si vede in fatti, che è sempre accompagnata da un forte odore, quasi direi di fosforo, e di zolfo. Si sa che si spegne nel vuoto perfetto, come si spengono tutte le altre fiamme, o corpi in combustione; non s' ignora più, che diminuisce le arie respirabili, come lo fanno tutte le arie flogistiche, e la fiamma stessa; tinge in rosso il tornasole, e precipita la calce in terra calcare, e cristalizza i sali caustici vegetabili quando si fa passare attraverso l' aria dentro cannelli di vetro anche col mezzo di conduttori d' argento purissimo. La luce dell' elettricità è poi in tutto simile a quella di tutte le altre fiamme, e rende anch' essa visibili i corpi senza bisogno d' aria, come lo fa ancora la luce solare. I tre risultati del tornasole, della calce, e de' sali caustici non si osservano mai facendo uso di aria flogisticata, e cessano nell' aria comune subito che ha acquistata la natura di aria flogisticata. Produce adunque l' elettricità sull' aria comune tutti quei medesimi effetti, che produce il flogisto ossia la fiamma attuale.

Ad un principio di vera fiamma io ho ancora riportato, fin da quando era in Londra, la luce che si osserva ne' fosfori; ed ho dato fin d' allora delle prove dirette di questa mia opinione, come si può leggere nelle opere pubblicate in quella città dai Signori *Wilson*, e *Kirwan*. In questa maniera non solo la elettricità, ma ancora le altre sostanze lucenti, come i fosfori, sarebbono ridotte ad un medesimo principio; talchè la famiglia de' corpi combustibili, ed infiammabili comprenderebbe un più gran numero di sostanze di prima. Si sa alla fine, che gli sforzi de' filosofi, e ciò che si chiama scienza de' corpi, non ad altro si riduce, che a generalizzare i fenomeni.

XXVII.

Ci resterebbe da esaminare l'aria pura detta ancora deflogisticata, che l'acqua non assorbe, ma della vera natura, e de' componenti di quest' aria non se ne fa motto, benchè se ne conoscano le proprietà principali, che la distinguono facilmente da tutte le altre arie.

Altri la credono pregnissima di flogisto, ed altri affatto priva di esso. Se non vi sono prove certe, che la dimostrano affatto priva di flogisto, molto meno ve ne sono, che la facciano credere ricca di quel principio. E' vero, che l'acqua non l'assorbe, ma oltredichè la più piccola quantità di flogisto potrebbe forse bastare a far tutto questo, l' altro suo componente, quando sia composta, potrebbe non avere alcuna attrazione coll' acqua, e non lasciarsi sciorre da essa. Tutto bensì concorre a far credere, che nell'aria deflogisticata si trovi una grandissima quantità di fuoco; essia della materia del calore, la quale unita agli altri componenti di essa aria rende ogni cosa inassorbibile all' acqua. Quest' aria avida di flogisto lo attrarrà da tutti que' corpi dove esso si trova, quando essi vi ab-

biano una minore affinità. Di qui si può spiegare, perchè decomponga l'aria nitrosa, e non l'aria infiammabile; basta che il flogisto prima vi sia unito con minor forza.

XXVIII.

L'aria detta flogisticata è ancor essa poco conosciuta, e molti la considerano per aria saturata dal flogisto, ed altri per povera molto di quel principio. Ella ha delle qualità molto diverse dall'aria infiammabile, perchè non s'infiamma nè anco allora, ch'è unita all'aria pura, e può fino spegnere i lumi. Nulla si può pronunciare della sua natura, e de' suoi componenti, e pare che sfugga qualunque analisi, o decomposizione.

XXIX.

Si è veduto che l'aria infiammabile è composta di flogisto, e che chiusa nelle bocce di cristallo d'Inghilterra rivivifica il vetro di piombo. Ma nulla di tutto questo fanno le due arie di sopra, cioè la deflogisticata, e la flogisticata, talchè nessun segno certo di esistenza di flogisto si può avere da esse, benchè poi sia vero che differiscono essenzialmente fra di loro quelle due arie, mantenendo una la vita e la fiamma, quando l'altra fa tutto l'opposto. La prima si lascia diminuire da tutti i processi flogistici, e l'altra da nessuno di essi, eccettuato il carbone spento nel mercurio, e raffreddato, che le diminuisce tutte, e distrugge.

XXX.

Finisco con una riflessione generale sull'elasticità dei fluidi Aeriformi, e le sue conseguenze. L'elasticità ne' fluidi permanenti diminuisce in ragione inversa degli

ſpazj occupati, oſſia la forza elaſtica in eſſi diventa tanto minore, quanto è maggiore lo ſpazio occupato da eſſi fluidi,

Non ſi vede chi potrebbe limitare queſta forza eſpanſiva dei fluidi aeriformi ſe non vi foſſe l' attrazione terreſtre, che agiſce ſopra ogni molecola più minima de' corpi, per cui tendono perpetuamente verſo la terra. L'aria atmosferica per eſempio potrebbe beniſſimo eſtenderſi fino alla luna, e riempiere gli ſpazj celeſti, ma l'attrazione ne fiſſa il limite, il quale deve trovarſi dove le molecole dell'aria ſono attratte dalla terra con tanta forza con quanta tendono in virtù della loro a diſcoſtarſi fra di loro, e ad eſpanderſi.

Il calcolo potrebbe facilmente determinare queſto limite nelle due ipoteſi fatte da noi, e il problema potrebbe eſſere ſuſcettibile di qualche preciſione fiſica. Si potrebbe ancora tener conto della forza centrifuga cagionata dalla rotazione della terra nelle particelle dell' aria: il calore non può alterare ſenſibilmente le leggi della elaſticità, perchè è minimo ed uniforme alle più grandi diſtanze, nè i vapori arrivano mai così in alto.

La forza eſpanſiva dell' aria comune va conſiderata come una forza, che non ceſſa mai affatto, benchè diminuiſca rapidamente, come ſi è detto. Si potrà adunque conſiderare come minima, o infinitamente piccola nelle maſſime dilatazioni dell'aria. Nell' ipoteſi che le molecole dell'aria non foſſero attratte dalla terra, l'atmosfera non potrebbe eſercitare alcuna preſſione ſenſibile ſopra i corpi, che ſono ſulla ſuperficie della terra medeſima; talchè l'aria in quanto elaſtica neſſun effetto ſenſibile potrebbe produrre contro i corpi ſottopoſti. Ma nel momento che ſi vorrà ſupporre, che l'aria ſia attratta dalla terra, come lo è infatti, ogni ſtrato minimo d'aria peſerà ſull' altro, che le è ſotto, talchè gli ſtrati più baſſi ſaranno i più premuti, e i più ela-

ſtici, e l'elaſticità e la gravità ſaranno nel medeſimo rapporto.

E' adunque la gravità dell'aria e non la ſua elaſticità la primitiva cagione, per cui l'atmosfera ha un limite, e per cui preme ſopra la ſuperficie della terra; nella ſteſſa maniera che una ſerie di elaſtri collocati gli uni ſopra degli altri premerebbono contro i corpi ſottopoſti in ragione del loro numero, e per la ſola forza del loro peſo, benchè poi foſſe vero, che la loro elaſticità ſarebbe in proporzione dei loro medeſimi peſi.

Non è ora più difficile di vedere quel che ſarebbe il calore, o qualunque altro agente, che s' inſinuaſſe fra queſti elaſtri, e come ſi devono ſpiegare le alterazioni accidentali cagionate nell'atmosfera.

ARTICOLO

Di Lettera scritta DAL MEDESIMO al Fratello Pubblico Professore di Matematica nell' Università di Pavia.

Sopra la Luce, la Fiamma, il Calore, e il Flogisto.

FInisco col mandarvi alcuni miei pensieri, relativi alla luce, alla fiamma, al calore, ed al flogisto, che i filosofi confondono più, o meno, e modificano, seguendo ciascuno le idee che sen'è formate, e le ipotesi che ha abbracciato.

Io ho voluto qui considerare que' quattro agenti, come sostanze diverse tra di loro; e finchè il fisico sperimentatore non arriverà a dimostrare la loro vera composizione, e natura, son di parere che si debbano valutare per differenti fra loro, e per semplici nel temdo medesimo. Non già, perchè sia impossibile che la cosa sia anco diversamente; ma perchè non è permesso di fingere delle composizioni, dove non si veggono, nè delle modificazioni semplici, dove gli effetti sono diversi, e spesso opposti.

Questa diversità di effetti è quella principalmente, che mi ha fatto considerar quelle sostanze per diverse tra loro, appoggiato al principio ricevuto, e certo nella fisica, che se gli effetti sono diversi, diverse devono essere anco le cause, quando non costi del contrario. Io non farò, che accennare le principali qualità di quegli esseri.

LUCE

Luce.

I.

La luce ſolare fa ſchiudere dalle piante meſſe nell' acqua aria puriſſima, detta deflogiſticata.

II.

La luce ſolare, anche allora che è privata di calore, cioè, che ſi fa agire come ſola luce, ſchiude dalle piante la medeſima aria puriſſima.

III.

La luce ſolare paſſa in iſtante attraverſo le lamine di vetro, e nell' iſtante riſcalda i corpi meſſi dietro ad eſſe.

IV.

La luce ſolare non fa detuonare il nitro, non produce l' acido zolfuroſo volatile, non rivivifica le ordinarie calci metalliche, almeno cogli ordinarj metodi praticati finora.

V.

La luce ſolare non riſcalda i corpi più traſparenti, e più ſottili, come l' aria, le lamine di criſtallo.

VI.

La luce ſolare appena riſcalda i corpi bianchi, ed opachi.

VII.

La luce ſolare non riſcalda, che que' corpi, in cui ſi è arreſtata.

FIAMMA.

I.

La fiamma anche accreſciuta, e comunque lucida, fa ſchiudere dalle piante aria mefitica, aria flogiſticata.

II.

La fiamma paſſa, come la luce, in iſtante attraverſo il criſtallo, ma non riſcalda i corpi collocati dietro del criſtallo, che molto tardi.

III.

La fiamma immediatamente applicata alle calci metalliche le rivivifica.

IV.

La fiamma riſcalda anche i corpi più traſparenti, e li fonde ſubito.

V.

La fiamma, applicata eſteriormente ai matracci di criſtallo, non rivivifica le calci metalliche comuni.

CALORE.

I.

Il calore tanto ſolare, che terreſtre, ſchiude dalle piante aria flogiſticata.

II.

Il calore non rivivifica in metallo le ordinarie calci, non fa detuonare il nitro, non produce l'acido zolfuroſo volatile.

III.

Il calore eſclude dai corpi il flogiſto, o ne diminuiſce la quantità, come par provato dalle ſperienze più moderne fatte in Inghilterra.

IV.

Il calore penetra tutti i corpi, comunque opachi, e duri, e li fonde.

FLOGISTO.

I.

Il flogiſto eſclude dai corpi il calore, o ne diminuiſce la quantità, come appare dalle moderne dottrine.

II.

Il flogiſto non paſſa attraverſo il vetro a rivivificar le calci metalliche.

I corpi meſſi nel vuoto, dentro recipienti di criſtallo, poſſono eſſere illuminati, tanto dalla luce ſolare, che dalla luce terreſtre, o fiamma. I corpi poi lucenti, o infiammati, non danno più luce meſſi nel vuoto; dunque l' aria è neceſſaria a render lucenti quei corpi, ma non già a render viſibili a noi i corpi collocati dentro il vuoto, quando ſi getti ſopra di eſſi la luce eſterna dei corpi lucenti nel pieno. Pare dalle ultime eſperienze de' fiſici, che fino la elettricità medeſima nel vuoto ſubiſca le ſteſſe leggi, perchè ſpariſce quando il vuoto è perfetto. Il che ſempre più ci aſſicura, che i corpi lucenti ſono in uno ſtato di accenſione, come l'ho io dimoſtrato di diverſi fosfori; ma la luce, che ſi manifeſta allora, ſegue le conoſciute leggi della luce ſolare, quando ſi fa cadere ſopra i corpi, e ſi riflette da eſſi.

Da tutto quello, che abbiamo rilevato ſopra, ſi vede, che la luce ſolare non conviene in tutto nè anco colla luce della fiamma, o terreſtre. 1. Perchè la prima fa ſchiuder dalle piante aria deflogiſticata, e l'altra aria mefitica. 2. Perchè la prima riſcalda i corpi in iſtanti, e l'altra molto più tardi. 3. Perchè la prima non fa detuonare il nitro, non rivivifica le calci metalliche, non rende l'olio di vitriolo acido zolfuroſo volatile all'oppoſto della fiamma. 4. Perchè la luce ſolare non riſcalda i corpi traſparenti, che riſcalda la fiamma. 5. Perchè la luce ſolare non riſcalda, che poco, e tardi i corpi opachi, bianchi, al contrario della fiamma.

Il calore non è nè luce, nè fiamma, nè flogiſto; non è luce, perchè penetra tutti i corpi, che la luce non penetra; non è nè fiamma, nè flogiſto, perchè non rivivifica le calci metalliche, non fa detuonare il nitro ....

Il flogiſto non è il calore, perchè non penetra tutti i corpi, come fa il calore, e perchè eſclude il calore de' corpi medeſimi.

Siccome abbiamo osservato delle diversità reali di effetti provenienti dalle quattro sostanze seguenti, *Luce*, *Fiamma*, *Calore*, e *Flogisto*, e nulla conosciamo ancora della vera natura di esse; vi è tanto che basta, perchè il filosofo osservatore debba considerarle come semplici, e come differenti tra loro, e perchè debba servirsene, come di principj, per ispiegare gli effetti, che sono subordinati ad esse sostanze: e così infatti facciamo, parlando degli acidi, benchè forse sieno composti, e risultino dalla modificazione di un acido solo. Sopra di questi principj il famoso *Bergman* sommo chimico, e grandissimo fisico, ha stabilito le sue cinque terre elementari primitive, che spargono tanto lume in tutta la fisica, e la storia naturale, poco curandosi, se in lor medesime sieno poi semplici, o sieno una modificazione di una sola di esse, o di più. Questa, qualunque ella sia, è la sola via che ci resta per internarci nella scienza de' corpi, e per tenerci lontano dalle illusioni, e dalle ipotesi.

Nella supposizione poi, che la materia primitiva dei corpi fosse omogenea, non ne seguirebbe per questo, che noi non dovessimo cercar di conoscere le proprietà di essa, quando è modificata in modo, da costituire delle diverse sostanze; che anzi nella sola conoscenza delle proprietà di queste sostanze diverse consisterebbe la scienza de' corpi, e la conoscenza delle cause, e de' fenomeni naturali.

Da tutte le cose dette fin qui, par che si possano considerare quelle quattro sostanze, o agenti, come principj semplici, e differenti fra di essi. Ma non ne segue già da tutto questo, che due, o più di essi non possano formarne un solo. E' vero, che in quest' ipotesi non sarebbono più nè semplici, nè quattro, ma andavano dal filosofo considerati come tali prima di trovarne i componenti. Una volta poi, che questi componenti si sieno trovati, si deve rettificar l'ipotesi, e

diminuire il numero di essi a proporzione di quelli, che ci mostrerà l'esperienza.

Se si potesse dimostrare, come lo pensavano i chimici Svezzesi, che il calore è fatto di aria pura, e di flogisto, il calore non andrebbe più considerato come un principio semplice, ma bensì come un composto di due principj, di cui conosciamo alcune delle principali proprietà. Così, se si proverà, che la luce non è che il calore sopraccaricato di flogisto, allora si dirà, che la luce non è più un principio semplice, ma che è fatto di tre altri principj, talchè la fiamma per esempio si dovrà considerare come fatta di calore, e di flogisto, unita ad altri corpi eterogenei, di cui sono formati i corpi combustibili.

La luce solare, anche solo considerata in quanto luce, e non punto considerato il suo calore, sarebbe sempre accompagnata da qualche quantità di flogisto. Il famoso *Scheele* ha dimostrato il primo, che la luce solare rivivifica alla lunga la luna cornea, ed il nitro lunare; ma nulla di questo si ottiene col solo calor solare, nessuna rivivificazione si osserva di quelle calci. Così il medesimo filosofo ha scoperto, che l'acido nitroso, chiuso dentro di una boccia, ed esposto alla luce del sole, si flogistica benissimo; ma non si flogistica punto, se si espone al solo calor della luce.

Nè si creda già, che queste qualità trovate nella luce solare siano contraddette affatto dai fenomeni del §. IV, perchè le circostanze sono molto diverse, ed applicando più lungamente la luce a quelle sostanze, si arriverebbe forse a provare, che non è poi priva affatto di flogisto. Là si è voluto escludere l'ipotesi d'un flogisto abbondante, e qui si è voluto far vedere, che non ne è poi priva interamente.

SOPRA LA MISURA
DELLA LUCE IN GENERALE;
E sopra l' illuminazione de' varj segmenti del Disco Solare tagliati dall' orizzonte nel tempo del nascere e tramontare del Sole.

Del P. GREGORIO FONTANA Delle Scuole Pie Professore di Matematica sublime nell' Università di Pavia.

NIuno de' Fisico-Matematici prima del 1760, in cui comparvero alla luce le due opere insigni, una di *Bouguer* intitolata *Traitè d' Optique sur la gradation de la lumiere*, l' altra di *Lambert* col titolo *Photometria, sive de mensura & gradibus luminis*, avea sospettato, che nel misurare la quantità relativa della luce che da un corpo o per sestesso luminoso, o altronde irradiato viene tramandata sopra un dato punto, o picciolo spazio da illuminarsi, dovesse tenersi conto di quell' angolo, che formano i raggi colla superficie del corpo da cui partono. Eppure un' osservazione non difficile a farsi dovea far credere, che il predetto *angolo di emanazione* è un elemento indispensabile per calcolar giustamente la misura della luce. Rimirando il disco solare con un elioscopio si veggono tutti i punti del disco ugualmente chiari e brillanti, nè si scorge differenza sensibile fra lo splendore delle parti più vicine al centro, e delle parti più lontane, cosicchè il centro stesso ed il lembo non presentano all' occhio alcun divario in ordine alla loro lucidità. Da questa uguale distribuzione di lucidezza in tutte le parti del disco solare si deduce speditamente la conseguenza,

che le varie quantità di luce versate sopra una data superficie dai diversi punti d'un corpo raggiante seguitano, in parità di tutte le altre cose, la ragione de' seni degli angoli di emanazione. Imperciocchè rappresenti il circolo *AFBI* (*fig.* 1) il disco del sole; e prendasi il semicircolo *APB* perpendicolare al disco per rappresentare la convessità del corpo solare rivolta allo spettatore, che si suppone situato ad una distanza immensa in direzione del semidiametro *CP* perpendicolare ad *AB*, e dividente per metà il semicircolo *APB*. Le particelle *Pp*, *Mm*, *Ee* della superficie convessa del sole compariscono uguali allo spettatore ogni qual volta le loro projezioni ortografiche *Cc*, *Nn*, *Dd* risultano eguali; nè queste riescono uguali, se quelle non crescono in ragione inversa delle rispettive ordinate *PC*, *MN*, *ED*, come è noto per la proprietà del cerchio. Se vuolsi adunque (come prima di *Lambert*, e *Bouguer* da tutti si supponeva), che qualsivoglia punto della superficie convessa del sole tramandi all' occhio dello spettatore sulla terra la stessa copia di raggi, qualunque sia la posizione di tal punto sul globo solare rispettivamente all' occhio, e se perciò la quantità di luce, che viene all' occhio da una parte qualunque di detta superficie, cresce in proporzione della grandezza di quella parte, ne nascerà la conseguenza, che le projezioni ortografiche uguali *Cc*, *Nn*, *Dd*, cioè le varie parti del disco rimirate d'in sulla terra, dovranno comparire tanto più lucide e chiare, quanto più saranno discoste dal centro *C* del disco, e ciò in ragione inversa delle ordinate rispettive, e così le parti vicine al lembo, e tutto il lembo medesimo dovranno mandare uno splendore infinito, divenendo quasi appunto infinito quel rapporto. E poichè questo è visibilmente assurdo, ed è anzi noto per esperienza, che le suddette parti *Cc*, *Nn*, *Dd* del disco gettano un egual chiarore, nè punto si osserva che una sia più o meno lucida dell'

dell' altra; quindi si scuopre evidentemente falso il principio, che da ciascun punto della superficie solare l'occhio dello spettatore riceva lo stesso numero di raggi; ed è poi agevole l' inferire, che il numero di tali raggi è proporzionale al seno dell' angolo, che essi formano, nell' uscire, colla superficie del sole. In fatti l' illuminazione delle parti *Pp*, *Mm*, *Ee* della superficie solare vedute dallo spettatore in *Cc*, *Nn*, *Dd* sul disco è in ragione composta della grandezza di tali parti convesse, e del numero de' raggi, che l' occhio riceve da ciascun punto di quelle. Se adunque compajono ugualmente illuminate, come si è detto, quella ragione composta sarà una ragione di ugualità, che è quanto dire, la grandezza di dette parti sarà inversamente come il numero de' raggi vibrati all' occhio da ciascun punto in esse assunto, e conseguentemente sarà un tal numero in ragione diretta delle ordinate corrispondenti. Ma queste ordinate sono anche come i seni degli angoli *CPp*, *NMm*, *DEe* conforme richiede la natura del cerchio, i quali angoli sono appunto formati dai raggi emananti *CP*, *NM*, *DE* dalla superficie convessa del sole; perciò si fa manifesto, che il numero de' raggi lanciati all' occhio dello spettatore da ciascun punto della superficie solare seguita la ragione semplice diretta del seno dell' angolo di emanazione. Il *Bouguer* assume una tal ragione un poco maggiore della semplice, perchè da un' osservazione gli parve di poter inferire, che le parti del disco solare compajono meno luminose quanto più son lontane dal centro; sebbene egli stesso confessa, che quell' osservazione avrebbe avuto bisogno di essere più spesso che egli non fece ripetuta.

Per riguardo a que' corpi, che riflettono il lume ricevuto, hassi un riscontro di questa legge dell' angolo di emanazione nell' osservazione ovvia e comune, che se in un muro ben imbiancato, poco prima del nasce-

re o poco dopo del tramontare del ſole, ſi fiſſa coll' occhio una piccola parte tinta d' altro colore, e ſi rimira da qualunque punto della circonferenza d' un cerchio, che ha per centro la ſteſſa parte, queſta ſi vede ſempre chiara ed illuminata egualmente; il che non può accadere ſenza che la quantità di luce riflettuta da eſſa nell' occhio vada creſcendo nella ragione del ſeno dell' angolo fatto da' raggi rifleſſi colla ſuperficie riflettente, vale a dire dell' angolo di emanazione. Per rettificare queſta oſſervazione troppo groſſolana, e ridurla ad un' eſattezza baſtante, il *Lambert* immaginò il ſeguente ingegnoſo eſperimento. Due piani *AB*, *BC* (*fig.* 2) uniti ſotto l' angolo *ABC* vengono irradiati da un lume collocato in *O* ad ugual diſtanza dai piani per modo, che eſſendo uguali le perpendicolari *OI*, *OP*, ſieno pure uguali le quattro *BI*, *IA*, *BP*, *PC*, e queſte inoltre ſieno molto picciole in paragone delle diſtanze *OI*, *OP*. In tali circoſtanze egli è evidente, che i piani *AB*, *BC* rimarranno illuminati egualmente, e ciaſcun punto riceverà ſenſibilmente lo ſteſſo numero di raggi. Ciò fatto ſi collochi in *E* una lente *FG*, la quale rifranga le immagini *ba*, *bc* dei piani ſopra una ſuperficie data *LM* poſta dietro la lente. Oſſervate attentamente le immagini *ba*, *bc* ſi trovano egualmente illuminate, nè ſi ſcorge veruna diverſità fra l' una e l' altra nel grado d' illuminazione; e queſto ſempre ſi eſperimenta comunque ſi cangi la ſituazione della lente, e comunque vadano variando gli angoli *ABE*, *CBE*. Guidiſi *CN* perpendicolare a *BE*, e ſia *AB* normale a *BE* e parallela ad *LM*, e ſi piglino *BA*, *BC* molto picciole in confronto di *AE*, *BE*, *CE*, affinchè tutti i raggi mandati da *AB* alla lente partano ſotto lo ſteſſo angolo a un di preſſo, e ſotto uno ſteſſo angolo anche i raggi che vanno da *BC* alla lente. Ora i triangoli ſimili *ABE*, *abE*, *CNE*, *bcE* danno le ſeguenti analogie $AB : ab :: BE : bE$, $CN : bc :: NE : bE$;

e poichè per la picciolezza di CB in paragone di BE diventa proſſimamente $NE = BE$, la ragione di $AB : ab$ ſarà la ſteſſa che di $CN : bc$. Laonde $ab : bc :: AB : CN :: BC : CN :: BC : BC$ ſen. $CBN :: 1 :$ ſen. CBN. Ma l' eſperimento dimoſtra che le due immagini ab, bc ſono ugualmente chiare e luminoſe, e che queſta chiarezza è uniformemente diffuſa ſu ciaſcun punto; ſarà dunque la quantità di luce ſparſa ſull' immagine ab a quella ſparſa ſu bc come la grandezza di ab alla grandezza di bc, cioè come il ſeno tutto al ſeno dell' angolo CBN. Di qui appariſce, che la quantità di luce riflettuta dai piani AB, BC ſulla lente FG ſeguita la ragione dei ſeni degli angoli di emanazione. E così l' eſperienza dimoſtra, che una ſiffatta legge ha luogo non meno ne' corpi luminoſi per sè ſteſſi, che in quelli che tramandano la luce ricevuta dai primi.

Reſta ora a vedere ſe queſto nuovo elemento introdotto nel calcolo, dove ſi tratta di determinare la quantità della luce vibrata da un corpo raggiante ſopra una data ſuperficie, partoriſca de' riſultati diverſi da quelli, che ſi ottengono nell' ordinaria ipoteſi, in cui tal elemento ſi traſcura. Ciò ſi rende tanto più neceſſario da che il Sig. *Euler* nelle *Memorie dell' Accademia di Berlino* ſembra determinato a credere, che i problemi riguardanti la miſura della luce diano i medeſimi riſultati, ſia che vogliaſi nel calcolo tener conto dell' angolo di emanazione, ſia che voglia traſcurarſi. Per mettere alla prova queſto penſamento di sì gran Geometra, io ſcelgo a tal effetto il Problema cardinale di queſta ſcienza, cioè di *ritrovare l' illuminazione perpendicolare prodotta in una ſuperficie piana infinitamente picciola da una sfera raggiante*.

Inerendo adunque in primo luogo all' ipoteſi ordinaria io procedo nel modo ſeguente: la figura $ORMS$ (*fig.* 3.) rappreſenta una sfera luminoſa o raggiante, il di cui ſemidiametro $CR = r$; Pp rappreſenta la ſuper-

ficie piana infinitesima in ambedue le dimensioni, che viene illuminata dalla sfera, ed è distante dal centro di lei per $PC = a$. Il segmento sferico illuminatore circoscritto dalle tangenti PR, PS è RES; finalmente $NMmn$ è una zona infinitamente piccola compresa fralle circonferenze di due cerchj paralleli normali all' asse PC. Ora posto l' angolo $MCE = \varphi$ si ha la superficie di detta zona $= 2\pi r^2 d\varphi$ sen. φ (prendendo $1 : \pi$ pel rapporto del diametro alla periferia), ed MP $= \sqrt{(r^2 + a^2 - 2ra \text{ cos}. \varphi)}$. L' angolo d' incidenza MPp de' raggi vibrati dalla zona sul piano infinitesimo Pp è $= PMB$, e questo ha per suo seno $\frac{PB}{PM}$

$$= \frac{a - r \text{ cos}.\varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos}. \varphi)}}, \text{ e per coseno } \frac{BM}{PM}$$

$$= \frac{r \text{ sen}.\varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos}.\varphi)}}.$$ Essendo pertanto l' illuminazione in Pp in ragion composta della zona $NMmn$ illuminatrice, del seno dell' angolo d' incidenza, e del quadrato inverso della distanza, risulterà la predetta illuminazione $= \frac{2I\pi r^2 d\varphi \text{ sen}.\varphi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos}.\varphi} \times \frac{a - r \text{ cos}.\varphi}{\sqrt{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos}.\varphi)}}$ prendendo per I l' unità d' illuminazione.

Per più facilmente integrare la formola $\frac{2I\pi r^2 (a - r \text{ cos}. \varphi) d\varphi \text{ sen}. \varphi}{(r^2 + a^2 - 2ar \text{ cos}.\varphi)^{3:2}}$, onde conseguire la misura dell' illuminazione del segmento sferico indefinito NEM, assumo cos. $\varphi = x$, e l' illuminazione elementare di tal segmento si trasforma in $\frac{-2I\pi r^2 (a - rx) dx}{(a^2 + r^2 - 2rax)^{3:2}}$. A questa formola più semplice applicando le note regole d' integrazione si ritrova senza pena, che il di lei integrale è $= \frac{2I\pi r^2 (r - ax)}{a^2 \sqrt{(r^2 + a^2 - 2rax)}} +$ cost. E siccome si annulla

l' illuminazione all' annullarsi dell' angolo φ, ovvero quando cos. $\varphi = x = 1$, si raccoglie quindi cost.

$$= \frac{-2I\pi r^2(r-a)}{a^2\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}} = \frac{2I\pi r^2}{a^2},$$ prendendo pel valore di $\sqrt{(r^2+a^2-2ra)}$ la quantità $a-r$ piuttosto che $r-a$, perchè altrimenti risulterebbe negativa la quantità d' illuminazione, che sarebbe assurdo. Dunque l' illuminazione eccitata nel piano Pp dal segmento raggiante indefinito NEM è $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}\left(1 + \frac{r-ax}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}\right)$, e posto l'angolo $\varphi = ECS$, e perciò cos. $\varphi = x = \frac{r}{a}$ nasce l' intera illuminazione generata dal segmento proposto RES $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc.

Cerco ora nell' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* una siffatta illuminazione, e per ottener questo non si ha che a moltiplicare l' illuminazione precedentemente trovata della zona pel seno dell' angolo di emanazione PMF fatto dalla tangente MF, e dal raggio emanante MP. Quest' angolo è $= PMB - FMB = PMB - ECM$; quindi sen. $PMF =$ sen. PMB cos. $ECM -$ sen. ECM cos. $PMB = \frac{(a - r \text{ cos.}\varphi)\text{cos.}\varphi - r \text{ sen.}\varphi^2}{\sqrt{(r^2+a^2-2ra \text{ cos.}\varphi)}} = \frac{a \text{ cos.}\varphi - r}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra \text{ cos.}\varphi)}}$ $= \frac{ax-r}{\sqrt{(a^2+r^2-2rax)}}$, il quale moltiplicato per $\frac{-2I\pi r^2(a-rx)dx}{(a^2+r^2-2rax)^{3:2}}$ somministra nell' ipotesi di *Lambert* l' illuminazione prodotta dalla zona $= \frac{2I\pi r^2(a-rx)(r-ax)dx}{(a^2+r^2-2rax)^2}$. Cercando l' integrale di questa espressione si trova senza difficoltà

$\frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)}\right) +$ coſt., il quale dovendo ſparire quando $x = 1$, diventa coſt.
$= \left(\frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r-a)^2} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a} = \left(\frac{(r+a)^2}{2ra} - 1\right)\frac{I\pi r}{2a}$
$= \left(\frac{r^2+a^2}{2ra}\right)\frac{I\pi r}{2a}$. Dunque l' illuminazione prodotta dal ſegmento sferico indeterminato è
$= \frac{I\pi r}{2a}\left(x - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(r^2+a^2-2rax)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$; e poſto
$x = \frac{r}{a}$, riſulta la totale illuminazione prodotta dall' intero ſegmento $RES = \frac{I\pi r}{2a}\left(\frac{r}{a} - \frac{(r^2-a^2)^2}{2ra(a^2-r^2)} + \frac{r^2+a^2}{2ra}\right)$
$= \frac{I\pi r}{2a} \times \frac{2r}{a} = \frac{I\pi r^2}{a^2}$. Il che era ecc. Di qui ſi vede che la quantità dell' illuminazione calcolata ſecondo l' ordinaria ipoteſi è doppia di quella, che ſi ricava dall' ipoteſi di *Lambert*. Il che dà a divedere di qual importanza ſia in tutta la ſcienza della *miſura della luce* di preliminarmente ſtabilire l' una o l' altra ipoteſi, giacchè in uno de' più ſolenni e fondamentali Problemi di queſta ſcienza s' incontrano nelle due ipoteſi riſultati tanto differenti e diſcordi, che baſterebbono a ſpargervi il più ragionevole pirroniſmo.

Paſſo ora ad un altro Problema intereſſante e curioſo. Suppongo un punto P (*fig.* 4) ſituato nella cavità d' una ſuperficie sferica raggiante al di dentro, cioè che tramanda da tutti i ſuoi punti la luce verſo la cavità; e tale ſuperficie sferica ſia BMN. Pel punto P da illuminarſi guido il diametro BF, e perpendicolari ad eſſo diametro conduco due cerchj paralleli infinitamente proſſimi MN, mn, che ſegnano nella ſuperficie sferica

la zona elementare $MNnm$, e tirando il raggio CM, la retta PM, e la tangente MR, faccio $CM = r$, $CP = a$, l'angolo $MCF = \phi$. Quindi feguitando i paffi medefimi che dinanzi, fi ritrova $PM^2 = a^2 + r^2 - 2ra$ cof. ϕ, la zona $MNnm = 2r^2 \pi d\phi$ fen. ϕ (efprimendo $1 : \phi$ il rapporto del diametro alla periferia circolare); e però chiamando I l' unità d'illuminazione, farà l'illuminazione prodotta dalla zona $MNnm$ nel punto P $= \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ fen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cof.} \phi}$; confeguentemente l' illuminazione prodotta dalla fuperficie sferica indefinita MFN farà $= \int \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ fen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cof. } \phi} = \frac{I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2+r^2 - 2ar \text{ cof. } \phi)$ $+$ coft. E perchè fi annulla coll' angolo ϕ anche l'illuminazione, nafce perciò coft. $= \frac{-I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2+r^2-2ar)$ $= \frac{-2I\pi r}{a} \text{ log. } (r-a)$. Dunque l' illuminazione predetta è $= \frac{I\pi r}{a} \text{ log. } (a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \phi) - \frac{2I\pi r}{a} \times \text{ log. }$ $(r-a)$. Se ora fi piglia $\phi = 180°$, fi ottiene l' illuminazione eccitata nel dato punto P da tutta la sferica fuperficie $= \frac{2I\pi r}{a} \text{ log. } \frac{a+r}{r-a}$.

Introduco ora nel calcolo fecondo l'altra ipotefi di *Lambert* l'angolo di emanazione PMR moltiplicando pel feno di queft' angolo l'efpreffione dianzi trovata $\frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ fen. } \phi}{r^2+a^2-2ar \text{ cof.} \phi}$. A tal effetto offervo, che queft' angolo PMR è $= PMO + OMR = PMO + \phi$; e quindi fen. $PMR =$ fen. PMO cof. $\phi +$ cof. PMO fen. ϕ. E poichè fen. $PMO = \frac{PO}{PM} = \frac{CO-CP}{PM} = \frac{r \text{ cof. } \phi - a}{\sqrt{(a^2+r^2-2ra \text{ cof.} \phi)}}$,

e cos. $PMO = \frac{MO}{PM} = \frac{r \text{ sen. } \phi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cos. } \phi)}}$, sarà sen.

$$PMR = \frac{(r \text{ cos.}\phi - a) \text{ cos.}\phi + r \text{ sen.}\phi^2}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{ cos. } \phi)}} = \frac{r - a \text{ cos. } \phi}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\text{cos.}\phi)}}.$$

Laonde sarà l' illuminazione prodotta nel punto P dalla zona elementare nell' ipotesi di *Lambert*

$$= \frac{2I\pi r^2 d\phi \text{ sen. } \phi \, (r - a \text{ cos. } \phi)}{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.}\phi)^{3:2}} = \frac{2I\pi r^3 d\phi \text{ sen.}\phi}{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.}\phi)^{3:2}}$$

$$- \frac{2I\pi ar^2 d\phi \text{ sen.}\phi \text{ cos.}\phi}{(a^2+r^2-2ar \text{ cos.}\phi)^{3:2}}.$$

Passando ora all' integrazione di questi due termini si vede subito, che l'integrale del primo è $= \frac{-2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar\text{cos.}\varphi)}}$.
Per ritrovare l' integrale del secondo termine piglio $x = \text{cos. } \varphi$, e quel termine si cangia in $\frac{2I\pi ar^2 x dx}{(a^2+r^2-2arx)^{3:2}}$.
Prendo inoltre $y = a^2 + r^2 - 2arx$, e il detto termine si trasforma di nuovo in $\frac{-2I\pi ar^2 \left(\frac{a^2+r^2-y}{2ar}\right)\frac{dy}{2ar}}{y^{3:2}}$

$= \frac{-I\pi(a^2+r^2)dy}{2ay^{3:2}} + \frac{I\pi dy}{2a\sqrt{y}}$, il di cui integrale è visibilmente $\frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{y}} + \frac{I\pi\sqrt{y}}{a} = \frac{I\pi(a^2+r^2)}{a\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}}$
$+ \frac{I\pi}{a}\sqrt{(a^2+r^2-2arx)}$, a cui aggiungendo l' integrale dianzi trovato $- \frac{2I\pi r^2}{a\sqrt{(a^2+r^2-2ar \text{ cos. } \varphi)}}$, e riducendo al medesimo denominatore tutti i termini, si ottiene finalmente l' illuminazione eccitata dalla superficie indeterminata

minata $MFN = -\frac{2I\pi(a-r\,\text{cof.}\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{cof.}\varphi)}} + \text{coft.}$ Per ritrovare la coftante bafta riflettere, che l'illuminazione fvanifce infieme coll'angolo φ, il che dà $\text{coft.} = \frac{-2I\pi(a-r)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}}$ $= 2I\pi$ prendendo per $\sqrt{(a^2+r^2-2ar)}$ il valore $r-a$ piuttofto che $a-r$. Dunque la predetta illuminazione è $= 2I\pi + \frac{2I\pi(a-r\,\text{cof.}\varphi)}{\sqrt{(a^2+r^2-2ar\,\text{cof.}\varphi)}}$. Se pertanto in queft' equazione fi affume $\varphi = 180°$, e però $\text{cof.}\,\varphi = -1$, egli è manifefto, che allora dee rifultare la quantità dell'illuminazione prodotta nel dato punto dall'intera fuperficie sferica. Dunque una fiffatta illuminazione è $2I\pi + \frac{2I\pi(a+r)}{a+r} = 4I\pi$. Di qui fi raccoglie un Teorema molto fingolare e inafpettato, non fo fe da altri avvertito, che *una fuperficie sferica raggiante, comunque fia piccola o grande, produce la medefima illuminazione in un punto dovunque fituato dentro la cavità; e tale illuminazione non è altro che quella, che fi prende per unità, moltiplicata per quattro volte il rapporto della periferia circolare al diametro*. Per altro quefto Teorema fi prefenta immantinente allo fpirito, qualora il punto dato fia collocato nel centro della sfera cava, effendo evidente, che allora l'illuminazione in effo eccitata debb'effere uguale al prodotto dell'unità d'illuminazione moltiplicata per la fuperficie sferica, e divifa pel quadrato della diftanza, cioè del femidiametro, il che dà appunto $4I\pi$, come prefcrive il Teorema.

Confrontando pertanto l'efpreffione $\frac{2I\pi r}{a}\log.\frac{a+r}{r-a}$ ricavata nell'ordinaria ipotefi Euleriana coll'efpreffione $4I\pi$ avutafi dall'ipotefi di *Lambert*, fi conofce qual infigne divario producano ne' rifultati quefte due ipotefi,

le quali nel ſolo caſo, che il punto irradiato ſia ſituato nel centro della sferica cavità, conducono sì l'una che l'altra a ritrovare la medeſima illuminazione. Imperciocchè ſebbene in tal caſo l'eſpreſſione $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\frac{a+r}{r-a}$ diventi eguale alla quantità indeterminata e vaga $\frac{0}{0}$, ſe per evitare queſto valore indeterminato ſi ſuppone a infiniteſimo, ſi trova $\frac{r+a}{r-a} = 1 + \frac{2a}{r}$ traſcurando i termini, che contengono le potenze di a. Dunque $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\frac{r+a}{r-a} = \frac{2I\pi r}{a}$ log. $\left(1 + \frac{2a}{r}\right)$, e ſiccome log. $\left(1+\frac{2a}{r}\right)$ $= \frac{2a}{r}$, diſprezzati gli altri termini come dianzi, perciò naſce $\frac{2I\pi r}{a}$ log. $\left(1 + \frac{2a}{r}\right) = 4I\pi$, come appunto ſi è trovato nell'ipoteſi di *Lambert*, e come eſſer doveva per la natura della coſa col puro diſcorſo metafiſico.

E qui parmi di ſcorgere un inconveniente nell'ipoteſi Euleriana, ed è di offerire un'illuminazione infinita, allorchè il punto ſi prende ſulla ſteſſa ſuperficie interna, vale a dire $r=a$, nel qual caſo l'illuminazione diventa $2I\pi$ log. $\frac{2r}{0} = \infty$. Queſta illuminazione infinita ha un non ſo che di aſpro, perchè ſebbene eſſa può ſembrare non ripugnante a motivo della diſtanza evaneſcente del punto dato dalla ſuperficie sferica, ſi ha però quivi un compenſo per parte della ſuperficie, da cui il punto ha una diſtanza evaneſcente, perchè anche la grandezza di tal ſuperficie è evaneſcente, ed a tale grandezza è ſempre proporzionale *cæteris paribus* l'illuminazione. Io non ſo ſe m'inganno, ma io tro-

vo una certa armonica semplicità ed eleganza nell' uguaglianza d'illuminazione per tutti i punti della cavità sferica, come esige il Teorema precedentemente dimostrato, che non posso non creder vera l' ipotesi, che somministra un tal risultato.

Osservo finalmente, che prendendo una superficie piana infinitesima in ambedue le dimensioni fuori d'una sfera raggiante del semidiametro $= r$ ad una grandissima distanza dal di lei centro $= a$ si trova (come ho mostrato precedentemente) l'illuminazione prodotta in detta superficie $= \frac{I\pi r^2}{a^2}$ nell' ipotesi di *Lambert*, ed $= \frac{2I\pi r^2}{a^2}$ nell'ipotesi di *Eulero*; e poichè πr^2 è l'area del cerchio massimo della sfera raggiante, e $2\pi r^2$ è la superficie emisferica, ne viene in conseguenza, che l'illuminazione generata in quel piano infinitamente picciolo viene espressa dall' area del cerchio massimo secondo *Lambert*, e dalla superficie emisferica secondo *Eulero*. Ora non par egli più verisimile, che piuttosto quell' area che questa superficie debba misurare la quantità d' illuminazione, giacchè nelle grandissime distanze non si vede altro che l' area suddetta, ossia il disco, e non comparisce punto la superficie dell' emisfero?

Proseguendo questa disamina in alcun altro solenne e nuovo Problema spettante alla misura della luce, mi porto a calcolare nell' ipotesi Euleriana l'illuminazione generata dalla circonferenza circolare raggiante RMS (*fig.* 5) in un punto F preso dentro l' area del circolo. Si guidi per F il diametro RB, e da un punto M qualunque della circonferenza si conducano MC al centro, MF al punto dato, MN perpendicolare al diametro. Si ponga l' angolo $MCB = \phi$, il raggio $CM = r$, $CF = a$: sarà dunque $FM^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos\phi$, l'archetto infinitesimo $Mm = rd\phi$, e l' illuminazione in F

generata dal archetto Mm ſarà $= \frac{Ird\phi}{r^2 + a^2 - 2ar \text{ coſ. } \phi}$

prendendo per I l'unità d'illuminazione. Paſſo ora all' integrazione di queſta formola, e per meglio riuſcirvi faccio $r^2 + a^2 = f^2$, $2ar = g^2$, e la formola diventa $\frac{Ird\phi}{f^2 - g^2 \text{ coſ. } \phi}$. Quindi aſſumo coſ. $\phi = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}$; ond' è ſen. $\phi = \frac{2u}{1+u^2}$, $d\phi$ coſ. $\phi = \frac{2du(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$, e però $d\phi = \frac{2du}{1+u^2}$. Dunque eſſendo $f^2 - g^2 \text{coſ.}\ \phi = \frac{f^2 - g^2 + (f^2+g^2)u^2}{1+u^2}$, ne viene $\frac{Ird\phi}{f^2 - g^2 \text{ coſ.} \phi} = \frac{2Irdu}{f^2 - g^2 + (f^2+g^2)u^2} = \frac{2Irdu}{(r-a)^2 + (r+a)^2 u^2}$

$$= \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{du}{1 + \left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{(r-a)^2} \times \frac{r-a}{r+a}$$

$$\times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1 + \left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2} = \frac{2Ir}{r^2 - a^2} \times \frac{\frac{r+a}{r-a} \times du}{1 + \left(\frac{r+a}{r-a}\right)^2 u^2}$$

Queſt' ultima formola eſprime viſibilmente la quantità $\frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ moltiplicata per l'elemento dell' arco circolare deſcritto col raggio 1, e colla tangente $\frac{r+a}{r-a} u$. Dunque l'illuminazione generata nel punto F dall' arco luminoſo indefinito BM è $= \frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a} u$ + coſt. E poichè ſi è fatto coſ. $\phi = \frac{1 - u^2}{1+u^2}$, cioè u^2

$= \frac{1 - \text{cos}.\,\phi}{1 + \text{cos}.\,\phi}$, cioè $u = \sqrt{\frac{1 - \text{cos}.\,\phi}{1 + \text{cos}.\,\phi}}$, sarà la predetta illuminazione $= \frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1-\text{cos}.\phi}{1+\text{cos}.\phi}} +$ cost. Siccome poi l'illuminazione svanisce in un coll' angolo ϕ, cioè quando cos. $\phi = 1$, nel qual caso Arc. tang. $\frac{r+a}{r-a}\sqrt{\frac{1-\text{cos}.\,\phi}{1+\text{cos}.\,\phi}}$ diventa Arc. tang. 0, cioè Arc. $= 0$; perciò non vi è costante da aggiungere all' integrale ritrovato. Per ottenere presentemente l'illuminazione della semicirconferenza *BMR* nel punto dato *F* conviene prendere $\phi = 180°$, e perciò cos. $\phi = -1$; il che somministra la formola $\frac{2Ir}{r^2 - a^2}$ Arc. tang. $\infty = \frac{2Ir}{r^2 - a^2} \times \frac{1}{2}\pi$, chiamando π la semicirconferenza del circolo descritto col raggio 1. Dunque l' illuminazione prodotta dalla semicirconferenza nel punto *F* è $= \frac{Ir\pi}{r^2 - a^2}$, e l'illuminazione generata da tutta la circonferenza (che è un' illuminazione doppia dell' altra come è chiaro) è $= \frac{2Ir\pi}{r^2 - a^2}$, cioè uguale alla stessa circonferenza moltiplicata per l'unità d'illuminazione, e divisa pel quadrato dell' ordinata al diametro nel dato punto *F*.

Se ora si vuol trovare l'illuminazione del punto *F* nell' ipotesi di *Lambert*, converrà moltiplicare

$\frac{Ird\phi}{a^2 + r^2 - 2ar\,\text{cos}.\,\phi}$ pel seno dell' angolo di emanazione *FMO*

fatto dal raggio lucido *MF* colla tangente *MO* in *M*, il qual angolo è $= FMN + NMO = FMN + MCB = FMN + \phi$. Dunque sen. $FMO =$ sen. FMN cos. ϕ

$+ \text{cof. } FMN \text{ fen. } \varphi = \frac{FN \text{ cof. } \varphi}{FM} + \frac{MN \text{ fen.} \varphi}{FM}$

$= \frac{(CN - CF) \text{ cof. } \varphi}{FM} + \frac{r \text{ fen. } \varphi^2}{FM} = \frac{(r \text{ cof.} \varphi - a) \text{ cof.} \varphi + r \text{ fen.} \varphi^2}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \varphi)}}$

$= \frac{r - a \text{ cof.} \varphi}{\sqrt{(a^2 + r^2 - 2ar \text{cof.} \varphi)}}$. Laonde l' illuminazione generata nel punto F dall' archetto Mm farà $\frac{Ir(r - a \text{ cof. } \varphi)\, d\varphi}{(a^2 + r^2 - 2ar \text{ cof. } \varphi)^{3:2}}$

$= \frac{Ir(r - a \text{ cof.} \varphi) d\varphi}{(a^2 + r^2)^{3:2} \left(1 - \frac{2ar}{a^2 + r^2} \text{ cof. } \varphi\right)^{3:2}} = \frac{Ir(r - a \text{ cof. } \varphi)\, d\varphi}{h^{3:2}(1 - m \text{cof.} \varphi)^{3:2}}$

affumendo $h = a^2 + r^2$, $m = \frac{2ar}{a^2 + r^2}$. Trovata pertanto l' illuminazione generata dall' archetto $Mm = \frac{Ir}{h^{3:2}}$ $(r - a \text{ cof. } \varphi)\ (1 - m \text{ cof. } \varphi)^{-3:2}\, d\varphi$, io riduco in ferie l' efpreffione $(1 - m \text{ cof. } \varphi)^{-3:2}$, ed ho la detta efpreffione $= 1 + \frac{1}{2} m \text{ cof. } \varphi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} m^2 \text{ cof. } \varphi^2 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^3 \text{cof.}$ $\varphi^3 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} m^4 \text{ cof. } \varphi^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} m^5 \text{ cof. } \varphi^5 + \text{ecc.}$

Dunque l' illuminazione dell' archetto farà $\frac{Ir}{h^{3:2}} \Big(r d\varphi +$ $\frac{1}{2} mr \text{ cof. } \varphi\, d\varphi - a \text{ cof. } \varphi\, d\varphi + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} rm^2 \text{ cof. } \varphi^2\, d\varphi - \frac{1}{2} am \text{ cof.}$ $\varphi^2\, d\varphi + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} rm^3 \text{ cof. } \varphi^3\, d\varphi - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} am^2 \text{ cof. } \varphi^3\, d\varphi$

$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} rm^4 \text{ cof. } \varphi^4\, d\varphi - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} am^3 \text{ cof. } \varphi^4\, d\varphi$

$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} rm^5 \text{ cof. } \varphi^5\, d\varphi - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} am^4 \text{cof.} \varphi^5 d\varphi + \text{ecc.}$

$$= \frac{Ir}{h^{3:2}} \left\{ \left(\begin{matrix} rd + \frac{1}{2} mr \\ - a \end{matrix} \right) \text{cos.}\,\varphi\, d\varphi \left(\begin{matrix} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} rm^2 \\ - \frac{3}{2} am \end{matrix} \right) \text{cos.}\,\varphi^2\, d\varphi \right.$$

$$+ \left(\begin{matrix} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} rm^3 \\ - \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} am^2 \end{matrix} \right) \text{cos.}\,\varphi^3\, d\varphi \left(\begin{matrix} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} rm^4 \\ - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} am^3 \end{matrix} \right) \text{cos.}\,\varphi^4\, d\varphi$$

$$\left. + \left(\begin{matrix} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} rm^5 \\ - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} am^4 \end{matrix} \right) \text{cos.}\,\varphi^5\, d\varphi \pm \text{ecc.} \right\}$$

. Chiamo A il coefficiente di cos. $\varphi d\varphi$, B quello di cos. $\varphi^2 d\varphi$, C quello di cos. $\varphi^3 d\varphi$, D ecc. Perlochè la predetta illuminazione sarà $\frac{Ir}{h^{3:2}} (rd\varphi + Ad\varphi \,\text{cos.} + Bd\varphi \,\text{cos.}\, \varphi^2 + C d\varphi \,\text{cos.}\, \varphi^3 + Dd\varphi \,\text{cos.}\, \varphi^4 + Ed\varphi \,\text{cos.}\, \varphi^5 + \text{ecc.})$ Ora si sa dal calcolo integrale, che

I.

$$A \int d\varphi \,\text{cos.}\, \varphi = A \,\text{sen.}\, \varphi$$

II.

$$B \int d\varphi \,\text{cos.}\, \varphi^2 = \frac{1}{2} B \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi + \frac{1}{2} B\varphi$$

III.

$$C \int d\varphi \,\text{cos.}\, \varphi^3 = \frac{1}{3} C \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^2 + \frac{2}{3} C \,\text{sen.}\, \varphi$$

IV.

$$D \int d\varphi \,\text{cos.}\, \varphi^4 = \frac{1}{4} D \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D \,\text{sen.}\, \varphi \,\text{cos.}\, \varphi + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} D \varphi$$

V.

$$E \int d\varphi \cos.\varphi^5 = \frac{1}{5} E \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^4 + \frac{1.4}{3.5} E \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^2 + \frac{2.4}{3.5} E \,\text{sen.}\,\varphi$$

VI.

$$F \int d\varphi \cos.\varphi^6 = \frac{1}{6} F \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^5 + \frac{1.5}{4.6} F \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^3 + \frac{1.3.5}{2.4.6} F \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi$$

VII.

ecc.

Conseguentemente integrando la precedente espressione dell' illuminazione dell' archetto, si avrà quella dell' arco indefinito $BM = \frac{Ir}{b^{3:2}} \Big(r\varphi + \frac{1}{2} B\varphi + \frac{1:3}{2.4} D\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F\varphi + \text{ecc.} \ldots\ldots\ldots + A \,\text{sen.}\,\varphi + \frac{2}{3} C \,\text{sen.}\,\varphi + \frac{2.4}{3.5} E \,\text{sen.}\,\varphi + \text{ecc.} \ldots\ldots + \frac{1}{2} B \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi + \frac{1.3}{2.4} D \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} F \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi + \text{ecc.} \ldots + \frac{1}{3} C \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^2 + \frac{1.4}{3.5} E \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^2 + \text{ecc.} \ldots\ldots \frac{1}{4} D \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^3 + \frac{1.5}{4.6} F \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots + \frac{1}{5} E \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^4 + \text{ecc.} \ldots\ldots + \frac{1}{6} F \,\text{sen.}\,\varphi \cos.\varphi^5 + \text{ecc.} \ldots\ldots \Big) + \text{cost.}$ E siccome l' illuminazione diventa

venta nulla quando l' arco pure diventa nullo, nasce perciò cost. $= 0$. Posto ora $\varphi = 360° = 2\pi$, prendendo π per la semicirconferenza del cerchio descritto col raggio 1, risulta tutta l'illuminazione generata nel dato punto F dall' intera circonferenza raggiante $BMRS$

$$= \frac{2Ir\pi}{(a^2+r^2)^{3:2}}\left(r + \frac{1}{2}B + \frac{1.3}{2.4}D + \frac{1.3.5}{2.4.6}F + \text{ecc.}\right)$$

Se si volesse ora conoscere l' illuminazione generata dalla periferia lucida in un punto situato sulla medesima, basterà assumere $a = r$, e quindi $h = 2r^2$, $m = 1$,

$$B = \frac{3.5}{2.4}r - \frac{3}{2}r = \frac{3(5-4)}{2.4}r = \frac{3}{2.4}r, D = \frac{3.5.7.9}{2.4.6.8}r$$

$$- \frac{3.5.7}{2.4.6}r = \frac{3.5.7(9-8)}{2.4.6.8}r = \frac{3.5.7}{2.4.6.8}r,$$

$$F = \frac{3.5.7.9.11.13}{2.4.6.8.10.12}r - \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10}r = \frac{3.5.7.9.11(13-12)}{2.4.6.8.10.12}r$$

$= \frac{3.5.7.9.11}{2.4.6.8.10.12}r$, ecc., ed avrassi la detta illuminazione $= \frac{I\pi}{r\sqrt{2}}\left(1 + \frac{3}{2.2.4} + \frac{3.3.5.7}{2.2.4.4.6.8}\right.$

$$\left. + \frac{3.3.5.5.7.9.11}{2.2.4.4.6.6.8.10.12} + \text{ecc.}\right).$$

Passo ora a calcolare l' illuminazione generata da un cerchio luminoso FGO (*fig.* 6) sopra un punto A situato nella retta CA, che dal suo centro si conduce perpendicolare al piano del cerchio. Dal centro C descrivendo i due cerchj infinitamente prossimi MER, SNm, egli è evidente, che l' illuminazione prodotta in A dalla zona infinitesima racchiusa tralle loro circonferenze s' agguaglia all' unità d' illuminazione moltiplicata per detta zona, e divisa pel quadrato della distanza AM nell' ipotesi Euleriana, e moltiplicata nuovamente pel seno dell' angolo di emanazione CMA nell' ipotesi

di *Lambert*. Dunque nominando il raggio CF del dato cerchio r, a la diſtanza AC del punto dato dal centro, x il raggio CM, $1:\pi$ il rapporto del diametro alla circonferenza del cerchio, ſi trova la zona lumino ſa $= 2\pi x dx$, $AM^2 = a^2 + x^2$, e l' illuminazione generata dalla zona in $A = \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$. Dunque integrando ſarà l' illuminazione prodotta dal cerchio RME $= \int \frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2} = I\pi \log. (a^2 + x^2) +$ coſt: e ſiccome l' illuminazione ſvaniſce col ſemidiametro x; quindi è coſt. $= - I\pi \log. a^2$; onde la detta illuminazione ſi fa $= I\pi \log. \frac{a^2+x^2}{a^2}$. Laonde per tutto il dato cerchio OFG ſarà l' illuminazione ricercata $= I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$ nell' ipoteſi Euleriana.

Nell' ipoteſi di *Lambert* conviene moltiplicare l' eſpreſſione $\frac{2I\pi x dx}{a^2+x^2}$ pel ſeno dell' angolo AMC, cioè per $\frac{AC}{AM}$, oſſia per $\frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$ ad effetto di ottenere l' illuminazione prodotta dalla zona circolare, la quale illuminazione ſarà in conſeguenza $= \frac{2I\pi a x dx}{(a^2+x^2)^{3:2}}$. L' integrale di queſta formola è $= - \frac{2I\pi a}{\sqrt{(a^2+x^2)}} +$ coſt. $= 2I\pi \left(1 - \frac{a}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$. Onde l' illuminazione prodotta dall' area circolare indefinita RME è $= \frac{2I\pi(\sqrt{(a^2+x^2)} - a)}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, e quella che è generata dal cer-

chio dato FOG è $= \frac{2I\pi(\sqrt{(a^2+r^2)}-a)}{\sqrt{(a^2+r^2)}}$

$= 2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$.

Pongasi ora al confronto questa espressione $2I\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{(a^2+r^2)}}\right)$ colla prima $I\pi \log. \frac{a^2+r^2}{a^2}$, e si giudichi quanto essenzialmente differiscono l' una dall' altra. Questa differenza arriva a tal segno, che se il cerchio luminoso si suppone infinito, cioè $r = \infty$, l'illuminazione da esso prodotta nel dato punto secondo l' ipotesi di *Lambert* e *Bouguer* diventa $2I\pi$, cioè determinata e finita, ma nell' ipotesi comune Euleriana si scuopre $= 2I\pi \log. \infty$, cioè a dire infinita.

Un soggetto degno dell' attenzione de' fisici e geometri in questa scienza della misura del Lume è quello, che spetta a' varj gradi d' illuminazione, che la terra riceve dal sole nelle sue diverse altezze sopra l' orizzonte, e singolarmente dalle parti successivamente visibili del disco solare allorchè attraversa l' orizzonte così nel nascere, come nel tramontare. Volendo entrare in questa delicata ricerca, convien prima premettere il Problema di ritrovare l' illuminazione, che da una data superficie in tutti i suoi punti *egualmente luminosa* viene prodotta in un elemento o porzione infinitesima di un' altra data superficie esposta ai raggi della prima. A tal effetto sia PMQ (*fig.* 7) la superficie raggiante di qualunque forma, ugualmente luminosa in tutte le sue parti; ed EF sia la superficie esposta a ricevere i raggi di quella; cercasi l' illuminazione prodotta da PQ nell' elemento, o porzioncella infinitesima Aa. Pigliisi nella superficie illuminante l'elemento Mm, che tramanda in A la piramide luminosa MAm sotto l' angolo d' incidenza $MAa = b$, e sotto l' angolo di emanazione $mMA = e$. Ciò posto, l' illumi-

nazione eccitata nell' elemento *Aa* da *Mm* ſi avrà con moltiplicare la parte illuminatrice *Mm* pel ſeno dell' angolo *b* d' incidenza, e pel ſeno dell' angolo *e* di emanazione, e con dividere il prodotto pel quadrato della diſtanza *MA*, cioè ſarà $= \frac{Mm.\ \text{ſen.}\ b\ \text{ſen.}\ e}{MA^2}$. Si concepiſca tagliata la piramide luminoſa da un piano *mi* perpendicolare ai lati di lei; e per la Geometria ſarà come il ſeno tutto al ſeno dell' angolo *mMA*, così la baſe infiniteſima *Mm* della piramide al piano ſecante *mi*; onde $mi = Mm.$ ſen. *e*; e quindi l' illuminazione prodotta $= \frac{mi.\ \text{ſen.}\ b}{MA^2}$. Se ora intorno ad *A* come centro col ſemidiametro $AC = 1$ ſi deſcrive una ſuperficie sferica, di cui *BNC* ſia la porzione compreſa fra la piramide luminoſa *PAQ* tramandata in *A* da tutta la ſuperficie raggiante *PQ*, ed *Nn* ſia la porzioncella ſerrata fra la piramidetta *Mam*; egli è noto, che le due minime ſuperficie *mi*, *Nn* ſtanno fra loro come i quadrati di *Ai*, ovvero *AM*, ed *AN*; e però *Nn* $= \frac{mi.\ AV^2}{AM^2} = \frac{mi}{AM^2}$; e queſto valore ſoſtituito nella precedente eſpreſſione dell' illuminazione rende queſta $= Nn.$ ſen. *b*, per modo che chiamata *I* l' illuminazione prodotta da una porzione finita della ſuperficie raggiante *PMQ*, ed $Nn = d\omega$, riſulta $dI = d\omega$ ſen. *b*, ed $I = \int d\omega$ ſen. *b*.

Di qui è facile l' inferire, che ſe la ſuperficie sferica *BNC* foſſe ancor eſſa una ſuperficie raggiante, ed ugualmente luminoſa in tutte le ſue parti, come lo è la *PMQ*, l' illuminazione da eſſa prodotta in *Aa* ſarebbe preciſamente la ſteſſa che quella prodotta da *PMQ*. Imperciocchè eſſendo l' illuminazione in *A* dell' elemento *Nn* uguale al prodotto di detto elemento nel

feno dell' angolo di emanazione nNA, e nel feno dell' angolo d'incidenza b, divifo pel quadrato della diftanza NA, ed effendo $= 1$ così quefto quadrato, come il feno dell' angolo retto nNA, ne viene l' illuminazione generata dall' elemento $Nn = d\omega$ fen. b, qual'è appunto (come fi è veduto) l' illuminazione generata dall' elemento Mm; e con fimil difcorfo fi prova, che l' illuminazione eccitata in Aa da tutta la data fuperficie PMQ è uguale all'illuminazione fatta dal fegmento sferico BNC rinferrato fra i lati della piramide lucida PAQ.

Per venire ora alla determinazione dell' illuminazione del fole nelle fue diverfe altezze fopra l' orizzonte, fia Cc (*fig.* 8) una fuperficie piana orizzontale infinitamente piccola in tutte le dimenfioni, e intorno ad effa come centro la fuperficie sferica $AOBZ$ col femidiametro $= 1$, la quale dal piano Cc prodotto viene tagliata nel cerchio maffimo orizzontale ALB. Il cono luminofo DCE, che partendo da tutto il difco folare va ad irradiare la fuperficie data infinitefima Cc, ed ha per affe CP, taglia nella fuperficie sferica il fegmente $DQEP$ avente per bafe il cerchio DQE, e per polo P; e confeguentemente, per ciò che fi è dimoftrato, tanta farà l' illuminazione, che produrrebbe in Cc la fuperficie concava $DQEP$, fe fi fupponeffe ugualmente lucida che il difco folare, quanta è l' illuminazione eccitata dal difco medefimo, ficchè per conofcer quefta bafterà ritrovar quella. Tirifi pertanto la verticale CZ, ed il piano ZCP diftefo fegni nella fuperficie sferica il cerchio verticale $ZAOE$; e per un punto M prefo ad arbitrio nel predetto fegmento fi faccia paffare il parallelo FNG appartenente al polo P, conducendofi pure il parallelo infinitamente vicino fmg. Ciò fatto pel polo P, e pel punto M fi concepifca guidato l' arco PMm di circolo maffimo, e l' arco PNn fotto un angolo infinitefimo col primo: finalmente pel vertice Z,

e per M si faccia passare il cerchio verticale $ZMKO$, che incontri in K il cerchio orizzontale. Si faccia la distanza di M dal vertice, cioè $ZM = \Delta$, la distanza dal polo, ossia $PM = p$, l'angolo al polo $ZPM = \phi$; e sarà il semidiametro del parallelo $FMG =$ sen. p, $MN = d\phi$ sen. p, $Mm = dp$. Laonde l'elemento $MmnN$, che si ha con moltiplicare MN per Mm, si trova $= d\phi dp$ sen. p, e questo moltiplicato pel seno dell'angolo d'incidenza MCK, ovvero per cos. Δ dà per l'illuminazione prodotta dall'elemento $MmnN$ la formola $d\phi dp$ sen. p cos. Δ. Posta ora la distanza del polo dal vertice, ovvero $PZ = a$, si ha nel triangolo sferico ZPM dalla Trigonometria cos. $\Delta =$ cos. p cos. $a +$ sen. p sen. a cos. ϕ, e surrogato nella formola precedente questo valore nasce l'espressione $d\phi dp$ sen. p cos. p cos. $a + d\phi\, dp$ sen. p^2 sen. a cos. ϕ, la quale rappresenta l'illuminazione del suddetto elemento. Si avverta presentemente, che l'integrazione di questa formola, nel supposto che si faccia variare la sola ϕ, somministra l'illuminazione prodotta dalla parte indeterminata $FfmM$ della zona infinitesima $FfgG$, e questa illuminazione trovasi $= \phi dp$ sen. p cos. p cos. $a + dp$ sen. p^2 sen. a sen. ϕ: siffatta quantità dee pur essa integrarsi, ma in ipotesi che si cangi la sola p; e siccome è noto, che $\int dp$ sen. p cos. $p = \frac{1}{2}$ sen. p^2, e $\int dp$ sen. $p^2 = \frac{1}{2} p - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p; quindi sarà $\int \phi dp$ sen. p cos. p cos. $a + \int dp$ sen. p^2 sen. ϕ sen. $a = \frac{1}{2} \phi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2} p$ sen. ϕ sen. $a - \frac{1}{2}$ sen. p cos. p sen. ϕ sen. $a = \frac{1}{2} \phi$ sen. p^2 cos. $a + \frac{1}{2}$ sen. ϕ sen. a (p — sen. p cos. p), che esprime l'illuminazione fatta dalla parte indefinita FMP del segmento FGP; sicchè preso $\phi = 360° = 2\pi$, risulta l'illumina-

zione eccitata da tutto quel ſegmento $= \pi$ ſen. p^2 coſ. a; e facendoſi poi eſprimere da p la diſtanza PR del polo dalla baſe dell' intero ſegmento DEP rinſerrato fra i raggi del cono ſolare luminoſo, la ſteſſa formola ſempliciſſima π ſen. p^2 coſ. a rappreſenta l' illuminazione di eſſo ſegmento, e conſeguentemente quella del diſco ſolare, che è in tutto equivalente alla prima.

Per mezzo di queſta formola rieſce ora faciliſſima la coſtruzione di una Tavola, la quale rappreſenti le varie illuminazioni del ſole nelle differenti diſtanze del ſuo centro dal zenit, ovvero nelle differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, facendo $= 1$ l' illuminazione corriſpondente all' altezza di 90°.

TAVOLA.

Altezze del centro solare sopra l' orizzonte.	Illuminazioni prodotte dal sole in un piano orizzontale.						
		64°	0,8987940	33°	0,5446390	2°	0,0348995
		63°	0,8910065	32°	0,5299193	1°	0,0174524
		62°	0,8829470	31°	0,5150381		
		61°	0,8746197	30°	0,5000000		
		60°	0,8660254	29°	0,4848096		
90°	1,0000000	59°	0,8571673	28°	0,4694716		
89°	0,9998477	58°	0,8480481	27°	0,4539905		
88°	0,9993908	57°	0,8386706	26°	0,4383712		
87°	0,9986295	56°	0,8290376	25°	0,4226183		
86°	0,9975640	55°	0,8191521	24°	0,4067366		
85°	0,9961947	54°	0,8090170	23°	0,3907311		
84°	0,9945218	53°	0,7986355	22°	0,3746066		
83°	0,9925462	52°	0,7880107	21°	0,3583679		
82°	0,9902680	51°	0,7771460	20°	0,3420202		
81°	0,9876883	50°	0,7660444	19°	0,3255682		
80°	0,9848077	49°	0,7547096	18°	0,3090170		
79°	0,9816271	48°	0,7431448	17°	0,2923717		
78°	0,9781476	47°	0,7313537	16°	9,2756374		
77°	0,9743701	46°	0,7193398	15°	0,2588190		
76°	0,9702957	45°	0,7071068	14°	0,2419219		
75°	0,9659258	44°	0,6946584	13°	0,2249511		
74°	0,9612617	43°	0,6819984	12°	0,2079117		
73°	0,9563048	42°	0,6691306	11°	0,1908090		
72°	0,9510565	41°	0,6560590	10°	0,1736482		
71°	0,9455185	40°	0,6427876	9°	0,1564345		
70°	0,9396926	39°	0,6293204	8°	0,1391731		
69°	0,9335804	38°	0,6156615	7°	0,1218693		
68°	0 9271839	37°	0,6018150	6°	0,1045285		
67°	0,9205049	36°	0,5877853	5°	0,0871527		
66°	0.913545	35°	0,5735764	4°	0,0697565		
65°	0,9063078	34°	0,5591929	3°	0,0523360		

Siccome

Siccome inoltre è noto dall' Astronomia, che l' angolo sotteso dal semidiametro solare, ovvero l' arco *PD*, oppure *p* è uguale a 16′, il lembo inferiore del disco solare non giugne a toccare l' orizzonte se non allorquando il centro del sole si trova a 16′ di altezza. Conseguentemente per le altezze del centro solare minori di un grado risulta la seguente

T A V O L A.

Altezze del centro solare minori di un grado.	Illuminazioni prodotte da tutto il disco solare sopra un piano orizzontale.				
		43′	0, 0125079	22′	0, 0063995
		42′	0, 0122170	21′	0, 0061086
		41′	0, 0119261	20′	0, 0058177
		40′	1, 0116353	19′	0, 0055268
		39′	0, 0113444	18′	0, 0052360
59′	0, 0171616	38′	0, 0110535	17′	0, 0049451
58′	0, 0168707	37′	0, 0107627	16′	0, 0046542
57′	0, 0165799	36′	0, 0104718		
56′	0, 0162802	35′	0, 0101809		
55′	0, 0159982	34′	0, 0098900		
54′	0, 0157073	33′	0, 0095992		
53′	0, 0154165	32′	0, 0093083		
52′	0, 0151256	31′	0, 0090174		
51′	0, 0148348	30′	0, 0087265		
50′	0, 0145439	29′	0, 0084357		
49′	0, 0142530	28′	0, 0081448		
48′	0, 0139622	27′	0, 0078539		
47′	0, 0136713	26′	0, 0075630		
46′	0, 0133805	25′	0, 0072721		
45′	0, 0130896	24′	0, 0069813		
44′	0, 0127987	23′	0, 0066904		

Colle dottrine finqui esposte si può ora dare il giusto valore a quell' osservazione cardinale di *Bouguer*,

sulla quale quel celebre Geometra sonda tutta la sua teoria dell' indebolimento del lume degli astri nell' attraversare l' atmosfera terrestre, e costruisce la sua Tavola delle forze del lume dopo il passaggio per l' atmosfera nelle differenti altezze dell' astro. Paragona egli l' intensità della luce lunare nell' altezza di 19° 16' con quella che corrisponde all' altezza di 66°. 11', e dopo un' attenta osservazione stabilisce il rapporto delle due intensità in quello di 1681 : 2500, cioè a dire secondo *Bouguer* la luna all' altezza apparente di 19°. 16' sopra l' orizzonte sparge sulla terra una luce un terzo più debole di quella che vi manda nell' altezza di 66°. 11'.

Ma se si applica a questo caso la nostra formola π sen. p^2 cos. a, si trova subito il rapporto di quelle due intensità espresso da 32996 : 91484; e però la luna senza l' alterazione prodotta dall' atmosfera (da cui la nostra formola prescinde) getta sulla terra una luce quasi tre volte più debole all' altezza di 19°. 16', che all' altezza di 66°. 11'; e siffatto indebolimento dee poi crescere molto più avendo riguardo alla diminuzione del lume nel passaggio per l' atmosfera, diminuzione tanto maggiore, quanto è più lungo il viaggio della luce per l' atmosfera, ossia quanto è più vicina la luna all'orizzonte. Quindi può farsi giudizio, qual poco conto dee farsi di quell' osservazione fondamentale di *Bouguer*, ed a qual instabile principio si appoggia tutta la sua teoria della dispersione e del dissipamento, che soffre il lume nel tragittare l' atmosfera terrestre.

Finalmente il maneggio della predetta formola ci fa conoscere un' altra verità poco o nulla attesa, ed è la notabilissima diversità nella forza della luce solare, e conseguentemente nella chiarezza del giorno dall' una all' altra stagione dell' anno. Per cagion d' esempio qui in Pavia, dove l' altezza meridiana del centro del

ſole nel giorno del ſolſtizio d' eſtate è di 68°. 17', e nel ſolſtizio d' inverno è di 21°. 21', ſi ſcuopre, che la chiarezza del giorno in ſul meriggio nel primo ſolſtizio ſta a quella dell' altro ſolſtizio come 92902 : 36406, cioè il meriggio del giorno ſolſtiziale eſtivo è oltre il doppio più chiaro e luminoſo del meriggio del giorno ſolſtiziale iemale, ed una tal proporzione fra lo ſplendore meridiano de' due ſolſtizj creſce poi maggiormente pel diſſipamento della luce ſolare nel ſuo tragitto attraverſo l' atmosfera, il qual diſſipamento è ſempre vie minore quanto è maggiore l' altezza del ſole ſull' orizzonte.

Reſta ora per ultimo da indagare l' illuminazione di qualunque parte viſibile del diſco ſolare nell' atto che attraverſa l' orizzonte. La formola eſprimente l' illuminazione prodotta da qualunque parte indeterminata del diſco del ſole ſopra un piano orizzontale ſi è trovata $= \frac{\varphi}{2\pi} \text{coſ.}\, a + \frac{\text{ſen.}\,\varphi\ \text{ſen.}\, a\,(p - \text{ſen.}\, p\ \text{coſ.}\, p)}{2\pi\ \text{ſen.}\, p^2}$, nella quale p è l' angolo ſotteſo dal ſemidiametro del ſole, cioè $p = 16'$; 2π è la circonferenza del cerchio deſcritto col raggio 1, cioè $2\pi = 6,28318530$; a è la diſtanza del centro del ſole dal zenit; φ è l' angolo al polo del ſegmento luminoſo ecc. Siccome in queſta formola è invariabile la quantità $\frac{p - \text{ſen.}\, p\ \text{coſ.}\, p}{2\pi\ \text{ſen.}\, p^2}$ in tutte le differenti altezze del centro ſolare ſopra l' orizzonte, ſia bene determinarla anticipatamente. Eſſendo dunque $2\pi = 360° = 21600'$, $p = 16'$, ſtarà $21600' : 16' :: 6,28318530$: al quarto, che ſarà p eſpreſſo in parti del raggio 1. Sicchè

log. 6,28318530 = 0,7981799
log. 16' . . . . . . = 1,2041200

2,0022999
log. 21600' . . . . = 4,3344537

7,6678462 numero = 0,0046542

Dunque $p = 0,0046542$

Parimente per trovare ſen. p coſ. p, che dee ſottrarſi da p ſi fa

$$\begin{array}{ll} \log.\,\text{ſen.}\,p \ldots = & 7,6678445 \\ \log.\,\text{coſ.}\,p \ldots = & 9,9999953 \\ \hline & 7,6678398 \end{array}$$ numero $= 0,0046541$

Perciò p — ſen. p coſ. p . . . . $= 0,0000001$

Si trova ora log. $\dfrac{2\pi\,\text{ſen.}\,p^2}{p - \text{ſen.}\,p\,\text{coſ.}\,p}$ così:

$$\begin{array}{ll} \log.\ 2\pi \ldots\ldots & = 0,7981799 \\ 2\ \log.\ \text{ſen.}\ p \ldots\ldots & = 5,3356890 \\ \hline \log.\ 2\pi\ \text{ſen.}\,p^2 \ldots & = 6,1338689 \\ \log.\ \dfrac{1}{p - \text{ſen.}\,p\,\text{coſ.}\,p} \ldots & = 7,0000000 \end{array}$$

log. $\dfrac{2\pi\,\text{ſen.}\,p^2}{p - \text{ſen.}\,p\,\text{coſ.}\,p} \ldots = 3,1338689$, che è il logaritmo da ſottrarſi da log. ſen. φ ſen. a per avere il logaritmo del ſecondo termine della formola, cioè di $\dfrac{\text{ſen.}\,\varphi\,\text{ſen.}\,a\,(p - \text{ſen.}\,p\,\text{coſ.}\,p)}{2\pi\,\text{ſen.}\,p^2}$. Ecco dunque il proſpetto

$2\pi' = 21600'$ log. $2\pi' = 4,3344537$

$2\pi = 6,28318530$ log. $\dfrac{2\pi\,\text{ſen.}\,p^2}{p - \text{ſen.}\,p\,\text{coſ.}\,p} = 3,1338689$

P A R T E I.

Altezze del centro ſolare ſopra l'orizzonte.

C A S O I.

Altezza del centro del ſole ſopra l'orizzonte $= 15'$; onde $a = 89^\circ.45'$; e così $\varphi = 90^\circ +$ arc. ſen. $\dfrac{15}{16}$. Ma

log. $\frac{15}{16} = 9, 9719713$, a cui corrifponde arc. $= 69°. 38'$.

Dunque $\varphi = 90° + 69°\ 38' = 159°. 38' = 9578'$.

Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{9578}{21600}$ fen. $15'$. Perciò

log. 9578 = 3, 9812748
log. fen. 15' ... = 7, 6398160
1, 6210908
log. 21600 ... = 4, 3344537
7, 2866371 num. ... = 0, 0019348

fen. φ = fen. 159°. 38' = fen. 20°. 22'
log. fen. φ .... = 9, 5416126
log. fen. a ... = 9, 9999959
9, 5416085
— 3, 1338689
6, 4077396 num. ... = 0, 0002557

Dunque l'illuminazione del femifegmento fuperiore all'orizzonte .... = 0, 0021905
e l'illuminazione di tutto quel fegmento fuperiore all'orizzonte effendo doppia, è .... = 0, 0043810
(A)

CASO II.

Altezza del centro folare fopra l'orizzonte $= 14'$; perciò $a = 89°. 46'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. fen. $\frac{14}{16} =$ $90° +$ arc. fen. $\frac{7}{8}$. Ma log. $\frac{7}{8} = 9, 9420080$, a cui corrifponde arc. $= 61°. 3'$.

Dunque $\varphi = 151°. 3' = 9063'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi}$ cof. $a = \frac{9063}{21600}$ fen. $14'$. Perciò

log. 9063 = 3, 9572720
log. fen. 14′ = 7, 6098530

1, 5671250
log. 21600 = 4, 3344537

7, 2326713 num. = 0, 0017087

fen. φ = fen. 151°. 3′ = fen. 28°. 57′

log. fen. φ .... = 9, 6848868
log. fen. a ... = 9, 9999964

9, 6848832
— 3, 1338689

6, 5510143 num. = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del femifegmento è = 0, 0020643
e però l'illuminazione doppia, cioè di
tutto il fegmento è . . . . = 0, 0041286
(B)

CASO III.

Altezza del centro folare = 13′, quindi a = 89°. 47′; e però $\varphi = 90° +$ arc. fen. $\frac{13}{16}$. Ma log. $\frac{13}{16}$ = 9, 9098233, a cui corrifponde arc. = 54°. 21′. Dunque φ = 144°. 21′ = 8661′. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, cof. a = $\frac{8661}{21600}$ fen. 13′. Sicchè

log. 8661 ... = 3, 9375680
log. fen. 13′.. = 7, 5776686

1, 5152366
log. 21600 = 4, 3344537

7, 1807829 num. = 0, 0015163

fen. φ = fen. 144°. 21′ = fen. 35°. 39′

log. sen. $\varphi = 9,7655436$
log. sen. $a = 9,9999969$

$9,7655405$
$-\ 3,1338689$

$6,6316716$ num. $= 0,0004282$

Dunque l'illuminazione del semisegmento
è . . . . $= 0,0019445$
e l'illuminazione totale . . . . . . $= 0,0038890$
(C)

CASO IV.

Altezza del centro solare $= 12'$; cioè $a = 89°.\ 48'$; onde $\varphi = 90° + \text{arc. sen. } \frac{3}{4}$. Ma log. $\frac{3}{4} = 9,8750612$, a cui corrisponde arc. $= 48°.\ 35'$; perciò $\varphi = 138°.\ 35' = 8315'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{8315}{21600}$ sen. $12'$. Sicchè

log. $8315 = 3,9198623$
log. sen. $12' = 7,5429065$

$1,4627688$
log. $21600 = 4,3344537$

$7,1283151$ num. $= 0,0013437$

sen. φ = sen. $138°.\ 35'$ = sen. $41°.\ 25'$. Onde

log. sen. $\varphi = 9,8205496$
log. sen. $a = 9,9999974$

$9,8205470$
$-\ 3,1338689$

$6,6866781$ num. $= 0,0004860$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . $= 0,0018297$
e l'illuminazione totale . . . . . . $= 0,0036594$
(D)

CASO V.

Altezza del centro folare $= 11'$, ovvero $a = 89°. 49'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. fen. $\frac{11}{16}$. Ma log. $\frac{11}{16}$ $= 9, 8372727$, a cui corrifponde arc. $43°. 26'$. Sicchè $\varphi = 133°. 26' = 8006'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. a $= \frac{8006}{21600}$ fen. $11'$.

log. 8006 =	3, 9034156
log. fen. 11' =	7, 5051181
	1, 4085337
log. 21600 =	4, 3344537
	7, 0740800 num. = 0, 0011860

fen. φ = fen. $133°, 26'$ = fen. $46°. 34'$. Dunque

log. fen. φ =	9, 8610412
log. fen. a =	9, 9999978
	9, 8610390
—	3, 1338689
	6, 7271701 num. = 0, 0005335

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0017195
e l' illuminazione totale . . . . . = 0, 0034390
(E)

CASO VI.

Altezza del centro folare $= 10'$, ovvero $a = 89°. 50'$., onde $\varphi = 90° +$ arc. fen. $\frac{5}{8}$. Ma log. $\frac{5}{8}$ $= 9, 7958800$, a cui corrifponde arc. $= 38°. 41'$. Dunque

Dunque $\varphi = 128°. 41' = 7721'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. a

$= \frac{7721}{21600}$ sen. $10'$. Dunque

log. 7721 = 3, 8876736
log. sen. 10′ = 7, 4637255

1, 3513991
log. 21600 = 4, 3344537

7, 0169464 num. = 0, 0010398

sen. φ = sen. 108°. 41′ = sen. 51°. 19′. Onde

log. sen. φ = 9, 8924354
log. sen. a = 9, 9999982

9, 8924336
— 3, 1338689

6, 7585647 num. = 0, 0005735

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0016133
e l'illuminazione totale . . . . . . = 0, 0032266
(*F*)

CASO VII.

Altezza del centro solare $= 9'$, cioè $a = 89°. 51'$; onde $\varphi = 90° +$ arc. sen. $\frac{9}{16}$. Ma log. $\frac{9}{16} = 9,7531225$, a cui corrisponde arc. $= 34°. 30'$. Dunque $\varphi = 124°. 30' = 7470'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{7470}{21600}$ sen. $9'$; quindi

log. 7470 = 3, 8733206
log. sen. 9′ = 7, 4179681

1, 2912887
log. 21600 = 4, 3344537

6, 9568350 num. = 0, 0009054

$\text{sen.}\,\phi = \text{sen.}\,124°.\,30' = \text{sen.}\,55°.\,30'$

$$\begin{array}{lrl} \log.\ \text{sen.}\ \phi & = & 9,\,9159937 \\ \log.\ \text{sen.}\ a & = & 9,\,9999985 \\ \hline & & 9,\,9159922 \\ & - & 3,\,1338689 \\ \hline & & 6,\,7821233 \quad \text{num.} = 0,\,0006055 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0015109
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0030218
(*G*)

CASO VIII.

Altezza del centro solare $= 8'$, cioè $a = 89°.\,52'$; onde $\phi = 90° + \text{arc.}\,\text{sen.}\,\frac{1}{2} = 90° + 30° = 120° = 7200'$.
Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'}\,\text{cos}.\,a = \frac{7200}{21600}\,\text{sen.}\,8'$. Sicchè

$$\begin{array}{lrl} \log.\ 7200 & = & 3,\,8573325 \\ \log.\ \text{sen.}\ 8' & = & 7,\,3668157 \\ \hline & & 1,\,2241482 \\ \log.\ 21600 & = & 4,\,3344537 \\ \hline & & 6,\,8896945 \quad \text{num.} = 0,\,0007757 \end{array}$$

$\text{sen.}\,\phi = \text{sen.}\,120° = \text{sen.}\,60°$. Dunque

$$\begin{array}{lrl} \log.\ \text{sen.}\ \phi & = & 9,\,9375306 \\ \log.\ \text{sen.}\ a & = & 9,\,9999988 \\ \hline & & 9,\,9375294 \\ & - & 3,\,1338689 \\ \hline & & 6,\,8036605 \quad \text{num.} = 0,\,0006363 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0014120
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0028240
(*H*).

CASO IX.

Altezza del centro ſolare $= 7'$; ovvero $a = 89°. 53'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.} \frac{7}{16}$. Ma log. $\frac{7}{16} = 9,6409780$, a cui corriſponde arc. $= 25°. 56'$. Dunque $\phi = 115°. 56' = 6956'$. Dunque $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, a = \frac{6956}{21600} \text{ſen.}\, 7'$. Sicchè

log. 6956 = 3, 8423596
log. ſen. 7' = 7, 3088239

1, 1511835
log. 21600 = 4, 3344537

6, 8167298 num. = 0, 0006557

ſen. ϕ = ſen. 115°. 56' = ſen. 64°. 4'. Sicchè

log. ſen. ϕ = 9, 9539063
log. ſen. a = 9, 9999991

9, 9539054
— 3, 1338689

6, 8200365 num. = 0, 0006608

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0013165
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0026330
(I)

CASO X.

Altezza del centro ſolare $= 6'$, cioè $a = 89°. 54'$; onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.} \frac{3}{8}$. Ma log. $\frac{3}{8} = 9, 5740312$, a cui corriſponde arc. $= 22°. 1'$. Dunque $\phi = 112°. 1' = 6721'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{coſ.}\, a = \frac{6721}{21600}$ ſen. $6'$. Onde

log. 6721 = 3, 8274339
log. sen. 6′ = 7, 2418771
1, 0693110
log. 21600 = 4, 3344537
6, 7348573 num. = 0, 0005431

sen. φ = sen. 112°. 1′ = sen. 67°. 59′. Sicchè

log. sen. φ = 9, 9671148
log. sen. a = 9, 9999993
9, 9671141
— 3, 1338689
6, 8332452 num. = 0, 0006811

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0012242
e l'illuminazione totale . . . . = 0, 0024484
(L)

CASO XI.

Altezza del centro solare = 5′, cioè a = 89°. 55′; onde $\varphi = 90° +$ arc. sen. $\frac{5}{16}$ Ma log. $\frac{5}{16}$ = 9, 4948500, a cui corrisponde arc. = 18°. 13′. Dunque φ = 108°. 13′ = 6493′. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{6493}{21600}$ sen. 5′.

log. 6493 = 3, 8124454
log. sen. 5′ = 7, 1626960
0, 9751414
log. 21600 = 4, 3344537
6, 6406877 num. = 0, 0004372

fen. φ = fen. 108°. 13′ = fen. 71°. 47′. Onde

log. fen. φ = 9, 9776693
log. fen. a = 9, 9999995

9, 9776688
— 3, 1338689

6, 8437999 num. = 0, 0006979

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0011351
e l' illuminazione intera . . . . = 0, 0022702
(M)

CASO XII.

Altezza del centro folare = 4′, cioè a = 89°. 56′; onde φ = 90°. + arc. fen. $\frac{1}{4}$. Ma log. $\frac{1}{4}$ = 9, 3979400, a cui corrifponde arc. = 14°. 29′. Dunque φ = 104°. 29′ = 6269′. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cof. $a = \frac{6269}{21600}$ fen. 4′. Perciò

log. 6269 = 3, 7971983
log. fen. 4′ = 7, 0657860

0, 8629843
log. 21600 = 4, 3344537

6, 5285306 num. = 0, 0003377

fen. φ = fen. 104°. 29′ = fen. 75°. 31′. Dunque

log. fen. φ = 9, 9859742
log. fen. a = 9, 9999997

9, 9859739
— 3, 1338689

6, 8521050 num. = 0, 0007114

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0010491
e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0020982
(N)

CASO XIII.

Altezza del centro ſolare $= 3'$, cioè $a = 89°. 57'$; onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{3}{16}$. Ma log. $\frac{3}{16} = 9,2730012$, a cui corriſponde arc. $= 10°. 48'$; onde $\phi = 100°. 48' = 6048'$. Sicchè $\frac{\phi'}{2\pi'}$ coſ. $a = \frac{6048}{21600}$ ſen. $3'$. Onde

$$\begin{array}{ll} \text{log. } 6048 & = 3,7816118 \\ \text{log. sen. } 3' & = 6,9408473 \\ \hline & 0,7224591 \\ \text{log. } 21600 & = 4,3344537 \\ \hline & 6,3880054 \quad \text{num.} = 0,0002443 \end{array}$$

ſen. $\phi =$ ſen. $100°.48' =$ ſen. $79°. 12'$. Dunque

$$\begin{array}{ll} \text{log. sen. } \phi & = 9,9922385 \\ \text{log. sen. } a & = 9,9999998 \\ \hline & 9,9922383 \\ & - 3,1338689 \\ \hline & 6,8583694 \quad \text{num.} = 0,0007217 \end{array}$$

Dunque l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . $= 0,0009660$

e l'illuminazione totale . . . . $= 0,0019320$

(O)

CASO XIV.

Altezza del centro ſolare $= 2'$, cioè $a = 89°. 58'$; onde $\phi = 90° +$ arc. ſen. $\frac{1}{8}$. Ma log. $\frac{1}{8} = 9,0969100$, a cui corriſponde arc. $= 7°. 11'$. Dunque $\phi = 97°. 11' = 5831'$. Perciò $\frac{\phi'}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{5831}{21600}$ ſen. $2'$. Onde

log. 5831 = 3, 7657430
log. ſen. 2′ = 6, 7627561

0, 5284991
log. 21600 = 4, 3344537

6, 1940454 num. = 0, 0001563

ſen. ϕ = ſen. 97°. 11′ = ſen. 82°. 49′. Sicchè

log. ſen. ϕ = 9, 9965778
log. ſen. a = 9, 9999999

9, 9965777
— 3, 1338689

6, 8627088 num. = 0, 0007290

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0008853
e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0017706
(P).

CASO XV.

Altezza del centro ſolare = 1′, cioè $a = 89°. 59′$. Onde $\phi = 90° + \text{arc. ſen.} \frac{1}{16}$. Ma log. $\frac{1}{16} = 8,7958800$, a cui corriſponde arc. = 3°. 35′. Dunque $\phi = 93°. 35′ = 5615′$. Perciò $\frac{\phi'}{2\pi'} \text{coſ.} a = \frac{5615}{21600} \text{ſen.} 1′$; vale a dire

log. 5615 = 3, 7493498
log. ſen. 1′ = 6, 4637261

0, 2130759
log. 21600 = 4, 3344537

5, 8786222 num. = 0, 0000756

ſen. ϕ = ſen. 93°. 35′ = ſen. 86°. 25′. Dunque

log. sen. φ = 9, 9991501
log. sen. a = 9, 9999999

9, 9991500
— 3, 1338689

6, 8652811 num. = 0, 0007333

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0008089
e l' illuminazione intera . . . . . . = 0, 0016178
(Q).

CASO XVI.

Altezza del centro solare = 0, cioè $a = 90°$, onde $\varphi = 90° +$ arc. sen. $o = 90°$. Perciò essendo in tal caso cos. $a = 0$, svanisce il primo termine della formola, e resta il secondo, che è come segue

log. sen. φ = 10, 0000000
log. sen. a = 10, 0000000

20, 0000000
— 3, 1338689

6, 8661311 num. = 0, 0007347

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0007347
e l' illuminazione intera . . . . . . = 0, 0014694
(R).

PARTE II.

Depressione del centro solare sotto l' orizzonte.

CASO I.

Altezza negativa del centro solare, cioè depressione = 1'; dunque $a = 90°. 1'$. In tutti questi casi si troverà

verà il valore di $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{16} = 90° - 3°. 35'$ (n°. XV) $= 86°. 25' = 5185'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = \frac{5185}{21600} \times -$ sen. $1' = -\frac{5185}{21600}$ sen. $1'$. Sicchè

log. 5185 = 3, 7147488
log. sen. 1' = 6, 4637261
0, 1784749
log. 21600 = 4, 3344537
5, 8440212 num. = − 0, 0000698

Ora è manifesto, che il secondo termine della formola è precisamente quello stesso che si è trovato al n°. XV, cioè 0, 0007333
da cui sottratto il precedente si ha
l' illuminazione del semisegmento = 0, 0006635
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0013270
(*A*).

CASO II.

Depressione del centro solare $= 2'$; dunque $a = 90°. 2'$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{1}{8} = 90° - 7°. 11'$ (n° XIV) $= 82°. 49' = 4969'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ cos. $a = -\frac{4969}{21600}$ sen. $2'$.
Sicchè

log. 4969 = 3, 6962690
log. sen. 2' = 6, 7627561
0, 4590251
log. 21600 = 4, 3344537
6, 1245714 num. = − 0, 0001332

V

Il ſecondo termine della formola è lo ſteſſo, che ſi è trovato al n°. XIV; cioè 0, 0007290

Dunque ſarà l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0005958
e l' illuminazione totale . . . . . . = 0, 0011916
(B).

CASO III.

Depreſſione del centro ſolare $= 3'$, cioè $a = 90°. 3'$, onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{3}{16} = 90° - 10°. 48' = 79°. 12'$ $= 4752'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{4752}{21600}$ ſen. $3'$, cioè

log. 4752 = 3, 6768764
log. ſen. 3′ = 6, 9408473
0, 6177237
log. 21600 = 4, 3344537
6, 2832700 num. = − 0, 0001919

Il ſecondo termine coincide con quello del n°. XIII, cioè ſi trova . . . . . = 0, 0007217

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0005298
e l' illuminazione totale . . . . = 0, 0010596
(C).

CASO IV.

Depreſſione del centro ſolare $= 4'$, cioè $a = 90°. 4'$; onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{1}{4} = 90° - 14°. 29' = 75°. 31'$ $= 4531'$. Perciò $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{4531}{21600}$ ſen. $4'$, cioè

log. 4531 = 3, 6561941
log. ſen. 4′ = 7, 0657860

0, 7219801
log. 21600 = 4, 3344537

6, 3875264 num. = — 0, 0002441

Il ſecondo termine coincide con quello
del n°. XII, cioè ſi trova . . . . . = 0, 0007114

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento . . . . = 0, 0004673
e l' illuminazione intera . . . . . . = 0, 0009346
(*D*).

CASO V.

Depreſſione del centro ſolare = 5′, cioè $a = 90°. 5′$;
onde $\varphi = 90° - \text{arc. ſen.} \frac{5}{16} = 90° - 18°. 13' = 71°. 47'$
$= 4307'$. Onde $\frac{\varphi'}{2\pi'}$, $\text{coſ.}\, a = -\frac{4307}{21600}$ ſen. 5′; perciò

log. 4307 = 3, 6341749
log. ſen. 5′ = 7, 1626960

0, 7968709
log. 21600 = 4, 3344537

6, 4624172 num. = — 0, 0002900

Il ſecondo termine coincide con quello
del n°. XI; cioè ſi trova . . . . . = 0, 0006979

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0004079
e quindi ſarà l' illuminazione intera = 0, 0008158
(E).

CASO VI.

Depreſſione del centro ſolare $=6'$, cioè $a=90°.\ 6'$. Onde $\varphi=90°-\text{arc. ſen.}\ \frac{3}{8}=90°-22°.\ 1'=67°.\ 59'$ $=4079'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}\ \text{coſ.}\ a=-\frac{4079}{21600}\ \text{ſen.}\ 6'$. Perciò

log. 4079 = 3, 6105537
log. ſen. 6′ = 7, 2418771

0, 8524308
log. 21600 = 4, 3344537

6, 5179771 num. = − 0, 0003296

Il ſecondo termine è lo ſteſſo che quello del n°. x, cioè ſi trova . . . . . . = 0, 0006811

Dunque l' illuminazione del ſemiſegmento ſarà . . . . = 0, 0003515
e quindi ſi ricava l' illuminazione intera . . . . = 0, 0007030
(F).

CASO VII.

Depreſſione del centro ſolare $=7'$, cioè $a=90°.\ 7'$; quindi $\varphi=90°-\text{arc. ſen.}\ \frac{7}{16}=90°-25°.\ 56'=64°.\ 4'$ $=3844'$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'}\ \text{coſ.}\ a=-\frac{3844}{21600}\ \text{ſen.}\ 7'$. Dunque

log. 3844 = 3, 5847834
log. ſen. 7′ = 7, 3088239

0, 8936073
log. 21600 = 4, 3344537

6, 5591536 num. = − 0, 0003624

Il fecondo termine coincide con quello
del n°. IX, cioè fi trova . . . . . =, 0, 0006608

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0002984
e però nafce l' illuminazione intera = 0, 0005968
(G).

CASO VIII.

Depreffione del centro folare = 8', cioè $a = 90°. 8'$;
onde $\varphi = 90° - \text{arc. fen.} \frac{1}{2} = 90° - 30° = 60° = 3600'$.

Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cof.}\, a = -\frac{3600}{21600} \text{fen.}\, 8'$. Sicchè

log. 3600 = 3, 5563025
log. fen. 8' = 7, 3668157

0, 9231182
log. 21600 = 4, 3344537

6, 5886645 num. = — 0, 0003879

Il fecondo termine coincide con quello
del n°. VIII prec., e però fi trova = 0, 0006363

Dunque ne verrà, che l' illuminazione
del femifegmento farà . . . . = 0, 0002484
onde l' illuminazione intera . . . . = 0, 0004968
(H).

CASO IX.

Depreffione del centro folare = 9', cioè $a = 90°. 9'$;
onde $\varphi = 90° - \text{arc. fen.} \frac{9}{16} = 90° - 34°. 30' = 55°. 30'$
$= 3330'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cof.}\, a = -\frac{3330}{21600}$ fen. 9', cioè

$\log. 3330 = 3,5224442$
$\log. \text{fen}. 9' = 7,4179681$
$0,9404123$
$\log. 21600 = 4,3344537$
$6,6059586$ num. $= -0,0004036$

Il fecondo termine coincide con quello del n.° VII Parte prima, onde fi trova . . = 0, 0006055

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0002019
e però l' illuminazione intera . . . . = 0, 0004038
(I)

CASO X.

Depreffione del centro folare $= 10'$, cioè $a = 90°. 10'$, onde $\varphi = 90° - \text{arc. fen.} \frac{5}{8} = 90° - 38°. 41' = 51°. 19' = 3079'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cof.}\, a = -\frac{3079}{21600} \text{fen.}\, 10'$; quindi

$\log. 3079 = 3,4884097$
$\log. \text{fen}. 10' = 7,4637255$
$0,9521352$
$\log. 21600 = 4,3344537$
$6,6176815$ num. $= -0,0004146$

Il fecondo termine coincide con quello del n.° VI. della prima Parte, onde fi trova = 0, 0005735

Dunque l' illuminazione del femifegmento è . . . . = 0, 0001589
e però l' illuminazione intera . . . = 0, 0003178
(L)

CASO XI.

Depreſſione del centro ſolare $= 11'$, cioè $a = 90°. 11'$; onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{11}{16} = 90° - 43°. 26' = 46°. 34'$ $= 2794'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. $a = -\frac{2794}{21600}$ ſen. $11'$; quindi

log. 2794	=	3, 4462264
log. ſen. 11′	=	7, 5051181
		0, 9513445
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 6168908 num. = − 0, 0004139

Il ſecondo termine coincide con quello del n.° V della Parte prima, ond'è . . . . = 0, 0005335

Sicchè l'illuminazione del ſemiſegmento è . . . . = 0, 0001196

e l'illuminazione intera . . . . = 0, 0002392

(*M*)

CASO XII.

Depreſſione del centro ſolare $= 12'$, cioè $a = 90°. 12'$, onde $\varphi = 90° -$ arc. ſen. $\frac{3}{4} = 90° - 48°. 35' = 41°. 25' = 2485'$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'}$ coſ. a $= -\frac{2485}{11600}$ ſen. $12'$, cioè

log. 2485	=	3, 3953264
log. ſen. 12′	=	7, 5429065
		0, 9382329
log. 21600	=	4, 3344537
		6, 6037792 num. = − 0, 0004016

Il secondo termine coincide con quello del n.° IV. della prima Parte, cioè . . . = 0, 0004860

Dunque l' illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000844

Dunque l' illuminazione intera . . . . = 0, 0001688 (*N*)

CASO XIII.

Depressione del centro solare = 13′, cioè $a = 90°. 13′$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{13}{16} = 90° - 54°. 21′ = 35°. 39′ = 2139′$. Sicchè $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cos.}\, a = - \frac{2139}{21600} \text{sen.}\, 13′$; cioè.

log. 2139 = 3, 3302108
log. sen. 13′ = 7, 5776686
0, 9078794
log. 21600 = 4, 3344537
6, 5734275 num. = − 0, 0003745

Il secondo termine coincide con quello del n.° III. Parte prima, onde si trova = 0, 0004282

Sicchè l' illuminazione del semisegmento = 0, 0000537
e però l' illuminazione intera . . . . = 0, 0001074 (*O*)

CASO XIV.

Depressione del centro solare = 14′, cioè $a = 90°. 14′$; onde $\varphi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{7}{8} = 90° - 61°. 3′ = 28°. 57′ = 1737′$. Dunque $\frac{\varphi'}{2\pi'} \text{cos.}\, a = - \frac{1737}{21600} \text{sen.}\, 14′$, cioè

log.

log. 1737 = 3, 2397998
log. sen. 14′ = 7, 6098530

0, 8496528
log. 21600 = 4, 3344537

6, 5151991 num. = — 0, 0003275
Il secondo termine si ha dal n.° II. della
prima Parte, cioè si trova . . . . = 0, 0003556

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000281
e l'illuminazione intera . . . . = 0, 0000562
(P)

CASO XV.

Depressione del centro solare = 15′, cioè $a = 90°. 15′$;

onde $\phi = 90° - \text{arc. sen.} \frac{15}{16} = 90° - 69°. 38' = 20°. 22'$

$= 1222'$; onde $\frac{\phi'}{2\pi'}$ cos. $a = - \frac{1222}{21600}$ sen. 15′, cioè

log. 1222 = 3, 0870712
log. sen. 15′ = 7, 6398160

0, 7268872
log. 21600 = 4, 3344537

6, 3924335 num. = — 0, 0002468
Il termine secondo della formola si ha dal
n.° I. della Parte prima, cioè si trova = 0, 0002557

Dunque l'illuminazione del semisegmento è . . . . = 0, 0000089
e l'illuminazione totale . . . . . . = 0, 0000178
(Q)

Per ritrovare l'illuminazione del semidisco solare superiore al diametro orizzontale quando il disco tocca col lembo inferiore l'orizzonte, convien riflettere, che

in tal caso è $a = 89°. 44'$, ed inoltre $\varphi = 90° = \frac{2}{4}\pi$. Quindi il primo termine della formola, cioè $\frac{\varphi}{2\pi}$ cos. a si cangia in $\frac{1}{4}$ cos. $a = \frac{1}{4} \times 0,0046542 = 0,0011635$. Il secondo termine poi della formola è il seguente

$$\begin{array}{rl} \text{log. sen. } a = & 9,9999953 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,8661264 \quad \text{num.} = 0,0007347 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante superiore è $= 0,0018982$, e l' illuminazione del semidisco superiore al diametro orizzontale è $= 0,0037964$.

Se ora si sottrae questa illuminazione del semidisco superiore da quella dell' intero disco, che è $0,0046542$, il residuo dà l' illuminazione del semidisco inferiore al diametro orizzontale, la quale in conseguenza sarà $= 0,0008578$. Dunque (n.° XVI parte I.) sta l' illuminazione del semidisco inferiore (nel caso che tocchi l'orizzonte) all' illuminazione del medesimo rovesciato, cioè avente il diametro sull' orizzonte come sta 8578 a 14694. Ciò presenta una specie di paradosso, perchè quando il semidisco ha il suo diametro sull' orizzonte tramanda più obbliqui que' raggi, che sono più copiosi, cioè quelli che emanano dalle sue parti più basse e più larghe, e meno obliqui i raggi meno copiosi, ovvero emananti dalle sue parti più alte e più anguste; ed il contrario precisamente succede nel semidisco inverso avente il semidiametro orizzontale in alto; perlochè sembrerebbe, che questo e non quello dovesse produrre una maggiore illuminazione; ed è anche assai strano, che questo eccesso sia più di tre quarti dell' illuminazione minore.

Un paradoſſo così nuovo ed inaſpettato merita, che vi ci fermiamo un po' ſopra, ed eſaminiamo, ſe anche nelle maggiori altezze del ſole ſopra l'orizzonte ſi trovi eſſer vero, che il ſemidiſco diritto del ſole mandi più luce ſulla terra, che non ne manda il ſemidiſco inverſo, intendendo per ſemidiſco diritto il ſuperiore al diametro orizzontale in tale data altezza del centro ſolare, e per ſemidiſco inverſo l'inferiore al diametro orizzontale quando il centro del ſole ſi è già inoltrato ad un'altezza maggiore della precedente di ſedici minuti.

I.

Suppongo adunque in primo luogo, che l'altezza del centro ſolare $= 89°. 44'$, cioè $a = 16'$, e quindi per ottenere l'illuminazione del quadrante ſuperiore al diametro orizzontale prendo $\phi = 90°$. Laonde $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. a

$= \frac{1}{4}$ ſen. $89°. 44' = \frac{1}{4} \times 0,9999892 = 0,2499973$.

Parimente

log. ſen. a = 7, 6678445
— 3, 1338689

4, 5339756 num. = 0, 0000034

Dunque l'illuminazione del quadrante $= 0,2500007$, e però l'illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,5000014$. Alzatoſi il centro ſolare di altri $16'$, cioè giunto al zenit, è evidente, che in tal ſituazione ogni ſemidiſco del ſole illumina l'orizzonte terreſtre egualmente, e conſeguentemente l'illuminazione del ſemidiſco *inverſo* è la metà di quella del diſco intero, cioè $= 0,5000000$, che è un poco minore della ritrovata pel ſemidiſco *diritto*. Suſſiſte adunque il paradoſſo di prima.

II.

Paſſo all' altezza del centro ſolare $= 45°$, cioè $a = 45°$, e piglio come prima $\phi = 90°$. Sicchè $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45° = \frac{1}{4} \times 0,7071068 = 0,1767767$. Inoltre

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 9,8494850 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,7156161 \quad \text{num.} = 0,0005195 \end{array}$$

Onde l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1772962$, e l' illuminazione del ſemidiſco *diritto* $= 0,3545924$.

Aſcenda ora il centro del ſole per altri $16'$, e trovisi in queſto ſtato l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore al diametro orizzontale, e queſta ſottraggaſi dall' illuminazione già nota di tutto il diſco; il reſiduo ſarà l' illuminazione del ſemidiſco inferiore, che è appunto l' *inverſo* riſpettivamente al ſemidiſco dianzi conſiderato. Fatta pertanto l' altezza del centro ſolare $= 45°.16'$, cioè $a = 44°.44'$; $\phi = 90°$; ſi deduce $\frac{\phi}{2\pi}$ coſ. $a = \frac{1}{4}$ ſen. $45°.16' = \frac{1}{4} \times 0,7103901 = 0,1775975$. Inoltre

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } a = & 9,8474542 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,7135853 \quad \text{num.} = 0,0005171 \end{array}$$

Dunque l' illuminazione del quadrante ſuperiore $= 0,1781146$, e l' illuminazione del ſemidiſco ſuperiore $= 0,3562292$. Ora queſta dee ſottrarſi da quella di tutto il diſco, la quale ſi trova immantinente con cercare il valore di coſ. a, a cui unicamente ſi riduce la noſtra formola generale con aſſumere $\phi = 2\pi$. Sicchè l'illuminazione di tutto il diſco ſi rinviene $= 0,7103901$,

e fatta quindi l'indicata ſottrazione proviene 0, 3541609 per l'illuminazione del ſemidiſco inferiore, cioè dell'*inverſo* riſpetto a quel di prima nell'altra ſtazione del centro ſolare. E qui pure ſi ſcorge, che il ſemidiſco *diritto* illumina più che l'*inverſo*.

Reſta finalmente a vedere, ſe ciò pur ſi verifica riguardo ad un ſegmento del diſco ſolare compreſo fra il diametro ed una corda parallela, conſiderando un tal ſegmento in due ſituazioni, prima col diametro giacente ſull'orizzonte terreſtre, che chiameremo ſegmento *diritto*, poi colla corda ſull'orizzonte e col diametro in alto, che diremo ſegmento *inverſo*. Suppongo la corda parallela diſtante dal diametro per la metà del raggio, ed eſſendoſi già ritrovata l'illuminazione generata dal ſemidiſco viſibile quando l'orizzonte taglia per mezzo il diſco ſolare, ſottraggo da eſſa l'illuminazione prodotta da quel ſegmento di detto ſemidiſco, che ha per ſaetta la metà del raggio, e col reſiduo ottengo l'illuminazione eccitata dal ſegmento *diritto* propoſto. Ma per avere in tal ſuppoſto l'illuminazione nata dal ſegmento della ſaetta $= \frac{1}{2}$, divenendo $a = 90°$, $\varphi = 60°$, ed annullandoſi il primo termine della noſtra formola, ſi ritrova pel valore del ſecondo termine

$$\begin{array}{rl} \text{log. ſen. } \varphi = & 9,\ 9375306 \\ - & 3,\ 1338689 \\ \hline & 6,\ 8036617 \quad \text{num.} = 0,\ 0006363 \end{array}$$

il qual numero duplicato, cioè 0, 0012726 eſprime l'illuminazione proveniente dal detto ſegmento, e queſta ſottratta dall'illuminazione 0, 0014694 del ſemidiſco viſibile laſcia un reſiduo 0, 0001968, che rappreſenta l'illuminazione del ſegmento *diritto* di cui ſi tratta. Per ritrovar poi quella del ſegmento *inverſo* è manifeſto che baſta dall'illuminazione del ſegmento

visibile, quando il centro del sole ha 8′ di altezza sopra l'orizzonte, sottrarre l'illuminazione del semicerchio superiore, e se quella, come è stato già dimostrato, è $= 0,0028240$, questa si determina come segue: Diventa in quest'ipotesi $a = 89°.52'$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, $\frac{\varphi}{2\pi}$

$\text{cos}.\, a = \frac{1}{4}\, \text{cos}.\, a = \frac{1}{4}\, \text{sen}.\, 8' = \frac{1}{4} \times 0,0023271 = 0,0005818$,

che sarà il valore del primo termine della nostra formola. Pel valore del secondo si ha

$$\begin{array}{rl} \log.\ \text{sen}.\ a = & 9,9999973 \\ - & 3,1338689 \\ \hline & 6,8661284 \end{array} \quad \text{num.} = 0,0007347.$$

Dunque l'illuminazione del quadrante superiore $= 0,0013165$, e del semicerchio $= 0,0026330$. Sottraendo quest'ultima da $0,0028240$ resta $0,0001910$ per l'illuminazione del segmento *inverso*, la quale in conseguenza è minore che non è quella del semidisco *diritto*. Ed ecco, che l'indicato paradosso anche in questo caso s'incontra.

Chiuderò questo breve Scritto con un famoso Problema relativo alla misura della luce proposto da *Newton* nel suo Trattato delle *Flussioni e Serie Infinite* in questi termini: *To determine such a part of a Spherical Superficies, which can be illuminated, in its farther part, by light coming from a great distance, and which is refracted by the nearer Hemisphere.* Siccome nè egli, nè altri ch' io sappia ha data la soluzione d' un tal Problema, non eccettuando neppure il rinomato *Colson*, che illustrò con un ampio comento quell' operetta di *Newton*, ho creduto esser pregio dell'opera d'intraprenderne la disamina, e di metter qui sotto gli occhi del Pubblico il seguente scioglimento.

PROBLEMA.

Determinare quella tal parte poſteriore d' una ſuperficie sferica, che può eſſere illuminata dalla luce vegnente da gran lontananza e rotta nell' emisfero anteriore.

Soluzione.

Sia QN uno de' raggi ſcagliati da lungi contro il globo MNS, i quali per l' immenſa diſtanza, da cui partono, ſi conſiderano come tra sè paralleli. Tagliato il globo con un piano, che paſſa pel ſuo centro C e pel raggio QN, e nella ſezione circolare MNS condotto il diametro SM parallelo ai raggi di luce, ſi ſupponga, che il raggio QN rompendoſi in N pieghi nella direzione NP, ed incontri la circonferenza del cerchio in O, ed in P il diametro prolungato; ſicchè guidato il ſemidiametro CN prodotto in H ſia QNH, ovvero NCM l' angolo d' incidenza, e CNP l' angolo di rifrazione. Se ora ſi mena la perpendicolare NB ſul diametro SM, e le ſotteſe SO, MN; e ſi aſſume $= n$ il rapporto del ſeno dell' angolo d' incidenza al ſeno dell' angolo di refrazione; il ſemidiametro $= r$; la retta $CP = x$; è

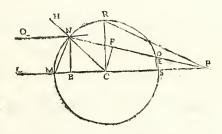
facile accorgersi, che SO è la corda della metà di quel segmento sferico, la di cui superficie curva viene illuminata da tutti que' raggi, che cadendo sull' emisfero anteriore occupano di qua e di là dal punto di mezzo M una larghezza doppia dell' arco MN. Siccome poi allorchè il raggio QN è estremamente vicino al diametro SM, la corda SO riesce piccolissima, e questa va poi crescendo quando il raggio QN si fa più lontano da MS, e ciò sino ad un certo limite, oltre il quale la detta corda decresce seguitando a crescere la distanza del raggio; quindi apparisce, che la questione si riduce a ritrovare il *massimo* segmento della superficie posteriore, il quale in tali circostanze possa ricevere la luce rotta nell' emisfero anteriore. Osservo pertanto, che nel triangolo CNP il lato NP sta a CP come il seno dell' angolo NCP, ovvero anche del suo supplemento NCM al seno dell' angolo CNP, cioè come $n : 1$; e però $PN = nx$. Per la proprietà del triangolo si ha pure $CN^2 = CP^2 + PN^2 - 2PC.PB$, ovvero $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2x.PB$; e quindi $PB = \frac{x^2 + n^2x^2 - r^2}{2x}$, $MB = PM - PB = r + x + \frac{r^2 - n^2x^2 - x^2}{2x}$

$= \frac{r^2 + 2rx + x^2 - n^2x^2}{2x}$. E poichè per la proprietà del cerchio $MN^2 = SM.MB$, surrogato il valore or ritrovato ne deriva $MN^2 = \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x}$. Essendo inoltre simili i due triangoli PSO, PNM a motivo del comune angolo P, e degli eguali angoli POS, PMN misurati dalla metà dell' arco SON, si ha l' analogia $PN^2 : NM^2 :: PS^2 : SO^2$, vale a dire

$n^2x^2 : \frac{r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2}{x} :: (x - r)^2 : SO^2$. Dunque

$SO^2 =$

$SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2)$. Ora dovendo essere massimo il segmento della superficie illuminata, e conseguentemente massima la corda SO del semisegmento, come pure il quadrato di essa corda, si ugua-

glierà a zero il differenziale di questo quadrato, e si otterrà $\left(\frac{2(x-r)x-3(x-r)^2}{n^2x^4}\right)(r^3+2r^2x+rx^2-n^2rx^2)\,dx$ $+\frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(2r^2+2rx-2n^2rx)\,dx = 0$, la qual espressione divisa per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^3}$ si cangia in

$\left(\frac{3r-x}{x}\right)(r^2+2rx+x^2-n^2x^2)+(x-r)(2r+2x-2n^2x)$ $=0$, e questa si riduce all' equazione cubica x^3+rx^2 $-\frac{3r^2}{n^2-1}x-\frac{3r^3}{n^2-1}=0$. Bastano pochi momenti di riflessione per accorgersi, che tal equazione si risolve nelle due $x+r=0$

$$x^2-\frac{3r^2}{n^2-1}=0;$$

dalle quali si ricavano le tre seguenti radici

$$1°.\ x = -r$$

$$2°.\ x = -r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

$$3°.\ x = \ \ r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$$

Le due prime radici non appartengono alla questione attuale, atteso che la retta CP nelle presenti circostanze non può essere che positiva: e però questa retta viene appunto espressa dalla terza radice positiva $x = r\sqrt{\frac{3}{n^2-1}}$. Surrogato poi questo valore in quello di SO dianzi trovato, si giugne a conoscere la corda del semisegmento illuminato, e quindi l' ampiezza o l' arco di tutto il segmento. Il che era ecc.

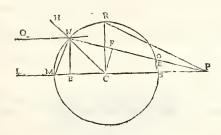
Se il globo rifrangente sarà di vetro, sicchè il *rapporto della refrazione*, ovvero n sia presso a poco $= \frac{3}{2}$, nascerà $x = r\sqrt{\frac{12}{5}} = 1,5492r$; $x^2 = 2,4r^2$; $n^2x^2 = 5,4r^2$; $(x-r)^2 = 0,30162064r^2$; $x^3 = 3,7181$; $n^2x^3 = 8,3657$. Laonde sostituendo questi valori nell'espressione di $SO^2 = \frac{(x-r)^2}{n^2x^3}(r^3 + 2r^2x + rx^2 - n^2rx^2)$ si ritrae $SO^2 = 0,039602185 1r^2$, ed estraendo la radice quadrata nasce finalmente $SO = 0,199r$. Dunque l' arco $SEO = 11°.\ 26'$, e conseguentemente l' ampiezza della cupola sferica illuminata dalla luce refratta nell' emisfero anteriore ha per misura un arco di $22°.\ 52'$.

Non voglio qui tacere una singolarità, che nella soluzione di questo Problema può facilmente incontrarsi, e che può essere cagione d' inciampo, come lo fu per me in sulle prime. Tirisi il perpendicolo CF sopra il raggio refratto NP; ed essendo $CN^2 = CP^2 + PN^2 -$

$2NP.PF$, cioè $r^2 = x^2 + n^2x^2 - 2nx.PF$, se ne deduce $PF = \frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}$; e perciò $CF^2 = CP^2 - PF^2 = x^2$

$$- \left(\frac{x^2+n^2x^2-r^2}{2nx}\right)^2$$

$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4n^2x^2}.$$ E poichè NB, e CF sono i seni degli angoli d'incidenza e di refrazio-

ne riferiti al seno tutto CN, nasce quindi $NB^2 = n^2.CF^2$

$$= \frac{2r^2x^2+2n^2r^2x^2+2n^2x^4-x^4-n^4x^4-r^4}{4x^2}$$; e però CB^2

$$= r^2 - NB^2 = \frac{x^4+n^4x^4+r^4+2r^2x^2-2n^2r^2x^2-2n^2x^4}{4x^2}.$$

Prendo la radice quadrata di questa quantità, e ritrovo $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$, nella qual espressione si dee far uso o dei soli segni superiori in tutti i termini, o dei soli inferiori. Essendo poi $BM = r - CB$

$$= \frac{2rx \mp n^2x^2 \pm x^2 \pm r^2}{2x}$$, ed $MN^2 = SM.MB$, fatte le sostituzioni de' valori di SM, ed MB, si otterrà MN^2

$= \frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}$. Ma i triangoli ſimili *PSO*, *PMN* ſomminiſtrano l' analogia $PN : NM :: PS : SO$, cioè $nx : \sqrt{\left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)} :: x - r : SO$; e conſeguentemente $SO^2 = \left(\frac{x-r}{nx}\right)^2 \left(\frac{2r^2x \mp n^2rx^2 \pm rx^2 \pm r^3}{x}\right)$: dunque differenziando queſta eſpreſſione, annullando il differenziale, e poſcia dividendo per $\frac{(x-r)rdx}{n^2x^2}$ naſcerà il riſultato $\frac{2}{x}\left(2r \mp n^2rx \pm rx \pm \frac{r^3}{x}\right) + (x-r)\left(\pm 1 \mp n^2 \mp \frac{r^2}{x^2}\right) = 0$, da cui proviene l' equazione cubica di queſta forma $x^3 + rx^2 - \frac{(4 \mp 1)r^2}{\pm n^2 \mp 1}x \mp \frac{3r^3}{\pm n^2 \mp 1} = 0$.

Se ora ne' termini di queſta affetti dal ſegno doppio ſi adopera il ſegno ſuperiore, compariſce l' equazione precedentemente ritrovata $x^3 + rx^2 - \frac{3r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$; ma ſe all' oppoſto ſi vuole aver riguardo al ſegno inferiore l' equazione ſi cangia in queſt' altra $x^3 + rx^2 + \frac{5r^2x}{n^2-1} - \frac{3r^3}{n^2-1} = 0$, la quale riſoluta dà tutt' altre radici che la precedente.

Queſta ſingolarità imbarazzante parmi che ammetta la ſeguente interpretazione. Si meni al diametro *MS* il ſemidiametro *CR* perpendicolare, e ſi congiunga *RP*; ſicchè $RP^2 = r^2 + x^2$. Se pertanto nel valore biforme di $CB = \frac{\pm n^2x^2 \mp x^2 \mp r^2}{2x}$ ſi fa uſo del ſegno inferiore, riſulta *CB* di valor negativo, poichè NP^2 oſſia n^2x^2 è manifeſtamente maggiore di PR^2, ovvero di $r^2 + x^2$.

Siccome poi per conseguire il valore di BM si è sottratto dal semidiametro CM il valore di CB; dovrà BM risultar maggiore del semidiametro qualora CB sia negativo. Ma nelle circostanze del presente Problema è visibilmente assurdo, che MB superi il semidiametro della sfera rifrangente. Dunque non dee recar maraviglia, che da un tal assurdo sia derivata un' equazione, le di cui radici non possono somministrare che un' erronea soluzione del Problema.

SOPRA LA DISCESA
DE' GRAVI
Per la conveſſità de' Canali curvilinei.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Profeſſore di Matematica ſublime nell' Univerſità di Pavia.

LA conſiderazione degli accidenti del moto ne' gravi diſcendenti per la concavità delle curve, o de' canali curvilinei ſituati in piani verticali ha arricchito la Scienza generale del moto di molto belle ed inaſpettate verità, che ora formano nelle opere de' moderni Geometri una parte non ultima della Dinamica. Ma la diſceſa de' gravi non per la concavità, ma per la conveſſità delle curve, o de' canali curvilinei giacenti in piani verticali non ſembra fino ad ora eſſere ſtata l'oggetto delle ſpeculazioni de' Geometri, e indarno ſi cercherebbe di ciò alcun cenno ne' Trattati di Meccanica anche più eſteſi. Comunque però voglia interpretarſi un tal ſilenzio degli Scrittori, queſto genere di moto ha alcune proprietà che lo diſtinguono, e che pajono meritare l'eſame e lo ſtudio de' coltivatori della Dinamica. La principale di queſte proprietà conſiſte nel diſtaccarſi che ordinariamente fa un corpo dalla conveſſità della curva o del canale dopo aver traſcorſo un certo ſpazio, il quale trovaſi più o meno grande ſecondo la diverſità della curva per cui il grave diſcende, e del punto da cui comincia la diſceſa. Frut-

to di picciolo ſtudio intorno a sì curioſo argomento ſono i ſeguenti Teoremi, de' quali ommetto per ora la dimoſtrazione.

Ognuno intenderà, che qui ſi preſcinde dalle reſiſtenze del mezzo, e dallo sfregamento, e che ſi concepiſce la maſſa del grave ridotta e concentrata in un punto.

TEOREMA I.

Se in un cerchio verticalmente eretto per la ſua conveſſità ſcavata in forma di canale nella ſemicirconferenza ſuperiore al diametro orizzontale diſcende un grave partendo dalla quiete da qualunque punto del canale, queſto ſi diſtacca dal canale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza (cioè la verticale compreſa tra le due orizzontali guidate per gli eſtremi dell'arco) è ſempre un terzo dell'altezza di detto arco continuato ſino al diametro orizzontale.

TEOREMA II.

Nella parabola conica ſituata coll'aſſe verticale, un grave diſcendente per la ſua conveſſità ſcanalata, e che incomincia a muoverſi da un punto qualunque del canale parabolico, ſeguita ſempre a muoverſi lungo il canale ſenza mai diſtaccarſene o abbandonarlo.

TEOREMA III.

Situata l'elliſſe conica coll'aſſe maggiore verticale, ed eſſendo quell'aſſe $= 2a$, il ſuo parametro $= 2p$, un grave, che partendo dal vertice diſcende per la ſua conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo aver traſcorſo un arco, la di cui altezza viene rappreſentata dalla ra-

dice della ſeguente equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2p}{a-p}x + \frac{pa^3}{a-p} = 0$.
La ſteſſa equazione cubica ſi ritrova anche quando l'aſſe verticale dell'elliſſe è il minore, e il corpo parte dal vertice di queſt'aſſe, col ſolo divario, che in queſto caſo a indica il ſemiaſſe minore, p il ſemiparametro di queſt'aſſe, x l'aſciſſa del medeſimo.

Se poi il grave invece di cominciare il ſuo moto dal vertice dell'elliſſe ſi ſpicca da un punto più baſſo diſtante per l'intervallo b dalla orizzontale che paſſa pel vertice, convien riſolvere l'equazione $x^3 - 3ax^2 - \frac{3a^2px}{a-p} + \frac{pa^3+2a^3b}{a-p} = 0$ per ottenere il valore dell'aſciſſa corriſpondente a quel punto dell'elliſſe, che è il punto del diſtacco.

TEOREMA IV.

Per l'iperbola conica tenuta col ſuo aſſe traverſo verticale, con un procedere affatto ſimile a quello del Teorema precedente, s'incontra l'equazione cubica $x^3 + 3ax^2 + \frac{3a^2px}{a+p} + \frac{pa^3}{a+p} = 0$, la di cui radice x ſarà l'aſciſſa dell'arco iperbolico, deſcritto il quale il corpo, che incomincia a diſcendere dal vertice, ſi diſtacca dalla conveſſità del canale. Ma qui un tal diſtacco non può mai aver luogo, come pure avviene nella parabola, avvegnachè eſſendo poſitivi tutti i termini della predetta equazione, il valor reale di x non può eſſere che negativo; il che nell'ipoteſi, in cui ſiamo, è un aſſurdo. Dunque il grave che diſcende per la conveſſità d'un canale iperbolico reſta ſempre unito al canale anche protratto in infinito ſenza ſtaccarſene mai. Lo ſteſſo accade anche quando il corpo comincia a diſcendere da un punto più baſſo del vertice.

TEOREMA

TEOREMA V.

Se la figura del canale è quella d' una parabola di genere superiore rappresentata dall' equazione $y^m = x$, essendo m un numero intero > 2, il grave che si spicca dal vertice, e si rotola giù pel convesso del perimetro parabolico, si distacca allor quando ha scorso un arco, che ha per altezza o ascissa la linea $\left(\frac{1}{m(m-2)}\right)^{\frac{m}{2m-2}}$, la quale altezza nella parabola di terzo grado è $= \frac{1}{\sqrt[4]{(27)}}$, in quella di quarto grado è $= \frac{1}{4}$, ed in quella di quinto è $= \frac{1}{\sqrt[8]{759375}}$, e così discorrendo.

Che se il grave in vece di spiccarsi dalla sommità del canale partirà da un punto più basso, sicchè la distanza di questo punto dalla retta orizzontale che passa per la sommità sia $= a$, allora per determinare il punto del distacco converrà risolvere quest' equazione $x^{\frac{2m-2}{m}} - \frac{2(m-1)a}{m-2} x^{\frac{m-2}{m}} - \frac{1}{m(m-2)} = 0$, la di cui radice rappresenta l' altezza dell' arco parabolico, dal quale sottratto l' arco dell' altezza a resta quello che il grave trascorre senza staccarsene.

TEOREMA VI.

Se la figura del canale è una delle parabole espresse dall' equazione $y^m = x^n$ ancora più generale della precedente, e supposto che il corpo incominci a rotolare

dalla sommità dell'asse verticale giù per la convessità si trova $\left(\frac{n^2}{m(m-2n)}\right)^{\frac{m}{2m-2n}}$ per l'altezza di quell'arco, finito il quale il corpo, che lo ha percorso discendendo, si distacca dal canale.

Qualora poi il grave incominci il suo moto da un punto più basso del vertice, e sia a la depressione verticale di questo luogo, si ritrova il punto del distacco mediante la risoluzione dell'equazione
$x^{\frac{2m-2n}{m}} - \frac{2(m-n)a}{m-2n} x^{\frac{m-2n}{m}} - \frac{n^2}{m(m-2n)} = 0$, dalla di cui radice sottraendo la quantità a si ottiene l'altezza dell'arco, al termine del quale giunto che sia il corpo, questo abbandona il canale.

TEOREMA VII.

In tutte le ellissi, ed iperbole superiori rappresentate dall'equazione generalissima $y^{m+n} = f(a \mp x)^n x^m$, ove a esprime l'asse traverso, f una grandezza costante dipendente dalla proprietà di queste curve, il corpo che parte dalla sommità dell'asse verticale, e discende per la convessità della curva, non se ne distacca se non dopo aver passato un arco, il quale ha per altezza la radice dell'equazione $2mn(m+n)a^2 x^{\frac{2n}{m+n}} (a \mp x)^{\frac{m-n}{m+n}}$, $= (ma \mp (m+n)x)\left((m+n)^2 x^{\frac{2n}{m+n}} (a \mp x)^{\frac{2m}{m+n}} + m^2 g^2 a^2 \mp 2m (m+n) a g^2 x + (m+n)^2 g^2 x^2\right)$, e prosegue poi liberamente il suo moto in una parabola conica secondo la nota legge dei projetti.

TEOREMA VIII.

Sia l'iperbola equilatera (*fig. IX*) *FOM* fra gli asintoti ortogonali *AC*, *AB*, de' quali *AC* sia verticale, *AB* orizzontale, e guidata per la sommità *O* la verticale *ON* parallela all'asintoto *AC*, si piglino in essa le ascisse $OH = x$, e si ponga il lato della potenza dell' iperbola *OS* ovvero $SA = 1$. Un grave, che si spicca dalla sommità *O*, e discende per la convessità *OEF* dell' iperbola, non si distacca da essa se non dopo aver corso per un arco, la di cui altezza viene rappresentata dalla radice dell'equazione di quarto grado

$$x^4 + \frac{8}{3}x^3 + 2x^2 * - \frac{2}{3} = 0.$$

Che se il grave in vece di spiccarsi dal vertice incomincia a discendere da un punto più basso distante per l'intervallo *a* dalla orizzontale che passa pel vertice, si presenta quest'altra equazione biquadratica da risolversi $x^4 + \frac{8-4a}{3}x^3 + (2-4a)x^2 - 4ax - \left(\frac{2+4a}{3}\right) = 0$, la di cui radice dà l'altezza di quell'arco iperbolico, dal quale togliendosi il primo arco di altezza *a* il residuo è appunto quello, al di cui termine giunto che sia il corpo, si disimpegna dalla curva, e prosegue il suo cammino con moto libero.

TEOREMA IX.

Nella parabola Apolloniana (*fig. X*) *ANM* descritta col parametro *p*, e situata in un piano verticale, ma coll'asse *MO* orizzontale, dal punto dato *A*, da cui il grave si lascia cadere giù pel perimetro convesso *ANM*, condotta la verticale $AB = \lambda$, e prese su questa le ascisse $AF = x$, è mestieri risolvere l'equazione cubica

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ per determinare l'altezza AF di quel tal arco AN, al di cui eſtremo N giunto che ſia il grave partito da A, ſi libera dalla curva, ed abbandona il canale, che ſi ſuppone ſempre aperto eſteriormente.

Qualunque volta il grave parte da un punto più baſſo di A, e diſtante per l'intervallo a dalla retta orizzontale guidata per A, ritrova l'equazione

$$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 - \frac{1}{2}p^2 a = 0,$$

e la radice di queſta dà l'altezza dell'arco, dal quale ſottratto l'arco di altezza a il reſiduo è appunto il ricercato, vale a dire quello, il di cui punto infimo è il punto del diſtacco.

Se nell'ipoteſi della gravità coſtante ſi vuole collocato il corpo nella conveſſità della parabola in punto infinitamente diſtante dal vertice M, per modo che la verticale λ condotta da quel punto all'aſſe orizzontale acquiſti un valore infinito, allora ſi fa manifeſto, che nell'equazione

$x^3 - 3\lambda x^2 + \left(3\lambda x^2 + \frac{3}{4}p^2\right)x - \lambda^3 - \frac{1}{4}\lambda p^2 = 0$ il valore della radice x non può eſſere che infinito, altrimenti verrebbe l'aſſurdo, che $-\lambda^3 = 0$, ovvero $\lambda = 0$, cioè l'infinito ſarebbe uguale a zero. Perlochè il corpo, che parte da un punto infinitamente lontano dalla ſommità della parabola verticalmente collocata, ma coll'aſſe orizzontale, e diſcende per la conveſſità, cor-

re uno ſpazio infinito prima di ſtaccarſi dal canale, o piuttoſto non ſi diſtacca mai.

TEOREMA X.

Nella Cicloide ſituata coll'aſſe verticale il grave, che dalla ſua ſommità diſcende per la conveſſità ſcanalata, ſe ne diſtacca dopo eſſere arrivato al punto, che reſta ſotto il vertice un ſemidiametro del circolo generatore. E generalmente da qualunque punto incominci il corpo a diſcendere, eſſo abbandona il canale cicloidale dopo aver deſcritto un arco, la di cui altezza è la metà di quella dello ſteſſo arco continuato ſino alla baſe orizzontale della Cicloide.

TEOREMA XI.

Se vuolſi che il corpo partendo (*fig. XI*) dal vertice *A* diſcenda lungo la conveſſità ſcanalata della Ciſſoide *ACO* riferita all' aſſe *AM* parallelo all' aſintoto verticale *FN*, e ſi chiamano al ſolito x, y le coordinate ortogonali *AB*, *BC*, a il ſemidiametro *AP* del cerchio generatore; il punto del diſtacco del corpo ſi trova eſſer quello, a cui corriſponde $y = \frac{8}{9} a$, oſſia il corpo ſi diſtacca dal canale dopo aver paſſato un arco, che ha per ordinata otto noni del raggio del cerchio generatore.

E ſe il corpo parte da un punto inferiore al vertice *A*, e diſtante dalla orizontale *AF* d'una data quantità b, la radice dell' equazione cubica $y^3 - \frac{16a}{9} y^2 + \frac{64a^2 + 36b^2}{81} y - \frac{8ab^2}{9} = 0$ dà il valore dell' ordinata appartenente a quell' arco di ciſſoide, dal quale ſe ſi

ſottrae l' arco compreſo fra il vertice ed il principio del moto ſi ha l' arco ricercato, al di cui termine giunto che ſia il grave, abbandona la curva.

TEOREMA XII.

Sia (*fig. XII*) *OBS* la logaritmica ſituata in un piano verticale, col ſuo aſintoto *MN* al di ſopra di eſſa ed orizzontale. Si ſupponga la ſottangente coſtante $= 1$, e la *FB* normale all' aſintoto ed eguale alla ſottangente ſi produca indefinitamente in *P*, e ſi prendano le ordinate ortogonali $BI = x$, $IS = y$. Ciò ſtante, un corpo, che incomincia a diſcendere dal punto *B* (che chiameremo vertice) lungo la conveſſità *BS* della logaritmica, ſi allontana dalla curva dopo aver percorſo un arco, la di cui altezza o aſciſſa $x = \sqrt{2}$, cioè uguaglia la diagonale del quadrato deſcritto ſopra la ſottangente.

Qualora poi il mobile parta da un punto inferiore al vertice *B*, e la diſtanza di tal punto dalla retta orizzontale guidata per *B* ſia $= a$, il mobile ſi diſtacca dalla curva dopo eſſer caduto da un arco, che ha per altezza $x - a = \sqrt{\left(1 + (a + 1)^2\right)}$, cioè l' ipotenuſa d' un triangolo rettangolo, un cateto del quale è la ſottangente della logaritmica, l' altro cateto è la ſomma di queſta ſottangente e della diſtanza del principio del detto arco dalla orizzontale guidata pel vertice.

SOPRA I LOGARITMI

DELLE QUANTITA' NEGATIVE;

E SOPRA GL' IMMAGINARJ.

Del P. Gregorio Fontana Delle Scuole Pie Professore di Matematica sublime nell' Università di Pavia.

La gran controversia intorno alla qualità del valore de' logaritmi delle quantità negative, che tiene tuttora divisi i più insigni Geometri del secolo, è stata dall' immortale Sig. *Euler* pressochè fissata e decisa mercè il famoso Teorema da esso dimostrato, che *il logaritmo di qualunque quantità negativa ha un' infinità di valori, de' quali uno solo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualsivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma solamente immaginarj*. Siccome però un tal Teorema, veramente originale, e degno della penetrazione di quel sommo Geometra, viene da lui dimostrato nella sua profonda Dissertazione sopra l' indicata controversia con un metodo assai lungo e prolisso, il quale inoltre procedendo per esponenti infiniti ed infinitesimi lascia perciò nello spirito del leggitore non so qual nebbia e dubbietà, che dà luogo a mille scrupoli ed equivoci non così facili a dileguarsi, e rimane anco esposto alle eccezioni e agli attacchi del Sig. *D' Alembert*; quindi è, che non si giudicherà per avventura cosa affatto inutile ed intempestiva il proporre qui con un metodo il più semplice e rigoroso, che mai possa desiderarsi,

tre differenti breviſſime dimoſtrazioni del ſuddetto Teorema, e dedurne poſcia come tanti Corollarj tutte le principali proprietà delle formole immaginarie ed eſponenziali. Sia dunque

TEOREMA.

Il logaritmo di qualunque quantità poſitiva ha un' infinità di valori, de' quali uno ſolo è reale, e tutti gli altri immaginarj; ed il logaritmo di qualſivoglia quantità negativa ha un numero infinito di valori ma ſolamente immaginarj.

DIMOSTRAZIONE I.

I. Deſcritto un cerchio col ſemidiametro $= 1$, dicaſi ϕ l'arco, a cui corriſponde l'aſciſſa o il ſenoverſo $= x$; e ſi avrà, come è noto, $d\phi = \frac{dx}{\sqrt{(2x - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}$, cioè $d\phi\sqrt{-1} = \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}}$

$$= \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}} \left(\frac{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}}{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}} \right) = \frac{\frac{xdx - dx}{\sqrt{(x^2 - 2x)}} + dx}{x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)}}.$$

Oſſervo, che il numeratore di queſta frazione è il differenziale del denominatore; e però paſſando agl' integrali naſce $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(x - 1 + \sqrt{(x^2 - 2x)} \right) + \text{coſt.}$ E perchè ſvaniſcono inſieme ϕ ed x, riſulta $\text{coſt.} = -\log. -1$. Dunque $\phi\sqrt{-1} = \log.\left(1 - x - \sqrt{(x^2 - 2x)}\right)$. Piglio ora il ſeno verſo x uguale a tutto il diametro 2, e nominando π la ſemicirconferenza del cerchio, oſſervo, che al ſeno verſo $= 2$ corriſpondono tutti gli archi ſeguenti $\pm\pi$; $\pm 3\pi$; $\pm 5\pi$; $\pm 7\pi$; ecc. in infinito, rappreſentati generalmente da $\pm(2n - 1)\pi$, dove n è un numero intero qualunque dal zero fino all'infinito. In queſta ipoteſi adunque ſi ha $\pm(2n - 1)\pi\sqrt{-1} = \log. -1$. E però poſta A una qualſivoglia grandezza, il di cui logaritmo

logaritmo naturale ſia $= a$, ſiccome ſi ha log. $- A =$ log. $A +$ log. $- 1$, ſarà quindi log. $- A = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è una parte del Teorema.

II. Per dimoſtrare l' altra parte, ſi ponga mente, che qualora ſi prende il ſeno verſo $x = 0$, l' arco ϕ acquiſta un' infinità di valori, cioè $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi$; ecc. in infinito, eſpreſſi generalmente da $\pm 2n\pi$, dove n rappreſenta qualunque numero intero dal zero fino all' infinito. In queſto ſuppoſto adunque ſi otterrà $\pm 2n\pi\sqrt{-1}$ $=$ log. 1. Eſſendo poi log. $A =$ log. $A +$ log. $1 = a +$ log. 1, ſarà in conſeguenza log. $A = a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Dal che ſi ſcorge, che degl' infiniti valori $a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$ uno ſolo è reale, cioè quello che corriſponde ad $n = 0$, e tutti gli altri infiniti ſono immaginarj; che era l' altra parte del Teorema.

DIMOSTRAZIONE II.

I. Prendaſi x pel coſeno dell' arco ϕ, e ſi avrà dalla nota proprietà del cerchio $d\phi = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

$$= -\frac{dx}{\sqrt{-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)}}; \text{ onde } d\phi\sqrt{-1} = -\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$= -\frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)}}\left(\frac{x+\sqrt{(x^2-1)}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}\right) = \frac{\overline{\frac{xdx - dx}{\sqrt{(x^2-1)}}}}{x+\sqrt{(x^2-1)}}.$$

Laonde pigliando gl' integrali ſarà $\phi\sqrt{-1} = -$ log. $\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right)$ ſenza aggiunta di coſtante, perchè ſi annullano i due membri dell' ugualtà quando $x = 1$. Sicchè proviene $\phi\sqrt{-1} = -$ log. $\left(x+\sqrt{(x^2-1)}\right) =$ log. $\frac{1}{x+\sqrt{(x^2-1)}} =$ log. $\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)$. Se pertanto ſi aſſume il coſeno $x = -1$, acquiſta l' arco corriſpondente ϕ tutti i ſeguenti infiniti valori $\pm\pi; \pm 3\pi; \pm 5\pi$; ecc.

in infinito espressi da $\pm(2n-1)\pi$. Ma nell' ipotesi di $x=-1$ diventa $\log.\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=\log.-1$. Dunque $\log.-1=\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. E però $\log.-A=\log.A+\log.-1=a+\log.-1=a\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che è un valore infinitiforme, ma sempre immaginario.

II. Qualora poi pigliasi il coseno $x=1$, è noto, che a tal coseno corrispondono gli archi $0;\pm2\pi;\pm4\pi;\pm6\pi$; ecc. in infinito, che vengono rappresentati dall' espressione $\pm2n\pi$, nella quale n significa qualunque numero dal zero fino all' infinito. Ma in questo assunto di $x=1$, trovasi $\log.\left(x-\sqrt{(x^2-1)}\right)=\log.1$. Dunque $\pm2n\pi\sqrt{-1}=\log.1$. Quindi $\log.A=\log.A+\log.1=a\pm2n\pi\sqrt{-1}$, valore infinitiforme, ed unicamente reale nel solo caso di $n=0$, ed in tutti gli altri casi immaginario.

DIMOSTRAZIONE III.

Chiamo φ l' arco di cerchio descritto col raggio 1, t la tangente, s il seno, c il coseno. Avremo pertanto $d\varphi=\frac{dt}{1+t^2}=\frac{dt}{(1+t\sqrt{-1})(1-t\sqrt{-1})}=\frac{\frac{1}{2}dt}{1+t\sqrt{-1}}+\frac{\frac{1}{2}dt}{1-t\sqrt{-1}}$; ed integrando $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$ senza costante, perchè posto $t=0$, si annullano insieme i due membri dell' ugualtà. Posto in luogo di t il suo valore $\frac{s}{c}$, si ha $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\frac{c+s\sqrt{-1}}{c-s\sqrt{-1}}$, e moltiplicando il numero di questo logaritmo sotto e sopra per $c+s\sqrt{-1}$ nasce $\varphi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log.\left(c+s\sqrt{-1}\right)^2$ $=\frac{1}{\sqrt{-1}}\log.\left(c+s\sqrt{-1}\right)$. Dunque finalmente $\varphi\sqrt{-1}=\log.(c+s\sqrt{-1})$. Prendo ora $c=1$, $s=0$, e chiamo

π la ſemicirconferenza del cerchio: è principio notiſſimo della Trigonometria, che al coſeno 1, e ſeno *zero* corriſpondono tutti gli archi ſeguenti $0; \pm 2\pi; \pm 4\pi; \pm 6\pi$; ecc. in infinito, ovvero $0; \pm 2n\pi$, denotando n tutti i numeri naturali poſitivi. Dunque in queſt' ipoteſi la noſtra ſormola diventerà $\log. 1 = 0$, e $\log. 1 = \pm 2n\pi\sqrt{-1}$. Dunque eſſendo A qualunque grandezza poſitiva, e il ſuo logaritmo $= a$, ſi avrà $\log. A = \log. 1A = \log. A + \log. 1 = a + 0$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

cioè il logaritmo di A avrà infiniti valori, uno ſolo reale a, e tutti gli altri immaginarj $a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$, che è il primo punto. Paſſo al ſecondo, e fiſſo $c = -1$, $s = 0$, e rifletto, che al coſeno -1 e al ſeno *zero* corriſpondono infiniti archi, che ſono i ſeguenti $\pm\pi$; $\pm 3\pi; \pm 5\pi; \pm 7\pi$; ecc., ovvero $\pm(2n-1)\pi$. In queſta nuova ipoteſi di $c = -1$, $s = 0$, la noſtra ſormola adunque ſi trasforma in queſt' altra $\log. -1 = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}$. Quindi eſſendo $\log. -A = \log. -1A = \log. A + \log. -1 = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$, ſi vede tantoſto, che il logaritmo della quantità negativa $-A$ ha un' infinità di valori tutti immaginarj rappreſentati dalla forma $a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}$; che era il ſecondo punto. Dunque I. $\log. A = a$

$$a \pm 2n\pi\sqrt{-1}$$

$$\text{II. } \log. -A = a \pm (2n-1)\pi\sqrt{-1}.$$

Per ritrovare poi con queſto ſteſſo metodo i logaritmi di qualſivoglia grandezza immaginaria baſta por mente alla forma $a + b\sqrt{-1}$, alla quale il Sig. *D' Alembert* ha dimoſtrato il primo ridurſi tutte le quantità immaginarie più complicate, denotando a e b grandezze reali. Si ha dunque a determinare il valore di $\log. (a + b\sqrt{-1})$: Si deſcriva un cerchio col raggio $= 1$, e ſi prenda in eſſo l'arco θ, la di cui tangente ſia $\frac{b}{a}$, e

però la fecante $= \sqrt{(1 + \frac{b^2}{a^2})} = \frac{1}{a}\sqrt{(a^2 + b^2)}$, il feno $= \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, il cofeno $= \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$. Dunque fen. $\theta = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $b = \sqrt{(a^2+b^2)}$ fen. θ; e così cof. $\theta = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, $\sqrt{(a^2+b^2)}$ cof. $\theta = a$. Dunque log. $(a+b\sqrt{-1})$ $=$ log. $(\text{cof.}\,\theta + \text{fen.}\,\theta\sqrt{-1})(\sqrt{(a^2+b^2)}) = \frac{1}{2}$ log. (a^2+b^2) $+$ log. (cof. $\theta +$ fen. $\theta\sqrt{-1}$). Ma fi è precedentemente fatto vedere log. (cof. $\theta +$ fen. $\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}$. Dunque finalmente fi avrà log. $(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}$ log. (a^2+b^2) $+\theta\sqrt{-1}$, effendo θ l' arco di cerchio defcritto col raggio 1, e dotato della tangente $\frac{b}{a}$. Qui pure offervo, che effendo infiniti gli archi dotati della tangente $\frac{b}{a}$, cioè $\theta; \theta\pm\pi; \theta\pm 2\pi; \theta\pm 3\pi; \theta\pm 4\pi; \theta\pm 5\pi$; ecc. offia in generale $\theta\pm n\pi$, ne viene in confeguenza, che infiniti fono i valori di log. $(a+b\sqrt{-1})$ tutti rapprefentati dall' efpreffione infinitiforme $\frac{1}{2}$ log. $(a^2+b^2)+(\theta\pm n\pi)\sqrt{-1}$.

Con eguale facilità e fpeditezza io dimoftro i famofi Teoremi fugl' immaginarj efprimenti le funzioni degli archi circolari. In fatti

I. Prefo log. $e = 1$, ed effendofi già trovato log. (cof. $\theta +$ fen. $\theta\sqrt{-1}) = \theta\sqrt{-1}$, ne viene in confeguenza cof. $\theta +$ fen. $\theta\sqrt{-1} = e^{\theta\sqrt{-1}}$; e però pigliato l' arco negativo nafce cof. $-\theta +$ fen. $-\theta\sqrt{-1}$, cioè

$\cos.\theta - \text{sen}.\theta\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}$: onde aggiunta quest' equazione alla prima si ottiene $\cos.\theta$ $= \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2}$; che è il primo Teorema.

II. Delle predette due equazioni sottraggo la seconda dalla prima, e divido il residuo per $2\sqrt{-1}$; e quindi ricavo $\text{sen}.\theta = \frac{e^{\theta\sqrt{-1}} - e^{-\theta\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$; che è il secondo Teorema.

III. Nell' equazione $\cos.\theta \pm \text{sen}.\theta\sqrt{-1} = e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$ se in vece dell' arco θ si sostituisce l' arco $n\theta$, si raccoglie $\cos.n\theta \pm \text{sen}.n\theta\sqrt{-1} = e^{\pm n\theta\sqrt{-1}}$. Ma $e^{\pm n\theta\sqrt{-1}}$ è la potestà n: esima di $e^{\pm\theta\sqrt{-1}}$, ovvero di $\cos. \pm \text{sen}.$ $\theta\sqrt{-1}$: Dunque $(\cos.\theta \pm \text{sen}.\theta\sqrt{-1})^n = \cos.n\theta \pm \text{sen}.$ $n\theta\sqrt{-1}$; che è il terzo Teorema.

IV. Essendo $\cos.n\theta + \text{sen}.n\theta\sqrt{-1} = (\cos.\theta + \text{sen}.\theta\sqrt{-1})^n$, e $\cos.n\theta - \text{sen}.n\theta\sqrt{-1} = (\cos.\theta - \text{sen}.\theta\sqrt{-1})^n$, sommate queste due equazioni si ritrova $\cos.n\theta$

$$= \frac{1}{2}(\cos.\theta + \text{sen}.\theta\sqrt{-1})^n + \frac{1}{2}(\cos.\theta - \text{sen}.\theta\sqrt{-1})^n,$$

che è il quarto Teorema.

V. Sottratta la seconda delle due medesime equazioni dalla prima, e diviso il residuo per $2\sqrt{-1}$ si ritrova $\text{sen}.n\theta = \frac{(\cos.\theta + \text{sen}.\theta\sqrt{-1}) - (\cos.\theta - \text{sen}.\theta\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$; che è il quinto Teorema.

Potrebbe sorgere in mente a taluno una difficoltà sul numero de' valori

$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$

$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm\pi)\sqrt{-1}$

$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm2\pi)\sqrt{-1}$

$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm3\pi)\sqrt{-1}$

$\frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+(\theta\pm4\pi)\sqrt{-1}$

ecc. . . . . . .
ecc. . . . . . .
ecc. . . . . . .

che competono a $\log.(a+b\sqrt{-1})$, ne' quali valori gli archi $\theta;\theta\pm\pi;\theta\pm2\pi;$ ecc. ſpettano tutti alla tangente $\frac{b}{a}$. Imperciocchè ſe in vece della tangente $\frac{b}{a}$ ſi vuole aver riguardo al ſeno $\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, non ſi ha che la metà del numero de' predetti archi, cioè $\theta;\theta\pm2\pi;\theta\pm4\pi;\theta\pm6\pi;$ ecc. e conſeguentemente anche la metà del numero de' valori di $\log.(a+b\sqrt{-1})$; il che poco ſi accorda coll'eſattezza e rigore. Ma convien riflettere, che quel ſeno e coſeno hanno eſſenzialmente il doppio ſegno $\pm$ al radicale quadrato del denominatore, e gli archi corriſpondenti al ſeno $\frac{b}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$, e al coſeno $\frac{a}{-\sqrt{(a^2+b^2)}}$ ſono $\theta\pm\pi;\theta\pm3\pi;\theta\pm5\pi;$ ecc., che formano appunto l' altra metà de' valori di $\log.(a+b\sqrt{-1})$ trovati dapprima; e così tutto cammina d' accordo.

Con non minore prontezza e facilità io dimostro il famoso Teorema Alemberziano $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ $=M+N\sqrt{-1}$, essendo M, N quantità reali, il quale suole comunemente dimostrarsi mercè la supposizione un po' stravagante di dover concepire varianti le quantità a, b, M, N, che non variano. Io dico così: Abbiamo $\log.(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log.(a^2+b^2)+\theta\sqrt{-1}$: Dunque $\log.(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = (g+h\sqrt{-1})$ $\log.(a+b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}g\log.(a^2+b^2) - h\theta$ $+\left(\frac{1}{2}h\log.(a^2+b^2)+g\theta\right)\sqrt{-1}$. Dunque passando dai logaritmi ai numeri sarà $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$

$$=e^{\log.(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} - h\theta + \left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}}$$

$$=(a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} \times e^{-h\theta + (\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta)\sqrt{-1}}.$$ Ma prendendo $\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta$ per un arco di cerchio descritto col raggio 1 si è dimostrato essere

$$e^{\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}} = \text{cos.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)$$

$$+\text{sen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1}.$$ Dunque

$$(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}} = (a^2+b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-h\theta} \left\{ \text{cos.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right) + \text{sen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{h}{2}}+g\theta\right)\sqrt{-1} \right\}.$$

E però posta $M = (a^2 + b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta} \cos.\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}} + g\theta\right)$, ed $N = (a^2 + b^2)^{\frac{g}{2}} e^{-b\theta} \text{sen.}\left(\log.(a^2+b^2)^{\frac{b}{2}} + g\theta\right)$, si ha $M + N\sqrt{-1} = (a + b\sqrt{-1})^{g + b\sqrt{-1}}$.

Se pertanto reca meraviglia, che una quantità immaginaria $\frac{1}{2} e^{\theta\sqrt{-1}}$ aggiunta ad un' altra immaginaria $\frac{1}{2} e^{-\theta\sqrt{-1}}$ costituisca, come si è veduto, un valore affatto reale, è però incomparabilmente più mirabile, che anche senza questa aggiunta una quantità qualunque reale a elevata ad un esponente immaginario $b\sqrt{-1}$ persista in infiniti casi ad esser reale. Paragonata in fatti l'espressione $a^{b\sqrt{-1}}$ colla precedente più generale $(a + b\sqrt{-1})^{g + b\sqrt{-1}}$, si trova subito, che annullati b e g nel valore di questa, diventa $a^{b\sqrt{-1}} = \cos.(b \log. a) + \text{sen.}(b \log. a)\sqrt{-1}$. Ora tutte le volte che sarà $b = \pm \frac{m\pi}{\log. a}$ (essendo m un numero intero qualunque), egli è evidente che nascerà $a^{b\sqrt{-1}} = \pm 1$, secondo che m sarà pari o dispari, e però in tutti questi casi il valore sarà sempre reale.

Parevami una volta di aver ritrovato un argomento insolubile contro l' opinione *Euleriana* circa il valore immaginario de' logaritmi delle quantità negative, cui proposi a qualche Geometra senza ottenerne lo scioglimento, il quale però si ottiene colla più luminosa evidenza dal premesso principio. Io discorreva dunque così: Preso e pel numero, che ha per logaritmo iperbolico

lico l'unità, se questo s'inalza ad un esponente x, e così elevato e^{x} persiste ad avere un valor reale, non può non essere l'esponente x reale ancor esso. Sia pertanto $x = \log. -a$; e poichè $e^{\log. -a} = -a$, ed il valore di $-a$ è visibilmente reale; tale sarà in conseguenza anche quello di $\log. -a$. La risposta è facilissima: e^{x} può esser reale, quand'anche l'esponente x non lo sia; basta in fatti, che l'esponente x sia $= \pm m\pi\sqrt{-1}$, perchè allora $e^{x} = e^{\pm m\pi\sqrt{-1}} = \text{cos.}\ m\pi \pm \text{sen.}\ m\pi\sqrt{-1} = \pm 1$, che è un valore affatto reale. Ed essendosi dimostrato $\log. -a = \pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log. a$, ne viene $e^{\log. -a}$
$= e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1} + \log. a} = a e^{\pm(2n-1)\pi\sqrt{-1}}$
$= a(\text{cos.}\ (2n-1)\pi \pm \text{sen.}\ (2n-1)\pi\sqrt{-1}) = a \times -1$
$= -a$, come appunto esser dee. L'inganno nasce dal falso supposto, che a primo aspetto può sedurre chichessia, che una quantità reale elevata ad un esponente immaginario debba sempre diventare immaginaria.

Un Teorema importante, che non mi sovviene di aver trovato presso alcun Geometra, si ricava dalla formola $a^{h\sqrt{-1}} = \text{cos.}\ (h \log. a) + \text{sen.}(h \log. a)\sqrt{-1}$, nella quale se si prende $h = \pm x\sqrt{-1}$, si ha il risultato $a^{\mp x} = \text{cos.}(x\sqrt{-1}\ .\ \log. a) \pm \text{sen.}(x\sqrt{-1}\ .\log. a)\sqrt{-1}$; che è quanto dire ogni quantità esponenziale $a^{\mp x}$, che ha un esponente x reale, e la base logaritmica a qualunque, si riduce ad una forma, che sebbene all' aspetto immaginaria è però indubitatamente reale. Ed

ecco pertanto, che ſe la quantità eſponenziale $a^{\pm b\sqrt{-1}}$ ſi riduce alla nota forma coſ. $(b \log. a) \pm$ ſen. $(b \log. a)\sqrt{-1}$, la eſponenziale $a^{\mp b}$ ſi riduce alla forma non per anco avvertita coſ. $(b\sqrt{-1} \log. a) \pm$ ſen. $(b\sqrt{-1} . \log. a)\sqrt{-1}$.

Dall' eſſerſi finalmente dimoſtrato, che la generaliſſima eſpreſſione $(a+b\sqrt{-1})^{g+h\sqrt{-1}}$ ſi converte in un ſemplice binomio, una parte del quale è il prodotto d' una certa quantità pel coſeno di un arco idoneo circolare, e l' altra parte è il prodotto della ſteſſa quantità pel ſeno di quell' arco e per la ſpecie immaginaria $\sqrt{-1}$, ne viene in conſeguenza il famoſo Teorema di *Cotes*, non meno che l' altro più generale di *Moivre*, come pure l' invenzione delle radici di qualunque grado d' una propoſta quantità; coſe tutte di troppo facile deduzione da' premeſſi principj per non dover eſſere qui ſminuzzate.

Un celebratiſſimo Oltramontano Geometra ha voluto recentemente ſpiegare onde avvenga, che i ſettori reali del cerchio vengano eſpreſſi dai ſettori immaginarj dell' iperbola, e viceverſa i reali dell' iperbola dagl' immaginarj del cerchio, e non diſſimula la ſua meraviglia, che nè *Giovanni Bernoulli* primo autore della riduzione degli uni negli altri, nè i Geometri poſteriori abbiano di ciò recata ragione alcuna. Siccome però queſta propoſizione non pare che aſſolutamente ſuſſiſta, non ſarà qui fuor di luogo il rettificarne il ſignificato, e dimoſtrare all' oppoſto, che non altrimenti i ſettori reali del cerchio, ma bensì gl' immaginarj vengono rappreſentati dai ſettori immaginarj dell' iperbola, e viceverſa.

Chiamo r il ſemiaſſe traverſo dell' iperbola conica equilatera, per la retta condotta dal centro dell' iper-

bola ad un punto qualunque del ſuo perimetro, φ l'angolo compreſo da queſta retta e dal ſemiaſſe traverſo: è manifeſto, che il ſettore contenuto dai lati di queſt' angolo e dall' arco iperbolico ha per elemento $\frac{1}{2} z^2 d\varphi$; e ſiccome facilmente ſi dimoſtra $z^2 = \frac{r^2 (1 + \text{tang.}\, \varphi^2)}{1 - \text{tang.}\, \varphi^2}$, trovaſi il detto elemento $= \frac{r^2 (1 + \text{tang.}\, \varphi^2) d\varphi}{2 (1 - \text{tang.}\, \varphi^2)}$. Ma ſi ſa dover eſſere $d\varphi = \frac{d . \text{tang.}\, \varphi}{1 + \text{tang.}\, \varphi^2}$; dunque l'elemento del ſettore iperbolico ſi trasforma in $\frac{r^2 d . \text{tang.}\, \varphi}{2(1 - \text{tang.}\, \varphi^2)}$, ovvero in $\frac{r^2 d . \text{tang.}\, \varphi}{4(1 + \text{tang.}\, \varphi)} + \frac{r^2 d . \text{tang.}\, \varphi}{4(1 - \text{tang.}\, \varphi)}$. L'integrale di queſta quantità, cioè il ſettore iperbolico indefinito riſulta $= \frac{1}{4} r^2 \log . \frac{1 + \text{tang.}\, \varphi}{1 - \text{tang.}\, \varphi}$.

Ora il ſettore d'un circolo deſcritto col ſemidiametro r, e compreſo dall' angolo φ ha per ſuo elemento $\frac{r^2 d . \text{tang.}\, \varphi}{2 (1 + \text{tang.}\, \varphi^2)} = \frac{r^2 d . \text{tang.}\, \varphi}{4 (1 + \text{tang.}\, \varphi \sqrt{-1})} + \frac{r^2 d . \text{tang.}\, \varphi}{4(1 - \text{tang.}\, \varphi \sqrt{-1})}$, e queſta eſpreſſione ridotta ad integrazione ſomminiſtra pel valore del ſettore indeterminato $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log . \frac{1 + \text{tang.}\, \varphi \sqrt{-1}}{1 - \text{tang.}\, \varphi \sqrt{-1}}$. Ma queſta eſpreſſione non è punto immaginaria, come a prima viſta potrebbe apparire: in fatti eſſa ſi riſolve in due parti $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log .$

$(1 + \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) - \frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.(1 - \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1})$, la prima delle quali si converte nella serie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$ $(\text{tang.}\varphi\sqrt{-1} + \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi^2 - \frac{1}{3}\text{tang.}\varphi^3\sqrt{-1} - \frac{1}{4}\,\text{tang.}\varphi^4 + \text{ecc.})$, la seconda nella serie $\frac{-r^2}{4\sqrt{-1}}(-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$ $+ \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,\varphi^2 + \frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1} - \frac{1}{4}\,\text{tang.}\,\varphi^4 - \text{ecc.})$: laonde raccogliendo i termini proviene $\frac{1}{2}\,r^2\,(\text{tang.}\,\varphi$ $- \frac{1}{3}\,\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\,\text{tang.}\,\varphi^5 - \text{ecc.})$, che è visibilmente tutta reale.

La realità dell' anzidetta espressione si dimostra ancora mediante il Teorema precedentemente stabilito, che $\log.(a + b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}\log.(a^2 + b^2) + \theta\sqrt{-1}$, dove θ è l'arco circolare, descritto col raggio 1, e colla tangente $\frac{b}{a}$: imperciocchè fatto il debito paragone si raccoglie $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.(1 + \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\log.$ $(1 + \text{tang.}\,\varphi^2) + \frac{1}{4}\,r^2\,\varphi$, e parimente $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}\log.$ $(1 - \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \frac{r^2}{8\sqrt{-1}}\log.(1 + \text{tang.}\,\varphi^2)$ $- \frac{1}{4}\,r^2\,\varphi$, e sottraendo questa da quella, nasce $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}}$

$\log. \frac{1+\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\phi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2} r^2 \phi$, che è manifeſtamente l'eſpreſſione reale del ſettore circolare.

Da ciò ſi rende evidente, che l'eſpreſſione apparentemente immaginaria del ſettore reale del cerchio è effettivamente tutta reale, e che eſſa non può in verun modo equivalere all'eſpreſſione d'un ſettore immaginario della iperbola. Siccome poi d'un tal ſettore iperbolico immaginario ſi ha l'eſpreſſione, ſe nel valor generale $\frac{1}{4} r^2 \log. \frac{1+\text{tang.}\phi}{1-\text{tang.}\phi}$ ſi ſoſtituiſce in vece dell'angolo ϕ l'angolo immaginario $\phi\sqrt{-1}$, il che dà $\frac{1}{4} r^2$ $\log. \frac{1+\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}$ pel valore del detto ſettore immaginario, cioè compreſo da un angolo immaginario; paragonato perciò queſto valore con quello del ſettor reale del cerchio $\frac{r^2}{4\sqrt{-1}} \log. \frac{1+\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}$, ſi vede ſubito, che l'uno differiſce eſſenzialmente dall'altro, mancando al primo il diviſore $\sqrt{-1}$, per la di cui aſſenza quello reſta impoſſibile, mentre per la ſua preſenza divien reale il ſecondo.

Meglio ancora ciò ſi comprende col ſeguente diſcorſo: Si dica I il ſettore iperbolico, C il circolare, e ſi avrà $dI = \frac{r^2 d.\text{tang.}\phi}{2(1-\text{tang.}\phi^2)}$, $dC = \frac{r^2 d.\text{tang.}\phi}{2(1+\text{tang.}\phi^2)}$. Si prenda nel ſettor circolare l'angolo immaginario $\phi\sqrt{-1}$, ritenendo il reale ϕ pel ſettore iperbolico; e naſcerà $dC = \frac{r^2 d.\text{tang.}\phi\sqrt{-1}}{2(1-\text{tang.}\phi^2)} = dI\sqrt{-1}$, e quindi integrando $C = I\sqrt{-1}$, cioè il ſettor impoſſibile C del cerchio, contenuto dall'angolo impoſſibile $\phi\sqrt{-1}$, è ugua-

le al settore iperbolico I moltiplicato per $\sqrt{-1}$, che rende un tal valore impossibile. Così nell'espressione del settore iperbolico se si piglia $\varphi\sqrt{-1}$ in vece di φ, e si ritiene φ nel circolare, si trova $dI = \frac{r^2 d.\text{tang.}\varphi\sqrt{-1}}{2(1+\text{tang.}\varphi^2)}$ $= dC\sqrt{-1}$, e quindi $I = C\sqrt{-1}$, e $C = \frac{I}{\sqrt{-1}}$, vale a dire il settor reale C del cerchio, corrispondente al reale angolo φ, è uguale al settore impossibile I dell'iperbola diviso per $\sqrt{-1}$, la qual divisione toglie alla quantità la sua impossibilità; ovvero finalmente il settore immaginario I dell'iperbola non equivale punto al settor reale C del cerchio, nè può essere da questo rappresentato, ma viene espresso per l'opposto dal prodotto della quantità immaginaria $\sqrt{-1}$ nel settore circolare, vale a dire da una quantità onninamente immaginaria.

Nell'atto di dar compimento a questa breve Memoria mi accorgo con sorpresa, che il famoso Teorema Euleriano intorno all'infinita moltiplicità de' valori del logaritmo d'una proposta quantità può dimostrarsi indipendentemente dal calcolo Infinitesimale, e da ogni ipotesi d'infinitesimi colla pura Algebra finita; ed in tal occasione mi avveggo eziandio, che il Teorema Alemberziano intorno alla riduzione di qualsisia più complicato immaginario alla forma binomiale semplicissima si dimostra ancor esso col solo calcolo delle grandezze finite, ed in un modo assai spedito e rigoroso. Ecco pertanto la dimostrazione del Teorema Euleriano senza assumere alcun principio del calcolo Infinitesimale, nè alcuna nozione di grandezze inassegnabili o infinite.

Presa x per rappresentare qualunque data grandezza, si dimostra col ritorno delle serie, come può vedersi in varj Trattati elementari di Algebra finita, che log.

$\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \text{ecc.}\right)$. Dunque ſe ſi nomina φ l'arco d'un cerchio deſcritto col raggio 1, e ſi fa $x = \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}$, naſcerà $\log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$ $= 2\left(\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1} - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\sqrt{-1} + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5\sqrt{-1}\right.$ $\left.- \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7\sqrt{-1} + \text{ecc.}\right) = 2\sqrt{-1}\left(\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3\right.$ $\left.+ \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7 + \text{ecc.}\right)$. Ma col ritorno ſteſſo delle ſerie nell'Algebra ordinaria viene dimoſtrato, che la ſerie $\text{tang.}\,\phi - \frac{1}{3}\text{tang.}\,\varphi^3 + \frac{1}{5}\text{tang.}\,\varphi^5 - \frac{1}{7}\text{tang.}\,\varphi^7 + \text{ecc.}$ rappreſenta il valore dell'arco circolare φ: ſarà dunque $2\varphi\sqrt{-1} = \log.\frac{1+\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}}$, cioè ſoſtituendo $\frac{\text{ſen.}\,\varphi}{\text{coſ.}\,\varphi}$ in luogo di tang. φ, ſarà $2\varphi\sqrt{-1}$ $= \log.\frac{\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}}{\text{coſ.}\,\varphi - \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1}} = \log.\frac{(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})^2}{\text{coſ.}\,\varphi^2 + \text{ſen.}\,\varphi^2}$ $= 2\log.(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})$, e quindi $\varphi\sqrt{-1} = \log.(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſen.}\,\varphi\sqrt{-1})$. Se ora ſi prende $\varphi = \pm 2m\pi$, denotando m tutti i numeri naturali dal zero ſino all' infinito, ſi ha ſen. $\pm 2m\pi = 0$, coſ. $\pm 2m\pi = 1$: conſeguentemente $\pm 2m\pi\sqrt{-1} = \log.\ 1$, cioè a dire log. 1 ha un'infinità di valori 0, $\pm 2\pi\sqrt{-1}$, $\pm 4\pi\sqrt{-1}$, $\pm 6\pi\sqrt{-1}$, ecc. Pigliato poi $\varphi = \pm(2m-1)\pi$, diventa ſen. $\pm(2m-1)\pi = 0$, coſ. $\pm(2m-1)\pi = -1$. Laonde $\pm(2m-1)\pi\sqrt{-1} = \log. -1$, vale a dire log. -1 ha i ſeguenti valori infiniti $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$, $\pm 7\pi\sqrt{-1}$, ecc.

Dimoſtrato in tal guiſa il Teorema Euleriano, ſi de-

duce ſubito dal primo valore di log. -1 la celebre proporzione Bernoulliana fra il diametro e la circonferenza del cerchio, poichè eſſendo $\log. -1 = \pi\sqrt{-1}$ ne viene $1 : \pi :: \sqrt{-1} : \log. -1$, cioè il diametro alla circonferenza come la radice dell' unità negativa al logaritmo dell' unità negativa.

Dall' ugualtà $\varphi\sqrt{-1} = \log.(\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1})$ ſi ricava, preſo e pel numero che ha per ſuo logaritmo naturale l' unità, $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}$; e quindi $e^{n\varphi\sqrt{-1}} = \text{cof.}\,n\varphi + \text{fen.}\,n\varphi\sqrt{-1} = (\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1})^n$.

Che ſe ſupponghiamo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = B^{x\sqrt{-1}}$, e conſeguentemente $\varphi\sqrt{-1} = x\sqrt{-1}\log. B$, cioè $\varphi = x\log. B$, ne inferiremo $e^{\varphi\sqrt{-1}} = \text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1} = B^{x\sqrt{-1}}$ $= \text{cof.}(x\log. B) + \text{fen.}(x\log. B)\sqrt{-1}$.

Parimente denotando p, e q due grandezze qualunque ſi ha $\log.(p + q\sqrt{-1}) = \log. p\left(\frac{p + q\sqrt{-1}}{p}\right)$

$= \log. p\left(1 + \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right) = \log. p$

$+ \log.\left(1 + \frac{q}{p}\sqrt{-1}\right)$. Piglisi φ per l' arco del raggio 1 della tangente $\frac{q}{p}$, ovvero del ſeno $\frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$, e del coſeno $\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$; ed avremo $\log.(p + q\sqrt{-1})$

$= \log. p + \log.(1 + \text{tang.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log. p$

$+ \log. \frac{\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}}{\text{cof.}\,\varphi} = \log. p - \log. \text{cof.}\,\varphi + \log.$

(cof.

$(\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.\,p - \log.\,\frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2)}}$

$+ \log.(\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \log.$

$(\text{cof.}\,\varphi + \text{fen.}\,\varphi\sqrt{-1}) = \log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}} + \varphi\sqrt{-1}$.

Da tali Teoremi in sì poche linee dimoftrati coll' ordinario calcolo finito riefce ora faciliffimo l' inferire il famofo Teorema del Sig. D' *Alembert*
$(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1}$. Imperciocchè effendofi trovato $\log.(p+q\sqrt{-1}) = \log.(p^2+q^2)^{1:2} + \varphi\sqrt{-1}$, pofto φ per l' arco fopra indicato, ne deriva $\log.(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = (m+n\sqrt{-1})$ $\log.(p+q\sqrt{-1}) = (m+n\sqrt{-1})\log.(p^2+q^2)^{1:2}$ $+ (m+n\sqrt{-1})\varphi\sqrt{-1} = \log.(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}} +$ $\log.(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}n\sqrt{-1}} + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$. Ma abbiamo dimoftrato $B^{x\sqrt{-1}} = \text{cof.}(x\log.B) + \text{fen.}(x\log.B)$ $\sqrt{-1}$, e però $(p^2+q^2)^{\frac{1}{2}n\sqrt{-1}} =$
$\text{cof.}\left(\frac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right) + \text{fen.}\left(\frac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right)\sqrt{-1}$;
dunque foftituito quefto valore, nafcerà
$\log.(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = \log.(p^2+q^2)^{\frac{m}{2}}$
$+ \log.\left(\text{cof.}\left(\frac{1}{2}n\log.(p^2+p^2)\right) + \text{fen.}\left(\frac{1}{2}n\log.(p^2+q^2)\right)\right.$
$\left.\sqrt{-1}\right) + m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi$; e paffando dai logaritmi ai numeri proviene $(p+q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$

$= e^{m\varphi\sqrt{-1} - n\varphi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \Big(\text{cof.} \big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big)$
$+ \text{fen.} \big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big) \sqrt{-1} \Big)$. Ora $e^{m\varphi\sqrt{-1}}$
$= \text{cof.}\, m\varphi + \text{fen.}\, m\varphi \sqrt{-1}$. Dunque $(p + q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$
$= e^{-n\varphi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} (\text{cof.}\, m\varphi + \text{fen.}\, m\varphi \sqrt{-1}) \Big(\text{cof.}$
$\big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big) + \text{fen.} \big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big) \sqrt{-1} \Big)$
$= e^{-n\varphi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \times \Big(\text{cof.}\, m\varphi\, \text{cof.} \big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big)$
$- \text{fen.}\, m\varphi\, \text{fen.} \big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big) + \text{cof.} \big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big)$
$. \text{fen.}\, m\varphi \sqrt{-1} + \text{cof.}\, m\varphi\, \text{fen.} \big(\tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \sqrt{-1} \big) \Big)$
$= e^{-n\varphi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \times \Big(\text{cof.} \big(m\varphi + \tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big)$
$+ \text{fen.} \big(m\varphi + \tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big) \sqrt{-1} \Big)$. Posto pertanto $P = e^{-n\varphi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \text{cof.} \big(m\varphi + \tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big)$,
$Q = e^{-n\varphi} (p^2 + q^2)^{\frac{m}{2}} \text{fen.} \big(m\varphi + \tfrac{1}{2} n \log. (p^2 + q^2) \big)$,
risulta finalmente $(p + q\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = P + Q\sqrt{-1}$.

Fig. II

Fig. III

Fig. V

Fig. VI

Fig. IX

Fig. X

Fig. XI

Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI
Fig. VII
Fig. VIII
Fig. IX
Fig. X
Fig. XI
Fig. XII

DESCRIZIONE

DI UNA

MACCHINA METEREOLOGICA

Per mezzo della quale ſi determina di ora in ora la durata e quantità della pioggia.

Del Sig. Cavaliere Marsilio Landriani.

SEbbene fino dall' erezione delle più antiche e celebri Accademie ſiaſi tenuto eſatto conto della quantità della pioggia caduta ne' diverſi giorni dell' anno, e vi ſia ſtato perſino chi ha miſurato la quantità della pioggia che cade a diverſe altezze; pure per quanto io ſappia alcuno non vi è ſtato ancora che abbia intrapreſo delle oſſervazioni circa alla durata e quantità della pioggia caduta nelle diverſe ore del giorno, e della notte; eſſendoſi ſoltanto limitate le oſſervazioni ed il regiſtro de' giornali di coloro che hanno intrapreſe delle oſſervazioni metereologiche a indicare ſemplicemente, che in un tal giorno era caduta una data quantità di pioggia, e tutto al più fu lodata la diligenza di chi nel riferire i riſultati delle oſſervazioni ſulla quantità della pioggia caduta in un dato giorno vi aggiunſe che la pioggia era ſtata o continua od interrotta.

Eppure la cognizione della durata della pioggia, non meno che della di lei quantità oraria, non è un oggetto ſemplicemente curioſo, eſſendo eſſa certamente utile ed intereſſante per ben conoſcere l' indole e la natura di un clima, e per render ragione di molti fe-

nomeni dell' atmosfera . Imperocchè se si rifletta che qualunque benchè menoma modificazione del fluido che noi respiriamo non può essere in alcun modo indifferente al ben essere dell' economia animale, e che la durata non meno che la di lei quantità influiscono moltissimo nelle variazioni delle modificazioni dell' atmosfera, nessuno certamente vi sarà che risguardar possa come una vana e sterile curiosità l' occuparsi di queste osservazioni coll' ammetterle nel ruolo delle altre osservazioni metereologiche.

L' umidità dell' atmosfera, che è uno degli elementi della di lei salubrità, non solo procede dalla traspirazione dell' immensa copia de' vegetabili che coprono la terra, dalla respirazione e traspirazione degli animali, dall' evaporazione delle acque e da simili cause, ma anche dalla quantità e durata della pioggia; per modo tale che taluno si è lusingato di poter determinare l' umidità di un clima e di una stagione dalla semplice cognizione della quantità dell' acqua piovuta. Ma sebbene una tale lusinga sia stata dimostrata vana dalle osservazioni e da' confronti del Sig. *Dobson* (a), non perciò si può conchiudere che le pioggie non influiscono sull' umidità dell' atmosfera; ma che soltanto non è sempre proporzionale l' umidità dell' aria alla quantità della pioggia.

Per render più giusto, e meno fallace questo confronto fra l' umidità dell' aria e la pioggia conviene aver riguardo più alla durata della pioggia che alla di lei quantità, poichè stando l' aria per un maggiore spazio di tempo in contatto dell' acqua s' imbeve di una maggiore quantità di umido, che non assorbisce sì facilmente nelle dirotte pioggie sebbene abbondantissime.

(a) Phil. Transactions.

Inoltre l' aria nella caduta delle pioggie si deflogistica, ed acquista una maggiore salubrità; poichè dalle belle sperienze di *Priestley* si sa che uno dei mezzi, che la natura impiega per rendere all' atmosfera l' originaria sua salubrità, è il dilavamento delle pioggie; e si sa altronde che i fanghi, che per mancanza delle acque tramandano de' vapori mofetici, massime se sieno percossi dai raggi solari, non infettano più l' atmosfera qualora sieno coperti da una notabile quantità di acqua.

Tutto ciò è appoggiato alla giornaliera sperienza, e basta dare un' occhiata allo stato dell' aria delle campagne paludose per convincersene; imperocchè in quali stagioni l' aria è giudicata e trovata insalubre? in quelle stagioni appunto nelle quali le pioggie sono rare o di breve durata; poichè allora le terre paludose, non essendo coperte di molte acque, riscaldate dal sole fermentano, ed imputridendo esalano una notabile quantità di vapori aeriformi parte flogisticati e parte infiammabili che mescolandosi coll' atmosfera ne alterano la di lei purezza e salubrità. Nè per altra ragione nelle paludi Pontine, nelle maremme Sanesi, ed in alcuni luoghi paludosi della Lombardia Austriaca, dove e pel genere di coltivazione, e per le molte acque stagnanti l' aria è quasi abitualmente insalubre, noi non temiamo più di respirare quelle arie in quelle stagioni in cui le frequenti pioggie hanno reso all' aria una uniforme, e presso a poco eguale salubrità.

Egli è vero però che talvolta è stato osservato che dopo lunghe siccità la caduta di una breve pioggia è stata accompagnata da febri d' indole maligna, perniciosa, che non sarebbero insorte se la siccità fosse continuata più oltre; ma questa pur troppo vera osservazione non prova che insalubri siano le pioggie, ma che una tale infezione procede da uno stato particolare delle terre paludose.

Esse siccome non sono che un ammasso di cadaveri

d' insetti, di foglie, di virgulti infraciditi e scomposti, quando sono coperte da un notabile strato d'acqua non fermentano, ma vanno lentamente decomponendosi, e risolvendosi ne' loro principj, senza tumulto o notabile effervescenza. Forse anche i vapori esalanti da queste sostanze scomponentisi in vece di mescolarsi coll'atmosfera, incontrando uno strato d' acqua, da quello sono come trattenuti ed imprigionati e se pur giungono fino alla superficie dell'acqua, hanno in parte perduto il loro veleno, e sono in qualche modo meno mofetici: ma quando i fanghi sono stati per lungo tempo esposti e percossi dal sole, e sono resi aridi, tostochè una copiosa quantità di acqua improvvisamente li penetra, la fermentazione per così dire sospesa, od impedita, viene dall' acqua favorita, e promossa a segno che una vera e tumultuosa fermentazione quindi ne nasce, ed un copioso torrente di vapori flogistici alkalici, e talvolta infiammabili si sparge nell'atmosfera, e quella singolarmente infetta ed avvelena.

Il Sig. *Guglielmo White* ha fatto delle belle sperienze ed osservazioni su questa materia, le quali rendono ragione di questi sovraccennati singolari fenomeni dell' atmosfera. Poichè egli ha trovato che il fango paludoso asciutto poco o niente altera l' aria che gli è in contatto; laddove se il fango sia imbevuto da molta acqua, esala una tale quantità di vapori flogistici, che in poco tempo l' aria è resa singolarmente flogisticata. Perciò se dopo una lunga siccità arriva che cada della pioggia di breve durata, l' atmosfera in vece di deflogisticarsi si flogistica, e si rende insalubre; perlochè non è da farsi le meraviglie se talora dopo la caduta di una pioggia di breve durata si sieno rese dominanti le malattie di aria cattiva. Ma se le pioggie sono abbondanti, e di una notabile durata, per cui i fanghi sieno stati abbondantemente penetrati e coperti dall' acque, le pioggie anzi che essere dannose salutari

ſono, e benefiche, poichè i vapori putridi ſparſi per l' atmosfera ſono dalle pioggie precipitati, e la vegetazione che era prima languente ſi rinvigoriſce, e maggior copia d' aria deflogiſticata quindi eſpirano le foglie di tutte le piante.

Ma ſenza eſtenderci più oltre a ragionare dell' utilità che ci proviene dalle pioggie baſta dare un' occhiata ai riſultati che hanno fornito le Oſſervazioni fatte ſulla durata e quantità della pioggia caduta in tutto l' anno ſcorſo (*a*) per comprendere quali utili e curioſe cognizioni ci ſomminiſtri una macchina che di ora in ora ci indichi la quantità non meno che la durata della pioggia. Poichè toſto ſi comprende quale ſia ſtato il meſe, il giorno, l' ora più piovoſa, ſe di giorno piova aſſai più che di notte, e mille altre utili nozioni che dall' uſo di queſta macchina ne derivano.

La macchina che io ho immaginato e che da più di un anno ho fatto coſtruire tiene conto non ſolo della durata, ma ancora della preciſa quantità oraria della pioggia.

AA è una tavola circolare di legno annerito di circa 20 pollici di diametro (vedi *fig.* 1 *tav.* 1), che ha nel mezzo un cerchio d' ottone *BB* diviſo in 24 parti, ciaſcuna delle quali è ſuddiviſa in 30 parti. Eſſendo il cerchio *BB* di un diametro minore della tavola circolare *AA*, neceſſariamente laſcia tutto all' intorno una zona di legno annerito di due pollici di larghezza, la quale è diviſa in due parti eguali *DD*, *CC* da un anello d' ottone *EE*, incaſtrato nella tavola *AA*. Queſta tavola *AA* è fiſſata a sfregamento ſopra l' albero di una ruota orizzontale, che mediante un movimento

(*a*) Queſte Oſſervazioni ſiccome entrano in un piano di oſſervazioni metereologiche fatte in Milano ſaranno dal Sig. *Prof. Moſcati* pubblicate nel primo volume degli Atti della Società Patriotica di Milano.

d' orologeria compie un' intera rivoluzione nello ſpazio di 24 ore (la *fig.* 1 rappreſenta la tavola circolare che ſi vede poſta orizzontalmente nella *fig.* 2).

Sul piano del telajo del movimento d'orologeria ſottopoſto alla tavola *AA* è fiſſato un ſolido braccio d'ottone orizzontale *F* che porta il telajo *GHGH*, che ſeparatamente, e quaſi nella naturale ſua grandezza è diſegnato nella *tav.* 2 *fig.* 2.

In ciaſcuna delle due laſtre piane orizzontali *HH* di queſto telajo evvi una fineſtra quadrangolare *T*, *S*, deſtinata a ricevere l' aſta quadrangolare *MM* rappreſentata ſeparatamente nella ſua naturale grandezza nella *fig.* 5 della *tav.* 2 Acciocchè queſt' aſta poſſa liberamente muoverſi, e ſcorrere nelle ſuddette fineſtre *S*, *T* ha applicate quattro mobili rotelle d' acciajo *P*, *P* ecc. che appoggiando contro l' aſta quadrangolare *MM* la tengono regiſtrata in modo che non ſi può muover che nello ſteſſo piano, e non impediſcono punto, anzi favoriſcono la libertà de' ſuoi movimenti.

La *fig.* 6 della *tav.* 2 eſprime l' aſta *MM* colla rotella *P* applicatale, e la *fig.* 7 della ſteſſa *tav.* eſprime la rotella *P* ſeparata.

L' aſta quadrangolare *MM* porta ſul piano della ſua eſtremità ſuperiore un braccio orizzontale d'ottone *QQ* fiſſato colla vite W, il quale piega ad angolo retto in *S*, ed ha alla di lui eſtremità un porta-matita *N*. (Nella *fig.* 5 della *tav.* 2 è tutto ciò baſtevolmente eſpreſſo.)

Dal piano ſuperiore *H* del telajo *HGHG* ſorge una colonnetta d' ottone *O* ſeparatamente rappreſentata nella *tav.* 2 *fig.* 3, la quale ha ſuperiormente una cerniera *N* in cui ſi muove il braccio d' ottone *YY*, la di cui eſtremità termina in un picciolo imbuto oſſia vaſe conico *R*. Queſto braccio *YY* ha non molto lontano dalla cerniera *N* un picciolo bracciuolo tranſverſale *Z*

le *Z* che appoggia e preme ſul braccio *QQ* come è baſtevolmente eſpreſſo nella *fig.* 2 della *tav.* 1.

Una molla ſpirale *RR* fiſſata ad un picciolo parallepipedo *T* che ſorga ſulla laſtra inferiore *H* (nella *fig.* 4. della *tav.* 1. ſi vede ſeparatamente la molla *RR*, ed il parallepipedo *T*) ſoſtiene tutto il peſo dell' aſta quadrangolare *MM*, del braccio *QQ*, e dell' altro braccio *YY*, poichè eſſo pure preme l' aſta *MM* per eſſere il bracciuolo *Z* appoggiato ſul braccio *QQ*. La forza di queſta molla *RR* deve eſſere tale che baſti a tener ſollevata l' aſta *MM* e tutto ciò che le è anneſſo in modo che l' eſtremità della matita *H* ſia diſtante una buona linea parigina ed anche più dalla zona *CC* della tavola circolare *AA*.

Dalla deſcrizione di queſto apparato facilmente ſi comprende che ſituando ſul colmo del tetto un ampio imbuto *AA* di latta, o di rame inverniciato che abbia più piedi quadrati di area (vedi *fig.* 9 *tav.* 2), l' acqua che pioverà in queſto imbuto cadrà nel picciolo vaſe conico *R*, ed il peſo dell' acqua contenuta in queſto vaſe farà abbaſſare la leva oſſia braccio *YY*, e con eſſo l' altro braccio *QQ*, e la matita *H* ſi abbaſſerà quindi ſulla zona *CC* della tavola circolare *AA*; e continuerà a ſtarvi appoggiata fino a tanto che il vaſe conico *C* ſarà ripieno d' acqua. Poichè per quanto picciola ſia la quantità dell' acqua caduta nel vaſetto *R* premendo ſull' eſtremità della leva *YY* è ſufficiente a deprimere la leva ſuddetta.

Ora dunque ſe col ceſſar della pioggia ſi poteſſe ottenere che il vaſetto conico *R* da sè medeſimo ſi votaſſe, la molla ſpirale *RR* toltole il peſo dell' acqua contenuta nel vaſetto *R* rialzerebbe alla primiera altezza l' aſta *MM*, e ſeco la matita *H*. Ora un tale votamento del vaſetto *R* ſi ottiene per mezzo di un picciolo ſifoncino di criſtallo *NV* (vedi la *fig.* 6. *tav.* 1.) compoſto di un tubo *N* che continua capillare fino al-

la curvatura dove ſi allarga e termina in *V* a foggia di una penna da ſcrivere.

La capillarità di queſto ſifoncino *NV* e la di lui lunghezza devono eſſere tali, che appena l'acqua tocca l' eſtremità della gamba capillare *N* ſpontaneamente venga attratta, e goccia a goccia fluiſca dall' eſtremità più larga *V* del ſifone *NV*: e ſiccome non è così facile il procurarſi un ſifone che ſia di una tale preciſa capillarità che attragga l'acqua ſenza aſpirar l'aria, e che l'acqua attratta fluiſca dall'altro gambo *V* goccia a goccia, perciò ſoglio procurarmi uno di queſti ſifoni che abbia la gamba *P* di un diametro ſimile a quello dei termometri a ſpirito di vino; indi inſinuando in eſſo diverſe ſetole di cignale facilmente ottengo che l'acqua appena toccato che abbia l'eſtremità del tubo capillare *P* ſia attratta, e goccia a goccia fluiſca dall' altro braccio più largo *V*.

L'uffizio di queſto ſifone *NV*, che è la parte più importante del Croniografo e che deve eſſer adattato al vaſe conico *R*, ſi è di vuotare, ceſſata che ſia la pioggia, tutta l' acqua contenuta nel vaſetto conico *R*; ed è fatto con una gamba capillare acciocchè nelle minute pioggie minore ſia la quantità dell'acqua che fluiſce dal ſifone *NV* di quella che viene raccolta nel vaſe *AA* (*fig. 9 tav. 2*) e che cade nel vaſetto *R*. Poichè anche nelle pioggie minutiſſime il vaſetto *R* è ſempre pieno, conſeguentemente la matita *H* ſta appoggiata alla zona *CC* per tutto quel tempo in cui la pioggia continua a cadere, e laſcia ſulla zona ſuddetta una ſtriſcia bianca per tutto quello ſpazio di tempo in cui è piovuto.

Affinchè la matita *H* ſia pronta a ſcrivere ſulla zona *CC* la durata della pioggia, deve eſſere fatta di una argilla bianca teneriſſima, ed io coll' eſperienza di più di un anno ho trovato ottima quella che volgarmente ſi chiama paſtello bianco de' Pittori.

La gamba *V* del ſifone *NV* è fatta della forma poc' anzi deſcritta, poichè ſe anche la gamba *V* aveſſe un diametro eguale a quello della gamba *N*, non ſempre il ſifone *NV*, ceſſata la pioggia, voterebbe il vaſetto *R*. Imperocchè un ſifone capillare aſpira l' acqua quando tutta la cavità del ſifone ſia intieramente libera; ma ſe una goccia d' acqua all' eſtremità dell' altra gamba che non peſca nel vaſetto *R*, o nella curvatura del ſifone, ſi arreſta, il ſifone più non giuoca. Poichè come è noto dalle ſperienze di *Jurin*, e *Muſſchembroek* un tubo capillare, la di cui eſtremità ſia oſtrutta da una goccia d' acqua o ermeticamente chiuſa, non attrae più l' acqua al diſopra del ſuo livello. Ora ſe ambedue le gambe del ſifone *NV* foſſero di un diametro eguale, frequentemente ed il più delle volte accaderebbe che qualche goccia d' acqua ceſſato il fluſſo del ſifone ſi arreſterebbe o alla eſtremità della gamba più lunga del ſifone, o nella curvatura. Laddove facendo che la gamba più lunga abbia un diametro di tre in quattro linee parigine, e che la di lei eſtremità ſia fatta a foggia di una penna da ſcrivere, giammai l' acqua non può arreſtarſi nè all' eſtremità, nè nella curvatura del ſifone, conſeguentemente l' uffizio del ſifone *NV* non reſta giammai ſoſpeſo, qualunque ſiaſi la circoſtanza della pioggia.

Talvolta accade che l' acqua che piove nel vaſetto *R* porti ſeco qualche grano di ſabbia od altro corpo ſtraniero il quale potrebbe inſinuarſi coll' aſpirazione dell' acqua, introdurſi nel tubo capillare *N*, e rendere inetto l' uſo del ſifone. E certamente di poco ſicuro uſo eſſo ſarebbe ſe non ſi aveſſero varie avvertenze, per cui quand' anche l' acqua che cade nel vaſetto *R* ſia torbida, la di lui funzione non è punto ſoſpeſa. Queſte avvertenze ſono di frammettere al tubo WW (*fig.* 2 *tav.* 2.) che conduce l' acqua che piove nel grande imbuto *AA* ſituato ſul colmo del tetto, un velo che arreſta e trat-

tiene i grani di ſabbia, e di altri corpi ſtranieri che caſualmente cader poteſſero colla pioggia. A queſto oggetto due o tre pollici al diſopra dell' eſtremità di queſto tubo, eſſo è diviſo in *S*, e *T* per potervi frammettere il velo ſuddetto. Inoltre ſebbene la pioggia prima di cadere nel vaſetto conico *R* attraverſi e filtri pel velo or ora deſcritto, ciò non oſtante varie volte a diſpetto di queſto artificio qualche picciolo grano di ſabbia colla pioggia paſſa pel velo frappoſto nel vaſetto *V*. Per impedire che queſti granelli di ſabbia ſieno aſpirati dal tubo capillare, è neceſſario di fare che la lunghezza della gamba capillare *N* del ſifone *NV* ſia tale che applicato il ſifone *NV* al vaſetto *R* l' eſtremità della gamba *N* ſia diſtante due buone linee dal fondo del ſuddetto vaſe *R*. Poichè i grani di ſabbia che dentro vi cadono, eſſendo ſpecificamente più gravi dell' acqua, precipitano nel fondo conico del vaſetto *R*, e non poſſono quindi giammai entrare nel gambo capillare del ſifone *NV*.

Ciò non pertanto accade, e dalla ſperienza di più di un anno che faccio uſo di queſta mia macchina ſono ammaeſtrato, che talvolta, nè di ciò ſaprei aſſegnarne la cagione, ſe è qualche tempo che non ſia piovuto, il ſifone *NV* avvegnachè non contenga alcun corpo ſtraniero fuori delle ſetole di cignale, pure non aſpira l' acqua, inſomma non fa le funzioni per le quali è ſtato immaginato. Forſe cagione di ciò è il diſſeccamento della ſetola inſinuata nel ſifone, la quale nel diſſeccarſi ſi attortiglia più del biſogno, e riſtringe il foro della gamba capillare *N*. Poichè ſe ſi bagni la ſetola, o a quella ſi ſoſtituiſca un' altra eguale, il ſifone *NV* riprende le primiere qualità. Perciò qualora ſia qualche giorno che non ſia piovuto, e che l' aria ſia ſtata molto aſciutta, è neceſſario d' inumidire il ſifone *NV* e la ſetola in eſſo contenuta, e qualche volta ancora ſarà ben fatto di ſoſtituirvi un' altra: così pure è neceſſario

di cangiare di tempo in tempo il velo frappoſto alle due parti *SW*, *WT* del tubo W (*fig.* 2 *tav.* 2) e di pulire il fondo del vaſe conico *R* della ſabbia che a diſpetto del velo interpoſto in eſſo cade; altrimenti col tratto del tempo il velo non è più permeabile dall' acqua, ed il gambo capillare del ſifone *NV* s' interriſce.

E' inutile che io avvertiſca che tutti quegli ſpazj che nella zona *CC* della tavola circolare *AA* (*fig.* 1 e 2 della *tav.* 1) ſaranno ſegnati da una ſtriſcia bianca dinoteranno le ore ed i minuti nei quali la pioggia è caduta, e quegli ſpazj, che ſaranno indicati dalla matita *H*, quelle ore e minuti ſegneranno ne' quali non è piovuto. Poichè ſtante la coſtruzione della macchina or ora deſcritta facilmente ſi comprende che fedelmente la matita *H* ſi abbaſſa ſulla zona *CC* al cominciar della pioggia, e continua a ſtar ivi appoggiata fino a tanto che la pioggia continua, ceſſata la quale toſto ſi rialza.

Per regiſtrare i riſultati giornalieri di queſta macchina, oſſia per regiſtrare le oſſervazioni Croniografiche ho immaginato una tavola comodiſſima, mediante la quale in un ſolo colpo d'occhio ſi vede l'andamento della durata della pioggia di meſe in meſe, di giorno in giorno, di ora in ora; ſi conoſce ſubitamente quali ſieno ſtati i giorni e le ore più piovoſe, ſi ſa ſe piove più di giorno che di notte, ſe più avanti il mezzodì che dopo, e mille altri ſimili utiliſſimi riſultati ci forniſce che difficilmente ſi potrebbero altrimenti ricavare. Per dimoſtrare l'uſo di queſta tavola ho creduto di far coſa grata al lettore di preſentargli quella che comprende le oſſervazioni del meſe di Agoſto dell'anno 1781.

Queſta tavola, come ſi vede, è diviſa da linee orizzontali in 33 ſpazj di una grandezza preſſo a poco eguale, ſolo che il primo ſpazio e l'ultimo ſono al-

quanto più grandi degli altri intermedj . Ciascuno di questi spazj orizzontali è diviso in 26 parti eguali da alcune linee perpendicolari , solo che anche in questo caso la prima divisione e l'ultima sono più grandi delle altre intermedie.

Nel primo spazio orizzontale si scrivono 24 numeri, cioè nella seconda casella si scrive il numero 1, nella terza il 2, e così nelle altre gli altri numeri fino al 24 cioè le 24 ore di un giorno. Nell'ultima casella a mano destra si scrive *somma dei minuti ne' quali è piovuto*, e nella prima casella a mano sinistra si scrive il nome del mese di cui quella tabella comprende le osservazioni. Nelle altre caselle verticali al disotto di questa si scrivono i numeri dall'uno fino al 31 cioè i giorni di un mese, e nell'ultima di queste caselle si scrive *somma dei minuti ne' quali è piovuto in ciascun' ora*.

Posto ciò ogni intervallo orizzontale essendo diviso in 24 parti rappresenterà le singole ore di ciascun giorno, ed ogni spazio orizzontale esprimerà i singoli giorni di ciascun mese. Ora trovando io sulla zona oraria *CC* (*fig.* 2 *tav.* 1) nel giorno 3 del mese d'Agosto nello spazio corrispondente all'ora quinta di quel giorno una striscia bianca corrispondente a 15 minuti, perciò nella quinta casella del giorno 3 scrivo il numero 15; e nella sesta, settima, ottava, e nona casella di quel giorno scrivo i numeri 25, 10, 15, 5 perchè nell'ora sesta di quel giorno non piovette che per soli 25′, nella settima piovette per 10′ ecc. Nè essendo piovuto in tal giorno dalle 10 fino alle 16, e nell'ora 16 non essendo continuata la pioggia che per soli cinque minuti, perciò nella casella sotto l'ora 16 del giorno 3 scrivo il numero 5, e nell'ultima casella dopo la 24 scrivo il numero 75, perchè appunto in quel giorno la durata della pioggia è stata di soli 75′.

Nel giorno 4 di Agosto nella prima e seconda ora

non piovette, perciò non vi è alcun numero nelle prime due caselle di un tal giorno; nell' ora terza di un tal giorno la pioggia continuò per 30′, e nell' ora quarta per 40′, e non piovette più alcun' altra ora, perciò nella casella terza, e quarta vi sono scritti i due numeri 30′ e 40′, e le altre caselle sono vuote, e solo nell' ultima più grande evvi il numero 70′, cioè la somma dei minuti ne' quali è piovuto nel giorno 4.

Senza estendermi più oltre ad accennare le altre osservazioni Croniografiche che contiene questa tavola, basta darle un' occhiata per comprenderne l' uso, poichè tosto si vede che in questo modo si registrano brevemente e nitidamente i risultati giornalieri del Croniografo, e facilmente si possono quindi osservare gli andamenti della durata della pioggia, e determinare quali sieno i giorni più piovosi, e quali i meno piovosi, se sia piovuto più ne' primi dieci giorni del mese che ne' secondi, se più ne' secondi che negli ultimi, poichè si vede tosto che nel mese di Agosto è piovuto assai più nei secondi dieci giorni del mese, che nei primi e negli ultimi, e più negli ultimi che nei primi, poichè la durata della pioggia nei secondi dieci giorni è stata di 610′, negli ultimi di 580′, e nei primi di 225′, ed il totale della durata della pioggia è stato in quel mese di 1415′. Tutta altra divisione e confronto si può facilmente fare, e determinare per esempio in quali punti lunari sia maggiore la durata della pioggia ecc.

Per sapere poi quali ore sieno le più piovose, e quali le meno, se piova più di giorno che di notte ecc. si sommano tutti i numeri contenuti in ciascuna delle caselle degl' intervalli verticali, e nelle ultime caselle più grandi a piedi della tavola si scrivono le somme. Ciascuno di questi numeri scritti in ciascuna di queste 24 caselle rappresenterà la somma dei minuti ne' quali è piovuto in ciascun' ora. Dando un' oc-

chiata a questi numeri si vede tosto che le ore più piovose nel mese di Agosto sono state la seconda, la prima, la quarta, la terza, e la vigesima; l'ora meno piovosa è stata la diciottesima, poichè in essa non piovette, indi la nona, la diciassettesima, la ventesimaterza, e la ventesimaquarta. Dividendo in tre parti il giorno di 8 in 8 ore si trova che le prime otto ore sono state più piovose delle seconde e queste più delle ultime. In somma questa tavola dà in un momento tutti i confronti e paragoni della durata della pioggia ecc.

DELL' IOMETROGRAFO.

Non basta sapere la durata della pioggia, conviene anche determinare la quantità dell'acqua che piove di ora in ora. Se la pioggia fosse sempre uniforme, tenendo conto della durata si avrebbe anche la di lei quantità; ma rare volte anzi quasi mai succede nel nostro clima almeno che la pioggia sia uniforme massime nella state e nell'autunno, poichè durante qualche rovinoso temporale la furia dell'acqua è tale che la quantità dell'acqua che piove uguaglia, e supera quella che nello spazio d'una settimana o di un mese piove nell'inverno, o nella primavera. Perciò ho pensato di aggiugnere al Croniografo anche l'Iometrografo, una macchina cioè che sulla tavola circolare *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) scrive la precisa quantità dell'acqua che piove d'ora in ora.

Per avere tutta la pioggia, che cade nel grande imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) senza che se ne faccia la menoma dispersione, è necessario che l'apertura dell'imbuto *AA* ossia il tubetto conico *B*, in cui termina l'imbuto *AA*, entri in un tubo cilindrico *CC* di un diametro per lo meno del doppio maggiore della suddetta apertura *B*; poichè l'acqua che raccoglie l'imbuto *AA* senza strisciare lungo le pareti del tubo *CC* tutta cade nel mezzo

mezzo del tubo ſuddetto, e la prima goccia che cade dal tubetto *B* cade nel ſottopoſto vaſetto *R* (*fig.* 2 *tav.* 1).

Inoltre è neceſſario che queſto imbuto oltre all' eſſere di una notabile grandezza ſia ſituato ſulla parte più elevata del tetto acciocchè tutta la pioggia qualunque direzione eſſa abbia ſia in eſſo raccolta. Nel noſtro clima in cui nell' inverno, e nell' autunno le pioggie ſono talvolta sì minute che ſembrano piuttoſto una folta nebbia che precipiti che una pioggia, pure adoperando un imbuto che abbia nove piedi quadrati di area, la quantità dell' acqua che eſſo raccoglie è tale che le goccie che cadono dall' apertura *B* dell' imbuto *AA* (*fig.* 9 *tav.* 2) ſi ſuccedono con tale e tanta prontezza che non vi è fra l' una e l' altra un quarto di minuto ſecondo, come ho avuto occaſione di oſſervare adoperando un orologio che ſegnava i quarti di ſecondo.

Situato un tale imbuto ſul colmo del tetto, l' acqua che da eſſo fluiſce ſi raccoglie nel vaſe Iometrico *OAAO* rappreſentato nella *fig.* 5 della *tav.* 1. Queſto vaſe *AAOO* è formato di un tubo cilindrico *AA* di criſtallo, chiuſo inferiormente da una laſtra d' ottone *PP* e ſuperiormente da un coperchio parimenti d' ottone *TT*, il quale ha nel mezzo un foro circolare *V* di circa una linea e mezzo di diametro; ed ha lateralmente un tubetto d' ottone *SS*, il quale è fatto a forma di cono in tutta la groſſezza della laſtra d' ottone *TT*, indi s' inalza cilindrico fino al labbro del vaſe *OO*.

Io chiamo queſto tubo *SS* il tubo sfiatatore, perchè appunto ſerve a dar uſcita all' aria contenuta nel vaſe *AA* a miſura che eſſa è ſcacciata dall' acqua che cade pel foro *V*; ed affinchè l' apertura di queſto tubo *SS* non venga chiuſa da qualche goccia d' acqua che vi ſi poteſſe fermare, eſſa è fatta eſpreſſamente di una figura conica.

Nel mezzo di queſto vaſe *AA* evvi un ſifone tantalo *DDCCC* di criſtallo compoſto di due bracci di diſegual diametro e lunghezza. Il braccio più corto *DD* ha circa quattro linee di diametro, e conſerva un tal diametro quaſi fino all'origine della curvatura del ſifone dove ſi riſtringe e non ha che due linee poco più di diametro: vale a dire lo ſteſſo diametro dell' altro braccio *CCC*. L'eſtremità di queſto braccio *DD* giugne quaſi fino a radere il fondo *PP* del vaſe *AA*, non lo tocca però, poichè è da quellò diſtante un quarto di linea franceſe. L'altro braccio *CCC* continua cilindrico per quaſi tutta la ſua lunghezza, eſce dal fondo *PP*, e ſi ſcarica nell'imbuto *K* che or ora deſcriverò.

Al diſopra del coperto *TT* evvi ſtabilmente fiſſato un altro tubo di criſtallo *OO* di un diametro maggiore del vaſe *AA*. Queſto ha lateralmente una fineſtra *B* per ricevere le due leve oſſia aſte orizzontali *QQ* *YY*, e i pezzi che loro appartengono.

La *fig.* 4 della *tav.* 2. rappreſenta la ſezione oſſia ſpaccato di queſto vaſe Iometrico, e dimoſtra che il braccio *DD* del ſifone *DDCCC* non arriva a toccare il fondo *PP*, che la ſommità della curvatura del ſuddetto ſifone entra nella groſſezza del coperto *TT*, in cui evvi eſpreſſamente una picciola cavità per riceverla, che il tubetto sfiatatore *SS* è aperto a forma di cono nel vaſe *AA*, e che finalmente nel mezzo del coperchio *TT* evvi un foro circolare *Y*.

Nelle due laſtre orizzontali *HH* del telajo *HGHG* (vedi *fig.* 2 *tav.* 1, e *fig.* 2 *tav.* 2) vi ſono due fineſtre quadrangolari *S*, *T*, nelle quali ſcorre un' aſta quadrangolare *LL* ſimile in tutto all'aſta *MM* ſolo che è alquanto più lunga. Affinchè i movimenti di queſta aſta ſieno liberi e facili, eſſa pure ha applicato quattro rotelle *P*, *P*, ecc. come l'aſta *MM*.

Sul piano dell'eſtremità ſuperiore di queſta aſta *LL* è fiſſata con una vite W un'aſta orizzontale *XX*, che

da una parte ha attaccato un porta-matita *K*, e dall' altra porta un tubetto d'ottone *F*, dentro il quale ſi move un'aſta cilindrica *I* che termina in un guancialetto di pelle *L*. L'aſta *I* è attaccata ad una molla ſpirale che la ſoſtiene, come ſi vede nella ſezione di queſto tubetto rappreſentata nella *fig.* 3 della *tav.* 2. In vece della molla ſpirale ſi può fiſſare ſul piano dell'aſta orizzontale *XX* una molla *OO* (*fig.* 10 *tav.* 2), ed attaccare ad eſſa l'aſta cilindrica *I*, poichè queſta molla *OO* fa le veci della molla ſpirale contenuta nel tubetto *F*.

Oltre a ciò l'aſta *LL* ha inferiormente un'aſta d'ottone *FF* verſo l'eſtremità un poco piegata acciocchè il mezzo dell'imbuto *KK* ad eſſa attaccato corriſponda al mezzo della groſſezza dell' aſta quadrangolare *LL*. Il peſo dell'aſta *LL* e di tutti i pezzi che le ſono anneſſi è ſoſtenuto da una molla ſpirale *SS* ſimile a quella che ſoſtiene l'altra aſta *MM*. Anche per queſta aſta *LL* la forza della molla *SS* deve eſſere tale che l'eſtremità della matita *K* ſia tenuta diſtante dalla tavola circolare *AA* circa di due linee parigine.

A miſura che l' acqua pel foro *V* cade nel vaſe *AA* l' aria in eſſo contenuta eſce pel tubo sfiatatore *SS*, e intanto l'acqua va a poco a poco inalzandoſi, e giunta che ſia raſente la linea punteggiata *XX* (*fig.* 4. *tav.* 2) il ſifone tantalo *DDCCC* in pochi ſecondi vota il vaſe *AA*, poichè giunta l' acqua alla ſuddetta linea *XX*, l' altra acqua che ſopravviene non trovando altro ſpazio da occupare fuori che il picciolo ſpazio cilindrico che forma il foro *V* fatto nel coperchio *TT*, in eſſo s' inalza, e baſta il peſo della picciola colonnetta d' acqua contenuta nel foro *V* per obbligare il ſifone *DDCCC* a vuotare il vaſe *AA*; e ſiccome anche nelle pioggie minutiſſime un tale ſpazio *V* appena arrivata che ſia l' acqua nel vaſe *AA* alla linea punteggiata *XX* in meno di un minuto ſecondo è riem-

piuto; perciò ſenz' altro ſi può aſſerire che toſto che l' acqua è arrivata alla linea *XX* il ſiſone *DDCCC* voterà il vaſe *AA*.

Se la curvatura del ſiſone *DDCC* invece di eſſere incaſſata nella groſſezza del coperchio *TT* toccaſſe ſoltanto il piano inferiore del coperchio *TT* o foſſe da quello diſtante di una qualche linea, accaderebbe che nelle minute pioggie l' acqua che cade nel vaſe *AA* giunta alla ſommità del ſiſone *DDCC* a poco a poco ſtriſciando lungo le pareti intime del ſiſone fluirebbe in goccie continue dal braccio più lungo *CC*, e continuando a piovigginare il vaſe *AA* mai non ſi voterebbe, ed allora ſoltanto ſi voterebbe quando la pioggia foſſe abbondante, poichè l' acqua in un tal caſo s' inalza toſto al diſopra della ſommità della curvatura del ſiſone *DDCC*, e forma al diſopra di eſſa una ſenſibile colonna d' acqua baſtevole a forzare il ſiſone *DDCC* a vuotare il vaſe *AA*.

L' acqua che ſcarica il ſiſone *DDCC* cade nell' imbuto *K*, e col ſuo peſo tira all' ingiù ed abbaſſa l' aſta *LL*. Il guancialetto *L* attaccato all' eſtremità dell' aſta orizzontale *XX* al momento che ſi abbaſſa l' aſta *LL* ermeticamente chiude il foro *V*, e non permette quindi che la pioggia che cade durante il fluſſo del ſiſone *DDCC* entri nel vaſe *AA*, e l' obbliga a raccoglierſi nel vaſe ſuperiore *OO*. Oltre il guancialetto *L* coll' abbaſſamento dell' aſta *LL* ſi abbaſſa anche la matita *K* attaccata all' altra eſtremità dell' aſta orizzontale *XX*, e ſta appoggiata ſulla zona *BB* della tavola circolare *AA* fino a tanto che l' imbuto *K* ſia ripieno d' acqua.

Ceſſato il fluſſo del ſiſone *DDCC* il vaſe conico *K* è toſto votato dal ſiſone *OO*, e la molla ſpirale *SS* non aggravata dal peſo dell' acqua contenuta nel vaſe conico *K* eleva alla primiera altezza l' aſta quadrangolare *LL*, e ſeco la matita *K* ed il turacciolo *L*. L' acqua piovuta nel tempo che il foro *V* è ſtato chiuſo dal

turacciolo *L*, e che ſi è raccolta nel vaſe *OO*, toſto che il turacciolo *L* s' inalza, e ſchiude il foro *V*, entra ſubito nel vaſe Iometrico *AA* ed ivi s' inalza: continuando la pioggia l' acqua ſi eleva nel vaſe *AA*, e finalmente di bel nuovo giugne alla linea punteggiata *XX*; allora il ſifone *DDCC* novamente vota il vaſe *AA*. L' acqua che ſcarica il ſifone *DDCC* cade nel vaſe conico *K*, abbaſſa l'aſta *LL*, e di bel nuovo il turacciolo *L* chiude il foro *V*, e la matita *K* ſi appoggia ſulla tavola circolare *AA*. Queſto giuoco ogni volta ſi ripete che il vaſe *AA* ſi vuota, e ad ogni votamento la matita *K* appoggia ſulla tavola circolare *AA* e la ſegna laſciando un ſenſibile punto bianco ſulla zona nera *BB*. Perciò ogni punto bianco che ſi troverà ſegnato ſulla zona *BB* indicherà un votamento del vaſe *AA*, talchè ſe per cagion di eſempio il vaſe *AA* ſi è votato 10 volte nell' ora 21, nello ſpazio della zona *BB* corriſpondente ad una tal ora ſi troveranno ſegnati dieci viſibili punti bianchi.

Nell' Iometrografo che io ho fatto coſtruire per le mie oſſervazioni Metereologiche la capacità del vaſe *AA* è preciſamente eguale ad $\frac{1}{3}$ di linea d' acqua che piova nel vaſto imbuto *AA*, onde ſe nell' ora 21 ſi trovano ſegnati dieci punti, queſti eſprimeranno 10 terzi di linea oſſia tre linee ed un terzo d' acqua piovuta in una tal ora nell' imbuto *AA*. Potrebbe baſtare il portare la preciſione dell' oſſervazione della quantità dell' acqua piovuta ad un terzo di linea, pure adattando a fianco del vaſe *AA* una ſcala *NN* che divida tutta l' altezza del vaſe *AA* in 100 parti eguali, ſi potrà avere la quantità dell' acqua dentro la preciſione di $\frac{1}{300}$ di linea, ciò che è più del biſogno.

Egli è chiaro altresì che quaſi nulla è l' evaporazione dell' acqua che ſi miſura, poichè a miſura che l' ac-

qua piove eſſa è miſurata da queſta macchina, e quella che rimane nel vaſe *AA* non può ſvaporare ſtante che l' acqua contenuta nel vaſe *AA* non comunica coll' aria eſterna ſe non per l' anguſtia del foro *V* e dello sfiatatore *SS*; ed è chiaro altresì che la miſura della quantità della pioggia che cade di ora in ora deve riuſcir eſattiſſima, poichè qualora il ſifone *DDCC* abbia le dimenſioni ſovraindicate immancabilmente arrivata che ſia l' acqua alla linea punteggiata *XX* voterà il vaſe *AA*.

Diſſi, purchè il ſifone *DDCC* abbia le dimenſioni ſovraindicate, poichè ſe invece di fare la gamba più corta *DD* di un diametro di 4 linee ſi faceſſe di ſole due linee e mezzo, molte volte accaderebbe che il vaſe Iometrico *AA* ſi voterebbe prima che l' acqua giunga alla linea *XX*. Poichè eſſendo il tubo *DD* di un tal diametro, dopo che il ſifone *DDCC* ha votato il vaſe *AA* qualche porzione d' acqua reſta tuttavia ſoſpeſa nel tubo *DD*; perciò ſopravvenendo nuova acqua nel vaſe *AA*, queſta colonnetta d' acqua ſoſpeſa nel tubo *DD* a poco a poco s' inalza alla curvatura del ſifone *DDCC*, e vi perviene prima che l' acqua giunga alla linea punteggiata *XX*; conſeguentemente il vaſe *AA* ſi voterà ora ad un' altezza ed ora ad un' altra dell' acqua in eſſo contenuta ſecondo che maggiore o minore ſarà la lunghezza della colonnetta d' acqua ſoſpeſa nel tubo *DD*. Un tale inconveniente ſi evita facendo il braccio più corto *DD* del ſifone *DDCC* di un diametro di 4 linee, poichè in un tal tubo l' acqua non può ſtarvi ſoſpeſa per eſſere la gravità di una comunque picciola colonnetta d' acqua maggiore dell' attrazione del vetro coll' acqua.

L' aſta *I* a cui è attaccato il turacciolo *L* appartiene ad una molla ſpirale acciocchè chiuda eſattamente il foro *V* al momento che è cominciato il fluſſo del ſifone *DDCC* ſenza impedire che la matita *K* appoggi ſulla

zona *BB* della tavola circolare *AA* anche nel caso che la suddetta matita si puntasse, poichè il peso dell' acqua che cade nell' imbuto *AA* supera di gran lunga la resistenza della molla spirale contenuta nel tubo *I*; ed abbassa l' asta quadrangolare *LL* fino a tanto che il turacciolo *L* chiuda ermeticamente il foro *V*, e che la matita *K* appoggi sulla zona *BB*.

Ho fatto adattare sul piano superiore del coperchio *TT* una valvola d' ottone coperta di una pelle. Una molla d' ottone tiene sollevata questa valvola dal piano *TT* acciocchè l' acqua possa liberamente entrare pel foro *V* nel vase *AA*. Ma al momento che il vase *AA* è votato dal sifone *DDCC* la suddetta valvola viene abbassata dal turacciolo *L*, che appoggiando sulla valvola la comprime contro il piano superiore del coperchio *TT*. Cessato il flusso del sifone, il turacciolo *L* s' inalza coll' asta quadrangolare *LL*, e la molla attaccata alla valvola inalza la valvola ed apre il foro *V* del coperchio *TT*.

L' artificio di questa valvola è forse migliore dell' altro che poc' anzi ho descritto, poichè se il guancialetto *L* (*fig.* 3 *tav.* 2) non è ben fatto, non sempre abbassandosi ed appoggiando sul foro *V* ermeticamente lo chiude; laddove la valvola per essere piana, e coperta di una pelle immancabilmente abbassandosi sul piano del coperto *TT* toglie ogni comunicazione fra il vase *AA* ed il pezzo superiore di tubo *OO*.

Una tavola simile a quella che serve per registrare i risultati del Croniografo egualmente serve pel registro di quelli che dà l' Iometrografo, poichè ogni punto che la matita *K* scrive sulla zona annerita *BB* rappresentando un terzo di linea di acqua che è piovuto nell' imbuto *AA* (*fig.* 9. *tav.* 2), si potrebbe per ogni punto che si trova segnato in ciascun' ora scrivere sulla tavola nella casella corrispondente a ciascun' ora un terzo di linea. Ma siccome molte volte accade che per

eſempio il vaſe Iometrico *AA* (*fig.* 2 *tav.* 1) non ſi vuota in tre o quattro ore ſe non una ſola volta, e che la pioggia nella prima di queſte ore non durò che per ſoli 15 minuti, nella ſeconda per ſoli 10′, e nella terza 20′, perciò in un tal caſo io ſoglio riſguardare la pioggia come ſe foſſe ſtata uniforme in tutto il tempo in cui è piovuto, e riparto il terzo di linea di pioggia caduta nei tempi ſuddetti proporzionatamente ai numeri ſovraindicati 15, 10, e 20. Dividendo quindi il terzo di linea in 100 parti per li primi 15′, ſi ſcriverà nella caſella il n°. 34 cioè $\frac{30}{100}$ di un terzo di una linea, per li 10′ ſi ſcriverà $\frac{22}{100}$, e per li 20′ $\frac{44}{100}$.

La tavola della quantità della pioggia caduta nel meſe di Agoſto renderà più chiaro gli uſi della medeſima, e la di lei inſpezione dimoſtrerà meglio come ſi poſſa facilmente con eſſa determinare la quantità dell' acqua che cade di giorno in giorno, di ora in ora ecc. quali ſieno ſtate le ore in cui ſia caduta una maggiore copia d' acqua, ſe maggiore ſia la quantità dell' acqua che piove di notte che di giorno ecc.

RICERCHE

AGOSTO

Quantità della pioggia

Mem. della Società Italiana Tomo I. pag. 224

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*Somma dei trecentesimi in ciascun giorno.*
1																									
2																									
3					300	400	60	100	40							135									1035
4			60	100																					160
5		300	135																						435
6																									
7																									
8																									
9																									
10																									
11																									
12																									
13																								130	130
14	300	600	150	60																					1110
15																				1800	2700	1200	100		5800
16	9200	640																							9840
17																									
18																									
19														50	60	30	50		20			50			260
20																			1100	600	100				1800
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									
26																									
27																									
28																									
29																									
30																									
31																									
Somma dei trecentesimi in ciascun' Ora.	9500	1540	345	160	300	400	60	100	40					50	60	165	50		1120	2400	280	1250	100	130	20570

12605 | 315 | 7650

163

15140

1805

AGOSTO

Durata della pioggia 1785.

Agosto	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	*Somma dei minuti in ciascun giorno.*	
1																										
2																										
3					15	25	10	15	5							5									75	
4			30	40																					70	
5		25	50																						75	
6																				5					5	225
7																										
8																										
9																										
10																										
11																										
12																										
13																								15	15	
14	60	60	20	10																					150	
15																				40	60	60	15		175	
16	60	55																							115	610
17																										
18																										
19														60	60	15	10		5			5			155	
20																			45	60	5				110	
21			5	60	60	40	25	55		60	60	60	20	25											470	580
22																										
23																										
24																										
25																										
26																										
27																										
28																										
29																										
30																										
31																										
Somma dei minuti in ciascun' Ora.	120	140	105	110	75	65	35	70	5	60	60	60	20	85	60	20	10		50	105	65	65	15	15	1415	
			720									370								325						

fig. 5.
fig. 2.
fig. 6.
fig. 4.

fig. 2.
fig. 3.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 6.

fig. 1.
fig. 2.
fig. 4.
fig. 5.
fig. 8.
fig. 11.
W
X
F
I
L
G
B
O
S
V
T
A
C
D
P
Q
M
K

RICERCHE
ED
OSSERVAZIONI SOCIALI

Fatte per perfezionare il Barometro.

Del Sig. PIETRO MOSCATI Regio Profeſſore,

e Sig. Cavaliere MARSILIO LANDRIANI.

NOnoſtante le immenſe, e laborioſe ricerche del celebre Signor de *Luc*, per determinare le cagioni, per le quali i barometri nello ſteſſo luogo non ſi tengono ad una eguale altezza, e per trovare i mezzi per conſeguire dei barometri, che aveſſero la qualità di tenerſi ad una altezza eguale; pure quando ſi è voluto accuratamente eſtimare la riſpettiva altezza dei barometri fabbricati in diverſi paeſi, ſebben fatti con tutte le cautele, ed avvertenze preſcritte dal Sig. de *Luc*, ſi è trovato, che il più delle volte queſti differivano fra di loro ſenſibilmente, e che queſta loro differenza non ſolo non era ſempre coſtantemente la medeſima; ma perfino quel barometro, che per alcuni meſi ſi era tenuto coſtantemente più alto dell'altro, dipoi ſi teneva coſtantemente più baſſo, ſiccome fu oſſervato dall'illuſtre, ed eccellente Fiſico il Cav. *Shuckburgh* (*). Per-

(*) Vedi Mem. del Cav. *Shuckburgh*, *Sperienze ed oſſervazioni fatte in Savoja ecc.* inſerita nelle Tranſazioni Filoſofiche vol. 65.

ciò chiunque ha voluto far uſo di queſti iſtromenti per eſperienze delicate ha dovuto ſempre prima d'intraprendere le oſſervazioni determinare, e tener conto delle riſpettive differenze nelle altezze dei barometri adoperati; ed il celebre Sig. *Magellan* (*) per evitare l'incomodo di queſta deduzione ha conſigliato di ſituare il nonio del barometro, che ſi tiene più baſſo, al medeſimo grado marcato dall'altro barometro; e quando ſi trattò di ſperienze di confronto fatte in paeſi lontani ſi è ſempre dovuto partire dalla gratuita ſuppoſizione, che i barometri adoperati aveſſero a tenerſi ad un' altezza eguale, qualora foſſero portati nello ſteſſo luogo. Alcuni altri ancora hanno oſſervato, che il barometro appena poſto in eſperienza non indica ſubito il vero e preciſo peſo dell'aria; ma che per avere la vera e giuſta altezza conviene aſpettare ed oſſervare il barometro, ſecondo alcuni un quarto d'ora, e ſecondo che vogliono altri una buona mezz'ora, conſigliando di più a dare delle picciole ſcoſſe ed urti al barometro per obbligare il mercurio a ſtaccarſi dalle pareti del tubo, che lo attraggono.

Molte altre anomalie ancora ſi ſono oſſervate in queſto genere di ſperienze, per le quali taluno ſcoraggiatoſi ha amato meglio di rigettare queſto iſtromento come inefficace per l'oggetto, a cui volevaſi farlo ſervire, la miſura cioè delle altezze, che d'indagare da quali cagioni mai derivar poteſſero queſte differenze, e quali foſſero i mezzi più opportuni per rimediarvi.

Noi non crediamo di eſſere pienamente riuſciti, meno poi di aver eſaurito queſta materia; ma ci luſinghiamo che ora, che tanti illuſtri Fiſici del primo ordine ſi ſono occupati, e ſi occupano sì utilmente di

---

(*) Diſſertation ſur les Barometres nouveaux. pag. 105.

ſperienze barometriche, e che non ſolo ſi penſa a far ſervire queſto utile iſtromento alla miſura delle grandi ma anche delle picciole altezze, che le ſperienze, che noi abbiamo fatte, non abbiano ad eſſere riguardate come ſterili e vane ricerche; ma che eſſe poſſano ſicuramente contribuire alla perfezione ed al miglioramento di un così utile iſtromento; eſſendo i riſultati della maggior parte di queſte noſtre ſperienze del tutto nuovi, ed oſiamo dire, di una non mediocre importanza.

Prima d'indicare i diverſi articoli di ricerca, dei quali il Sig. Profeſſor *Moſcati* ed io ci ſiamo occupati, è neceſſario di premettere la deſcrizione dell'apparato da noi uſato per queſte ſperienze, e che noi chiamiamo *Barometro di prova*, appunto per aver con eſſo eſaminato d'onde procedere poteſſero le anomalie oſſervate nelle ſperienze barometriche.

Fig. 1 *KK* è una tavola di legno ſcottata, ed eſſiccata al forno, quindi ancora molto calda unta d'olio, che nuovamente ſi fa aſciugare nel forno, affine di renderla immobile anche ad un forte calore della ſtuffa. Eſſa è lunga pollici 46, larga 5, e groſſa circa 10 linee, ed ha due feſſure oſſia fineſtre bislunghe *SS*, *OO*, ambedue larghe circa 8 linee; ma la *SS* ha circa 17 pollici di lunghezza, mentre l'inferiore *OO* non ne ha che circa quindici. Sopra queſta tavola ſta per mezzo di due collari d'ottone *BB* fermati con viti incaſſata la canna barometrica *ACD*, lunga eſſa pure 46 pollici, e curvata in *C* a forma di ſifone.

La parte rivoltata di queſto tubo è circa di 4 pollici; due pollici formano la curvatura, gli altri due pollici s'inalzano paralleli al tubo più lungo *AC*, ed entrano per circa un mezzo pollice nella coda di un pozzetto di criſtallo *E*, la di cui capacità, e lunghezza ſono arbitrarie. L'eſtremità di queſto tubo rivoltato pene-

tra circa ad un terzo della cavità sferica del pozzetto *E*, il quale ha lateralmente un tubulo, in cui è con mastice adattato un bocchino di ferro, che si chiude colla vite *F* pure di ferro. L' apertura superiore di questo pozzetto (come si vede dalla figura 2, nella quale è disegnato separatamente il pozzetto *E*) è svasata, anzi termina in un vero imbuto, perchè venendo per qualche accidente a smoversi la canna *PP*, che si adatta nel collo di questo imbuto, il mercurio in essa contenuto non abbia a spandersi per terra. Altronde siccome in questo imbuto si sono frequentemente cangiate le canne *PP* nelle sperienze, che faremo per riferire, queste si possono con molta facilità adattare con cera, e la figura d' imbuto è molto opportuna a questo effetto. L' estremità superiore della canna *ACD* riposa in un incavo fatto nella tavola coperto di una doppia pelle; la parte curvata *CD* della suddetta canna non meno, che il pozzetto *E*, e tutta la canna al disotto dell' apertura *SS*, sono incassate per la metà della loro grossezza nella tavola *KK*, e sono con opportuno cemento su quella assicurate.

A fianco della canna *ACD* ad una certa distanza è fissata la scala d' ottone *NN*, sotto alla quale evvi un rocchetto, che s' incastra in una sega dentata, mediante la quale si può con somma facilità inalzare, od abbassare una lunga riga d' ottone *TT*, che scorre sulla lastra piana d' ottone *NN*, su cui sono le divisioni in pollici linee ecc., e che è attaccata con viti alla sottoposta sega dentata. Il lembo di questa riga scorrevole d' ottone *TT* per quella parte, che guarda le divisioni fatte sulla scala d' ottone *NN*, è fatta a smusso, e sullo smusso sono incise le divisioni di due nonj.

Questa riga d' ottone *TT*, che si move colla sega dentata, è lunga circa 30 pollici, perchè avendo alle due sue estremità attaccati due anelli *H*, *L*, per mezzo di due solide code d' ottone si può coll' anello in-

feriore *L* fcorrere tutta la canna *PP*, e coll' anello fuperiore *H* percorrere la canna barometrica *ACD* da *S* in *S*. La figura 6 rapprefenta in grande l' anello *H* che attaccato per mezzo della coda *M* alla riga *TT* fcorre fulla canna *AC*, e la figura 5 efprime l' altro anello più grande *L* fiffato all' eftremità della riga *TT*.

Il lembo tagliente di ciafcuno di quefti anelli deve effer tale, che precifamente corrifponda allo zero della divifione dei due nonj fatti fullo fmuffo della riga *TT*; di più è neceffario, che quefti anelli fieno più larghi della canna fu cui fcorrono, maffime l' inferiore *L*, il quale ha circa 8 in 9 linee di diametro, acciocchè poffa fcorrere fopra canne di 4 e più linee di diametro adattabili nell' imbuto del pozzetto *E* in vece della canna *PP*.

Per muover poi la fega dentata fottopofta alla fcala *NN* l' albero del rocchetto, che incontra i denti della fega, penetra la groffezza della fcala *NN*, ed è formontato da un bottone incatramato d' ottone *R*, mediante il quale con tutta facilità fi fanno muovere il rocchetto, e la fega fottopofti.

Qualora vogliafi mettere in efperienza quefto apparato conviene fofpenderlo in una pofizione verticale; e fituarlo in modo, che la luce fia al di dietro della tavola. Ciò fatto fe fi voglia per cagion d' efempio determinare di quanto fi accrefca l' altezza barometrica coll' ingrandimento del vuoto, fi fitua l' anello inferiore *L* in modo che lo zero della divifione del fuo nonio efattamente corrifponda al principio della divifione della fcala *NN*; indi fi verfa nella canna *PP* tanto mercurio, quanto bafta perchè il colmo della colonna mercuriale rada precifamente il lembo tagliente dell' anello *L* (*), facendo allora girare il bottone *R*, fi fa

(*) Nella figura 7 è rapprefentato il contatto del lembo dell' anello L colla fommità della curva mercuriale.

inalzare l'anello *H* fino a tanto che egli pure tocchi col ſuo lembo tagliente l' apice della curva ſuperiore della colonna mercuriale inalzata nella canna *ACD*, e ſi nota ſopra una carta la diſtanza che evvi fra l' apice della curva, dirò così, mercuriale del tubo *PP* e quella del tubo *ACD*. Ciò determinato ſi ſitua l'anello *H* inferiore in modo, che lo zero del ſuo nonio coincida col primo pollice della ſcala *NN*. In un tal caſo per diminuire il vuoto nella canna *ACD* di un pollice, conviene verſare nella canna *PP* del mercurio fino che l'apice della curva mercuriale tocchi il lembo dell'anello *L*, indi s' inalza l'anello *H*, e ſi miſura come nella prima ſperienza la diſtanza fra l'apice della curva inferiore e quello della curva ſuperiore: la differenza, che ſi troverà fra la diſtanza avuta nella prima ſperienza, quando ſopra la colonna mercuriale vi erano 16 pollici di vuoto, e quella che ſi è trovata nella ſeconda ſperienza, in cui non vi erano che ſoli 15 pollici di vuoto, ſarà intieramente dovuta al pollice di meno di vuoto, che era ſopra la colonna mercuriale, purchè la canna *ACD* e la canna *PP* ſieno di un diametro uniforme; poichè ſe il loro diametro nelle lunghezze *SS*, *PP* non foſſe uniforme, ſi potrebbe attribuire la maggiore o minore altezza oſſervata alla differenza de' diametri.

Simili avvertenze ſi debbono avere quando ſi fanno delle ſperienze ſulle differenze de' diametri, delle canne della diverſa attrazione, delle differenti ſpecie di vetro e ſimili.

Qualora poi ſi vogliano aver delle canne, che abbiano un diametro eguale, oppure ſi voglia eſplorare, ſe una canna ſia, o no perſettamente cilindrica, rigettati tutti gli altri metodi propoſti ne' diverſi Trattati ſopra i barometri, come inſufficienti ed ineſatti, noi crediamo che il migliore di tutti, ed inſieme il più facile ſia quello che noi abbiamo ſeguito.

La tavola deſcritta *KK* non è tutta di una eguale

larghezza in tutta la ſua lunghezza, poichè verſo la metà della ſua altezza vicino alla ſcala *NN* è tagliato un pezzo della medeſima della larghezza circa di $\frac{1}{4}$ di pollice, come ſi vede nella figura 1. Alle due eſtremità di queſto taglio ſono fiſſati orizzontalmente due groſſi anelli d'ottone (*), nella groſſezza di ciaſcuno dei quali vi ſono tre lunghe viti XXX, che ſervono a comprimere, ed a trattenere ſortemente qualunque canna WW, che venga inſerita fra gli anelli ſuddetti. Situata in queſto modo immobilmente, e verticalmente negli anelli, e colle viti la canna WW, ſi verſa in eſſa un poco di mercurio, e coll'anello *V* ſi determina l'elevazione della curva della picciola colonna di mercurio verſata nel tubo WW; indi per avere delle quantità preciſamente eguali in miſura di mercurio ſi prende il tubo a chiave *AB* di criſtallo (vedi *fig.* 3), il quale è ſimile agli altri ſolo che in vece di avere tutta la chiave *C* penetrata da un foro cilindrico, il foro di queſta chiave non penetra che a ſoli due terzi della groſſezza della chiave. Queſto foro conico continua anche nel pezzo quadro, in cui gira la chiave, anzi ſi va notabilmente allargando, formando una ſpecie d'imbuto. La figura 5 rappreſenta lo ſpaccato di queſto tubo a chiave con entro la chiave *C*. *AB* è il pezzo quadro; *CC* la chiave del tubo; *V* il foro conico a forma d'imbuto; ed *I* la continuazione dello ſteſſo foro nella chiave *CC*. *S* poi è un foro cilindrico, che penetra tutta la groſſezza del pezzo quadro *AB*. Voltata pertanto la chiave *C* in modo, che il foro *I* della medeſima formi un ſolo foro col foro *V* del pezzo quadro *AB*, ſi riempie di mercurio tutta la cavità conica *VI*, e facendo girare la chiave *C* ſi taglia, e ſi ſepara dal rimanente il mercurio contenuto nel fo-

(*) Si vede uno di queſti anelli diſegnato più in grande nella fig. 8.

ro *I* della chiave *C*, e si continua a volgere la chiave sino a tanto che si arriva a fare comunicare il foro *I* della chiave col foro cilindrico *S* del pezzo quadro.

Ora la quantità del mercurio contenuto nella chiave, e tagliato in questo modo, sarà sempre una quantità costante in misura, la quale, se versata in una canna cilindrica W, deve formare in qualunque stato della medesima canna un'altezza costante; ma se la canna W si va allargando all'in su, la seconda misura di mercurio in essa versata occuperà un minore spazio di quello occupato dalla prima misura; tutto il contrario succederà, se la canna W in vece di allargarsi si ristringa; l'anello *V*, che scorre sulla canna W per mezzo della sega, e del rocchetto *R*, poichè è attaccato solidamente con viti alla riga d'ottone *TT*, misurerà la lunghezza, che acquistano le successive misure eguali di mercurio versate nella canna W, di cui vogliasi misurare il calibro.

Siccome noi abbiamo con questo mezzo misurate molte canne, che con qualunque altro conosciuto metodo si sarebbero giudicate perfettamente cilindriche, ed abbiamo trovato, che pochissime resistono a questa prova; e se vene sono che sieno tali, non lo sono che per lo spazio di pochi pollici; perciò quando le differenze nel diametro nelle diverse parti delle canne non sono grandissime, nè eccedono $\frac{1}{12}$ di linea, noi sogliamo risguardarle come buone, poichè facendo una tavola esatta di queste differenze, quando si voglia servirsi di una di queste canne per un barometro, o per qualunque altro istromento, che esigga una canna, che sia perfettamente cilindrica, tenendo conto, e computando le differenze notate nella tavola, si arriva ad aver dei risultati di una eguale precisione a quelli, che si sarebbero avuti adoperando una canna perfettamente cilindrica.

Noi

Noi abbiamo diſtinti i diverſi articoli di ricerca, de' quali ci ſiamo occupati, in differenti paragrafi; perchè qualora ſi aveſſe voluto dare un trattato completo delle cagioni, che contribuir poſſano a fare che i barometri non ſi tengano ad un'altezza eguale poſti nel medeſimo luogo, ſaremmo ſtati coſtretti a riportare, e ripetere tutto ciò, che è ſtato detto, e pubblicato dagli altri; onde per amore della brevità abbiamo creduto che foſſe miglior partito quello di dividere gli articoli delle noſtre ſperienze in varj diſtinti paragrafi.

§. I.

Del mercurio, che ſi deve adoperare pei barometri.

Ognuno ſa, che difficilmente ſi può avere del mercurio, che ſia totalmente ſgombro di materie ſtraniere, che ne alterano la di lui purezza, e conſeguentemente la di lui ſpecifica gravità. La maggior parte de' mercurj, che ſono in commercio, contengono del biſmut, qualche volta del piombo, e dello ſtagno. Quello delle miniere d'Idria, ſciolto nell'acido nitroſo, diviene leggiermente lattiginoſo, verſando nella ſoluzione dell'acqua diſtillata, appunto perchè il biſmut ſi ſtacca dall'acido, e ſi precipita ſotto forma di magiſtero. Ciò nonoſtante queſto è un mercurio di ottima qualità.

Colla ſublimazione, e colla diſtillazione difficilmente ſi può togliere al mercurio il metallo ſtraniero in quello diſciolto.

La calce nera qualche volta interſperſa di un pulviſcolo giallo, che ſi forma agitando lungamente il mercurio, oppure triturandolo, non è gia prodotta, come alcuni penſano, dai metalli miſti col mercurio, che nella triturazione ed agitazione ſi ſtaccano; ma queſto

pulviſcolo è una ſpecie di precipitato perflogiſticato, oſſia una calce mercuriale combinataſi coll' acido dell' atmosfera flogiſticato. Di fatto queſta calce è fornita anche dai mercurj, che non contengono punto alcun metallo ſtraniero.

Il filtrarlo per un cono ſottiliſſimo di carta, o per una pelle, può in alcuni caſi giovar a ſeparare porzione dei metalli miſti col mercurio, quando queſti ſieno in notabile quantità; ma non mai ſi arriverà con queſto mezzo a depurarlo interamente.

Alcuni pretendono, che ſiccome lo ſpirito di nitro ha una maggiore affinità col biſmut, che col mercurio, ſi poſſa collo ſpirito di nitro ſeparare tutto il biſmut contenuto nel mercurio. Ma chiunque conoſce l' arte degli aſſaggi, facilmente con noi converrà, che ſebbene una porzione del biſmut ſia con queſto mezzo ſeparabile, ve ne rimane tuttavia ſempre una notabile porzione inattaccata dall' acido nitroſo.

Siccome per le ſperienze barometriche è neceſſario di conoſcere la gravità ſpecifica del fluido, che ſi adopera per miſurare il peſo dell' aria, ed altronde per evitare qualunque incomoda computazione eſſendo molto opportuno il trovar un proceſſo, con cui avere un mercurio di una coſtante gravità ſpecifica, ci ſiamo anche di ciò occupati eſaminando con accurate ſperienze la diverſa gravità ſpecifica dei mercurj, ed indagando il proceſſo, che dia coſtantemente un mercurio di una data gravità ſpecifica.

Un cubo, o cilindro d' oro puriſſimo inverniciato di vernice di gomma copal per impedire, che il mercurio non lo attacchi, ſucceſſivamente peſato nei diverſi mercurj potrebbe dare la differenza delle gravità ſpecifiche dei diverſi mercurj tra la bilancia idroſtatica, non può mai indicare le menome differenze nelle gravità ſpecifiche de' corpi. Buffon nei *Supplementi all' Introduzione alla ſtoria naturale de' minerali* ha fat-

to osservare, che la bilancia idrostatica non può indicare se non quelle differenze nelle gravità specifiche de' corpi, che sono maggiori della viscosità, ed adesione delle molecole del fluido, in cui vengono pesati i corpi. Ma a ciò solo non si ristringe l'imperfezione della bilancia idrostatica, perchè il corpo pesato nel fluido, oltre all'adesione delle parti dello stesso fluido che egli deve superare, vincer deve anche il grado d'attrazione, che lo stesso fluido ha col corpo in esso pesato. Per esempio si supponga per un momento, che i tre metalli l'oro, il rame, ed il cobalto abbiano un'eguale gravità specifica; dico, che la bilancia idrostatica indicherebbe, che questi tre metalli abbiano una diversa gravità specifica, quando nella nostra ipotesi è in tutti loro eguale, poichè l'oro, secondo le belle sperienze del Sig. *Morveau* (*), essendo attratto dal mercurio con una forza eguale a 446, il rame con una forza eguale a 142, ed il cobalto con una forza eguale a 8; il cubo, o cilindro d'oro immerso nel mercurio, e sospeso alla bilancia si moverà in quel fluido metallico con maggior difficoltà del rame, ed il rame sarà smosso più difficilmente del cobalto nella suddetta proporzione di 446, 142, 8; onde per rendere alla bilancia il perduto equilibrio è necessario di metter nella coppa tanto di peso, che non solo equivalga all'eccesso della gravità specifica dell' oro sopra quella del mercurio, ma anche che sia equivalente alla quantità dell'attrazione del mercurio coll'oro. E minor essendo questa attrazione del mercurio col rame, e col cobalto, minor peso sarà necessario di contrapporre nella bilancia per rimettere l'equilibrio (**).

(*) Elements de Chymie de Dyon. Vol. I.

(**) L'esame delle imperfezioni della bilancia Idrostatica essendo estraneo all'oggetto di questa Memoria sarà più opportunamente trattato nelle *Lezioni di Fisica* che farò per pubblicare.

Perlochè noi ci ſiamo appigliati ad altri mezzi più opportuni; e primieramente, ſiccome la gravità ſpecifica de' corpi in parità di volume è come i loro peſi; abbiamo peſato con una bilancia ſenſibile dei volumi eguali di mercurio, ed abbiamo effettivamente trovato, che il mercurio revivificato dal ſublimato corroſivo, e dal cinabro ſono più peſanti di tutti gli altri mercurj venali, e che anche la gravità ſpecifica di queſti mercurj venali è fra loro molto diverſa.

Il mezzo impiegato per avere delle quantità in volume eguali di mercurio è ſtato un tubo a chiave di criſtallo *AB* (*fig.* 4) che ha una chiave *C*, la quale in vece di eſſere traforata da un foro, che penetri tutta la di lei groſſezza ha un ampio foro *I*, che non penetra, che a $\frac{2}{3}$ circa; ſi riempie dunque di mercurio tutta queſta cavità, ed il foro ſvaſato *V* del pezzo quadro del tubo a chiave *AB*; indi col volgere la chiave *C* ſi ſepara la quantità del mercurio contenuto nel foro *I* della chiave *C*, la quale ſarà ſempre una quantità eguale in volume di mercurio. Si peſino dunque ſei, o ſette di queſti volumi eguali di una data ſpecie di mercurio con una bilancia ſenſibiliſſima, e ſi prenda la media de' loro peſi; queſta media ſarà il peſo ſpecifico di quella ſpecie di mercurio.

Si può anche preſcindere dall' uſo di queſto tubo a chiave *AB* per avere delle quantità eguali in volume di mercurio.

Si prenda un tubo termometrico *AA* (*fig.* 11), che abbia ad una delle eſtremità ſoffiata una boccia *B*, e ſi riempia tutto di mercurio, come ſi aveſſe a fare un termometro; ciò fatto col calore ſi faccia montar il mercurio fino all' apertura del tubo, e ſi adatti al tubo un cono di carta *DD* ripieno di mercurio di modo che venendo il mercurio a raffreddarſi nella boccia il tubo abbia ad eſſere perfettamente pieno di mercurio. Di fatto quando il mercurio nella boccia è ridotto ad

una certa temperatura, bisogna immergerlo nel ghiaccio, e colà tenerlo immerso fino a tanto che abbia acquistato la temperatura del ghiaccio: allora si toglie il cono di carta *DD*, e per mezzo del fuoco si vuota il termometro *M* di tutto il mercurio, che egli contiene, il quale deve risguardarsi come una costante quantità. Ma questo metodo è troppo operoso, ed incomodo, ed esigge dell'abilità e destrezza nel caricare di mercurio questo termometro.

L'apparato, col quale abbiamo determinati gli altri elementi della costruzione del barometro, ci ha servito anche a determinare la gravità specifica dei diversi mercurj colla massima precisione, e facilità.

Situato il barometro di prova in una posizione verticale, e versato nella canna inferiore *PP* tanto mercurio fino che arrivi precisamente al decimoquarto pollice, si cerca, e si determina la precisa altezza del mercurio nell'altro braccio più lungo *ACD* del barometro. Ciò fatto si estrae, aprendo la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la figura 2 in cui è rappresentata più distintamente questa vite *F*) dal braccio corto tanto mercurio, quanto basti per fare, che la superficie inferiore della colonna mercuriale segni il secondo pollice; indi si rimettano in questa canna in luogo dei dodici pollici di mercurio estratti altri dodici pollici di mercurio revivificato dal sublimato corrosivo, o dal cinabro, di modo che questo mercurio segni il pollice decimoquarto precisamente. Se il mercurio revivificato dal cinabro, o dal sublimato corrosivo è più pesante del mercurio della miniera d'Idria, i dodici pollici di questo mercurio versati nella canna inferiore *PP* dovranno contrabilanciare una colonna di mercurio d'Idria di una lunghezza maggiore di dodici pollici, conseguentemente il mercurio nel tubo lungo barometrico *ACD* dovrà tenersi più elevato, quando vi sono nel tubo corto *PP* dodici pollici di mercurio revivificato, di

quando in vece di questi dodici pollici vi sono dodici pollici di mercurio della miniera d'Idria.

Tale è il metodo, che noi abbiamo ad ogni altro preferito in questa ricerca, e che ci ha dimostrato, che le diverse specie di mercurio, che sono in commercio, hanno una diversa gravità specifica; e che non sempre quello, che è revivificato dal cinabro, ha una gravità costante, perchè nei cinabri comuni evvi molte volte del piombo in istato di minio, che si revivifica, ed il mercurio resuscitato dal cinabro ha un certo untume, e forma una certa pellicola, che difficilmente gli si può torre.

Il mercurio revivificato dal sublimato corrosivo per mezzo della calce è quello, che noi abbiamo trovato avere una gravità specifica più costante d' ogni altro mercurio, e perciò deve essere ad ogni altra specie di mercurio preferito per caricare barometri, termometri, di modo che qualora i barometri sieno caricati con questa specie di mercurio non è necessario di tener conto della gravità specifica del mercurio, potendosi assumere per eguale senza alcun pericolo di sbagliare. Anzi noi consigliamo chiunque voglia intraprendere delle osservazioni barometriche di una certa precisione ad adoperare dei barometri caricati di mercurio revivificato dal sublimato corrosivo, perchè oltre all'esser questo mercurio di una gravità specifica costante è molto più fluido, ed è meno attratto dal vetro di qualunque altra specie di mercurio, che noi abbiamo sperimentato. Di fatto il colmo delle colonne di un tal mercurio è qualche poco più elevato, e convesso di quando queste colonne sono di un qualunque altro mercurio, appunto perchè essendo più fluido, vale a dire essendo meno fra loro aderenti le molecole, che lo compongono, le parti centrali della colonna mercuriale risentono meno l' attrazione delle pareti del tubo di vetro, e quella delle molecole di mercurio, che sono a quelle più vicine.

§. II.

Della qualità del vetro più opportuno pel barometro.

Il Sig. de *Luc* (*) alla pag. 161 delle *Ricerche sulle modificazioni dell' atmosfera* riflettendo alla perfezione, a cui sono stati portati i cannocchiali acromatici, dopo che si è pensato alla scelta della qualità del vetro, crede, che qualora si pensasse a trovar qualche specie di vetro omogeneo, si potrebbe forse ottenere che le colonne di mercurio chiuse in questo vetro non obbedissero, che al solo peso dell' aria, ed al calore, oppure che la loro resistenza avesse ad essere costantemente la medesima. Effettivamente deve l' attrazione del vetro col mercurio esser differente secondo la quantità, qualità, e mistura delle sostanze delle quali egli è formato (**). Sarebbero perciò interessanti sperienze quelle, che determinassero il grado d' attrazione dei diversi vetri col mercurio, ed a questo oggetto opportunissimo sarebbe l' apparato del Signor *Morveau*, con cui ha dimostrato l' attrazione del vetro col mercurio. Ma per dimostrare, che questa attrazione del mercurio colle diverse specie di vetro influisce sulle altezze barometriche, s' adattino nel pozzetto del barometro di prova varie canne di una medesima grossezza, lunghezza, e diametro, ma di vetro

---

(*) Recher. sur les Modif. de l' Athmosphere Vol. 2.

(**) Il Sig. *Balbi* supponendo, che la depressione del mercurio ne' tubi capillari dipenda dalla ripulsione, crede che questa forza ripulsiva sia differente nei diversi vetri; ed avendo immerso nel mercurio 4 tubi capillari aventi eguale diametro, e lunghezza, trovò che il mercurio stava inegualmente in essi depresso. Questi quattro tubi erano di vetro di Bologna, di Venezia, di Firenze, e di Roma. Collect. Accad. Vol. X. partie etrang. pag. 785.

diverſo, e ſi oſſervi a quale altezza nel tubo lungo ſi tenga elevato il mercurio.

Le ſperienze, che noi abbiamo fatto ſi limitano a tre ſole ſpecie di vetro, al vetro che ſi fabbrica a Venezia ad imitazione del Flint d' Inghilterra, al Flint Ingleſe, ed al criſtallo di Boemia.

Adattato il tubo di Flint Veneto, che aveva 6 pollici di larghezza, e 2 $\frac{1}{2}$ linee di diametro, il mercurio ſi tenne a pollici 29. lin. 6. 0039.

In un tubo di Flint Ingleſe l' altezza fu di 29 pollici linee 6. 0049.

In un tubo di criſtallo di Boemia il mercurio ſi tenne a 29 pollici lin. 6. 0045.

Dunque la qualità del vetro influiſce ſull' altezza del barometro.

§. III.

Degli effetti dell' ineguaglianza de' diametri de' tubi barometrici nell' altezza della colonna mercuriale.

La prima oſſervazione, che noi abbiamo intorno a queſto argomento, è quella del Sig. Avvocato *la Plantade* riferita dal Sig. *Caſſini* nelle *Memorie dell' Accademia Reale delle ſcienze* per l' anno 1773. Poichè il ſuddetto Avvocato ha oſſervato, che il mercurio ne' barometri di diametri fra loro diſuguali ſi tiene ad una altezza ineguale. Più preciſa fu l' oſſervazione, che fecero in ſeguito i Signori *Caſſini*, e *Monnier* (*), i quali avendo portato ſul Canigou due barometri di un diametro diſuguale, oſſervarono, che il mercurio ſi teneva più baſſo di circa $\frac{2}{3}$ di linea nel barometro più ſtretto;

(*) Meridienne verifiée p. 224.

ſtretto; oſſervazione, che fu pur fatta da molti altri, e ſegnatamente nel 1750 dal Sig. le *Cat* (*) ed *Hollmann* (**), il primo de' quali parimenti ha trovato, che il mercurio ſi tiene altrettanto più baſſo ne' barometri, quanto queſti ſono di un diametro più riſtretto. Ma ſiccome alcuni credevano, che un tal fenomeno procedeſſe dalla maggiore quantità d' aria contenuta ne' tubi di un diametro anguſto; poichè ſi ſa, che è più difficile il purgar bene d' aria i tubi barometrici, quando ſono di una certa anguſtia, ed il Sig. *Hollmann* pare che non attribuiſca alla grandezza del diametro l' oſſervato fenomeno; l' ingegnoſo Sig. Dott. *Cigna* (***) fece unire aſſieme due tubi di diſugual diametro in modo, che formavano una porta romana, e riempiuti queſti due tubi di mercurio li capovolſe nel mercurio, ed oſſervò, che coſtantemente il mercurio ſi teneva di $\frac{1}{4}$ o di $\frac{1}{3}$ di linea più baſſo nel tubo riſtretto, che nell' altro, che aveva un maggior diametro; poichè in queſto caſo la quantità dell' aria contenuta nella parte vota non poteva aver alcuna parte nel fenomeno, eſſendo lo ſteſſo vuoto comune ad ambedue i tubi barometrici.

Ma il Sig. de *Luc* è andato anche più oltre in queſta ricerca, avendo trovato

1. Che i barometri, che ſono fatti a ſiſone ſi tengono ſempre più alti di quelli fatti a recipiente.
2. Che i barometri fatti di un ſemplice ſiſone, la di cui parte ſuperiore ſia più riſtretta dell' inferiore, ſi tengono ſempre più baſſi di quelli, che hanno una figura contraria.

(*) Magaſin Francois pour l' année 1750.

(**) Philoſophical Tranſ. an. 1742. Act. Acad. Gotting. Vol. 3. de mercurii in barometris diverſis eodem tempore & eodem loco diverſa altitudine.

(***) Acta Accademiæ Taur. Vol. 1.

3. Che i barometri, alla sommità de' quali havvi una boccia, si tengono ad una maggiore altezza, quando la parte superiore della colonna mercuriale giunge nella cavità della boccia, e questo effetto tanto più sensibilmente si manifesta, quanto più il mercurio è inoltrato nella boccia, di modo che allora si tiene di due linee più alto di quando il barometro ha una boccia abbasso.

4. Che i barometri, che hanno un tubo di un diametro uniforme, si tengono ad un' altezza presso a poco eguale.

5. Che l' ineguaglianza nelle altezze barometriche scomparisce ne' barometri a recipiente, quando tutto il recipiente sia riempiuto di mercurio, e che il mercurio arrivi nel tubo superiore al recipiente.

Perciò il Sig. de *Luc* ha prescritto, come una condizione neccessaria per la costruzione dei barometri di adoperare dei tubi di un dato diametro, e di rigettare assolutamente la costruzione di quei barometri che fossero fatti a recipiente.

Ma siccome non ostante, che il Sig. *Cardinale* de Luines (*) abbia con esperiense dimostrato, che la differenza nelle altezze barometriche è sensibile anche ne' tubi di un diametro maggiore di tre linee; alcuni però vi sono, che appoggiati alle sperienze di *Hollmann* (**) dalle quali risulta che la differenza nelle altezze barometriche è soltanto sensibile ne' tubi di un diametro minore di tre linee, e che questa differenza non è sensibile ne' tubi di un diametro maggiore, credono eglino, che nelle sperienze del Sig. *Cardinale* il mercurio si sia tenuto più alto anche nel tubo di un diametro di tredici linee, perchè fosse meglio purgato d'aria degli al-

(*) Mem. de l'Accademie Royal des Sciences 1768.

(**) Acta Accademiæ Gotting. pag. 227. Vol. I.

tri tubi di un minor diametro, o anche perchè, ſuppoſto che in tutti i Barometri del Sig. *Cardinal* de Luines (*) foſſe eguale la quantità dell' aria contenuta nel vuoto barometrico, minore doveva eſſere la compreſſione dell' aria contenuta nel tubo grande di quella, che era nel tubo di un minor diametro, mentre, eſſendo in un maggiore ſpazio doveva eſſere più rarefatta. Voléndo cavillare ſulle ſperienze del Sig. *Cardinal* ſi potrebbe anche opporgli, che la maggiore quantità del vuoto nel Barometro di 13 linee di diametro poteva contribuire beniſſimo a tener ſollevato il mercurio ad una maggiore altezza di quella, a cui ſi teneva ne' tubi di un minor diametro.

Perciò noi abbiamo creduto, che foſſe per eſſere coſa utile, ed importante per l' ottima coſtruzione de' barometri il determinare con ben fatte ſperienze, ſe veramente l' altezza del barometro diveniva maggiore coll' aumento del diametro, anche oltre all' aſſegnato limite delle linee tre.

Le prime ſperienze, che noi abbiamo fatto per decidere pienamente queſto articolo di controverſia, ſono ſtate fatte con due tubi dello ſteſſo vetro, uno de' quali aveva tre linee di diametro, e l' altro ſei in ſette

(*) I riſultati delle ſperienze del Sig. *Cardinal* de Luines ſono

1. Che i barometri caricati con mercurio bollente ſi tengono più elevati de' barometri caricati a freddo.

2. I barometri bolliti ſono quelli, che ſono più regolari.

3. Un barometro caricato a mercurio bollente, che abbia due terzi di linea è egualmente eſatto, che un barometro, che abbia linee $\frac{1}{3}$ o linee $\frac{2}{3}$, ovvero 2. $\frac{1}{2}$. linee di diametro.

4. Il movimento del mercurio nei tubi capillari è regolare.

5. I barometri caricati di mercurio bollente non oſtante, che i tubi ſieno ſtati lavati con iſpirito di vino ſi tengono egualmente alti che i non lavati.

6. Ne' tubi di un grandiſſimo diametro, come di 13 linee parigine, il mercurio ſi tiene più alto, che ne' tubi di un diametro ordinario di 2 $\frac{1}{2}$ linee.

Mem. de l' Accademie Royale des Sciences année 1768. pag. 247.

linee, che noi abbiamo fatto unire assieme, e curvare a forma di porta romana, e che avendo riempiuti di mercurio gli abbiamo capovolti in un comune recipiente ripieno di mercurio. Il risultato di questa sperienza, che abbiamo fatto con altri tubi di un diametro minore di 3 linee, e maggiore di 6, è stato, che è vera l' osservazione fatta dal Sig. *Cardinal* de Luines, che l' altezza nella colonna del mercurio sospesa ne' tubi vuoti d' aria è sensibilmente maggiore ne' tubi di 6 linee di diametro di quella de' tubi di 3 linee. Di più noi abbiamo osservato in queste sperienze, che la curva della superficie del mercurio ne' tubi di un diametro maggiore, è sensibilmente più convessa di quella sospesa ne' tubi di un diametro minore, la quale è qualche volta quasi appena sensibile ne' tubi di un diametro minore di 2 linee.

L' errore del Sig. *Hollmann*, e degli altri che hanno creduto, che al di là di 3 linee non avesse luogo il fenomeno della maggiore altezza, procede forse dall' avere eglino estimata la lunghezza della colonna mercuriale, non dalla convessità, ossia dall' apice della colonna mercuriale, ma bensì dai lembi, l' altezza de' quali alle volte è uguale ne' tubi di disuguale diametro, non ostante che diversa sia l' elevazione della curva ossia dell' apice della curva della colona mercuriale.

Ma ciò, che dimostra pienamente l' azione, e gli effetti dell' ineguaglianza dei diametri nell' altezza del barometro sono le sperienze, che noi abbiamo fatte col nostro barometro di prova, poichè i risultati delle sperienze fatte con esso non sono soggette ad alcuna eccezione.

Nel pozzetto di questo nostro barometro sono state da noi successivamente adattate cinque canne tutte di un' egual lunghezza, e dello stesso vetro, i diametri delle quali erano linee $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, ed avendo fatto in maniera, che in queste diverse canne il

mercurio si tenesse costante ad una data altezza abbiamo osservato che nel tubo lungo la colonna si allungava, o si accorciava in ragione della differenza de' diametri ne' tubi inferiori.

Quando si adoperò il tubo, che aveva un diametro di 2 $\frac{1}{2}$ linee francesi, il mercurio si tenne costantemente a pollici 29 lin. 6.020.

Col tubo di 3 linee di diametro l' altezza fu pollici 29, lin. 6.010.

Nel tubo di 3 $\frac{1}{2}$ linee francesi l' altezza fu pollici 29, lin. 6.002.

Nel tubo di 4 linee l' altezza è stata pollici 29, lin. 6. . . .

Nel tubo di 4 $\frac{1}{2}$. linee il mercurio si tenne a 29, pollici, linee 5.070.

Da questa sperienza si raccoglie, che l' effetto dell' ineguaglianza del diametro ne' tubi barometrici ha luogo al di là del preteso limite di tre linee francesi, e che qualora si vogliano fare dei barometri di paragone è neccessario di tener conto del diametro delle canne che si adoperano. Inoltre siccome l' altezza varia col diametro del tubo barometrico, perciò conviene che la canna barometrica non solo ne' barometri a sifone, ma anche ne' barometri Torricelliani sia di un diametro uniforme in tutto lo spazio di variazione.

§. IV.

Se la quantità della superficie libera del vetro al disopra della colonna mercuriale influisca sull' altezza del Barometro.

Quantunque i fenomeni dei tubi capillari, e le loro leggi non sieno trasportabili ai tubi di un maggior diametro; pure per non lasciare alcuno scrupolo abbiamo voluto esperimentare, se la quantità della superficie li-

bera del vetro al disopra della colonna mercuriale influisca sull' altezza del mercurio ne' tubi di un diametro non capillare. Poichè siccome i fluidi ne' tubi capillari dello stesso diametro si tengono elevati ad un' altezza tanto maggiore, quanto è maggiore la lunghezza del tubo al disopra del livello del fluido, in cui sono immersi; così pure si poteva dubitare, che la maggiore elevazione del mercurio osservata cressere coll' aumento del vuoto barometrico procedesse dalla maggiore lunghezza, e quantità del vetro al disopra della collonna mercuriale..

Inoltre se questa maggiore altezza avesse luogo appunto per questa cagione converrebbe, che ne' barometri a sifone, come è quello del Sig. de *Luc*, si tenesse conto della lunghezza del tubo, che sta al disopra della superficie del mercurio contenuto nel tubo inferiore più corto qualora si trattasse di avere dei barometri di paragone. Posto ciò era dunque neccessario di osservare l' altezza barometrica in un tubo a sifone, il di cui braccio inferiore avesse un costante diametro, ma una lungghezza variabile a piacimento,

Anche in queste sperienze abbiamo trovato opportunissimo il nostro barometro di prova, poichè avendo fatte adattare tre canne tutte dello stesso vetro, e diametro di disuguale lunghezza, abbiamo successivamente osservato l' altezza della colonna mercuriale in un tempo, che il peso dell' aria era invariabile, avendo la costante avvertenza in queste sperienze di mettere sempre ad un' altezza eguale la colonna mercuriale nel braccio corto, ed osservando, e determinando sempre l' altezza della colonna mercuriale nel braccio lungo col solito anello, e meccanismo di *Ramsdem*.

Il risultato di tre osservazioni fatte in diversi tempi cogli stessi tubi è stato il seguente, senza la menoma variazione.

Con un tubo di Flint Veneto lungo sei pollici, e

di un diametro di lin. 2, e mezzo francesi il mercurio costantemente si tenne a pollici 29, linee 6.0045.

Con un tubo dello stesso vetro, e diametro, ma che aveva 9 $\frac{1}{2}$ pollici francesi di superficie libera al di sopra del mercurio, l'altezza della colonna mercuriale fu pollici 29, linee 7.....

Finalmente con un tubo del suddetto vetro, e diametro, e che aveva 27 pollici di superficie libera il mercurio si tenne a pollici 29, linee 7004.

Non bastandoci queste sperienze, poichè ci pareva molto importante il determinare questo articolo con esperienze decisive, abbiamo voluto osservare l' altezza barometrica adattando nel pozzetto del nostro barometro di prova un tubo lungo 6 in 7 pollici francesi, indi per mezzo di cera abbiamo aggiunto a questo tubo un' altro pezzo di canna dello stesso vetro in modo, che la superficie libera del vetro al di sopra del mercurio era in questa seconda sperienza triplice di quella, che era nella prima sperienza, ed abbiamo di fatti osservato, che l'altezza barometrica variava colla lunghezza della superficie libera del vetro al di sopra del mercurio.

Diverse conseguenze si possono dedurre da queste sperienze.

I. La quantità dell'attrazione del vetro col mercurio crescendo in ragione della quantità della superficie libera del vetro, il mercurio si deve tener più alto in quel tubo, che ha una maggiore lunghezza.

II. Crescendo l'altezza del mercurio nel barometro coll'aumento della superficie libera del vetro al disopra del mercurio, converrà ne' barometri Torricelliani tener conto di questo elemento di variazione, quando si tratti di misurar delle grandi altezze, perchè coll' ingrandimento del vuoto cresce l' azione della superficie libera del vetro.

III. Ne' barometri a sifone, nei quali a misura che

cresce nel tubo lungo la superficie libera del vetro; d' altrettanto scema questa superficie libera nel tubo corto, non sarà necessaria questa deduzione, perchè i vantaggi di una parte sono compensati dalle perdite dell' altra parte.

IV. Finalmente nelle nostre sperienze intorno all'influenza del moto sull' altezza barometrica non ha luogo questo elemento di variazione appunto per essere il nostro barometro di prova fatto a sifone.

Ciò che però è d' avvertirsi in quelle sperienze, si è, che l' equazione che si può dedurre dalle nostre sperienze per l' influenza del vuoto, sarebbe soltanto applicabile ai barometri a sifone; poichè nei barometri semplici, e Torricelliani questa equazione deve essere maggiore appunto per l' azione non compensata dalla superficie libera del vetro.

Noi spieghiamo questi fenomeni tanto dei tubi di diverso diametro, come quelli dei tubi di diverse lunghezze, e qualità di vetro subordinandoli al fenomeno generale dell' attrazione del vetro col mercurio; attrazione, che è provata, e dimostrabile da mille sperienze, poichè non solo una lastra piana di cristallo posta in contatto del mercurio aderisce con un notabile grado di forza, ma quando il contatto del vetro col mercurio è più perfetto l' attrazione è sensibilmente maggiore. Prova di ciò eloquente ci forniscono gli stessi barometri, nei quali, qualora per mezzo del fuoco sieno stati ben purgati d' aria, molte volte nel raddrizzarli il mercurio sta attaccato alla sommità del tubo, e la colonna mercuriale vi sta sospesa a 40, ed anche più pollici, talchè per farla discendere, e distaccare è necessario di scuotere vivamente il tubo barometrico, ed anche nello staccarsi di questa colonna mercuriale si osserva, che questa già non si stacca dal tubo alla sommità; ma bensì si spezza al disotto di quella di 4 in 5 pollici, e questa porzione di colonna mercuriale sta tuttavia

tuttavia aderente alla sommità della canna barometrica.

Ma che giova cercare degli esempj se gli stessi tubi capillari, co' quali taluno ha preteso di dimostrare esservi una vera ripulsione fra il vetro ed il mercurio, ci forniscono la prova più convincente?

L' esperienza vien riferita da *Musschembroek* (*). Prendasi un tubo di vetro, che abbia l' estremità inferiore capillarissima, e si versi in questo tubo una certa porzione di mercurio, e si osserverà, che da questa capillare apertura il mercurio non fluirà, e soltanto fluirà, quando la colonna di mercurio versata nel tubo superi l'attrazione del vetro col mercurio (**). Posto dun-

Ii

(*) *Musschembroek Dissertationes Physic. Math. de Tubis Capill. &c.*

(**) Che il mercurio ne' tubi Capillari stia al disotto del suo livello, perchè l' attrazione delle parti, che lo compongono sia maggiore dell'attrazione del vetro col mercurio è un' ipotesi, che è resa molto plausibile dalle sperienze de' Signori *Rondelli*, e *Bonzi*. (*Act. Accad. Bon.*) i quali hanno osservato, che immergendo tre fili metallici nel mercurio, uno d'oro, d'argento l'altro, e di rame il terzo, in modo che una porzione di questi fili fosse immersa, e l'altra fuori del mercurio; osservarono, dissi, che in capo ad un certo tempo il mercurio si elevava al di sopra del suo livello, e penetrava nel filo metallico anche per quella parte, che era fuori del mercurio; di più osservarono, che nell' oro il mercurio era più in alto penetrato, che nell' argento, e meno nel rame. Ora se si rifletta alle belle sperienze del Sig. *Morveau* (*Elements de Chimie Vol.* 1.) dalle quali risulta, che il mercurio ha coll' oro un maggior grado d' attrazione, che coll' argento, e più coll' argento, che col rame, facilmente si comprenderà la ragione, per cui il mercurio si è levato più alto nel filo d'oro, che nel filo d'argento, e più nel filo d' argento, che in quello di rame, di modo che se in vece di tubi di vetro, i quali hanno sempre col mercurio un minor grado d' attrazione di quello, che hanno fra loro le molecole mercuriali, si facessero le sperienze con tubi capillari fatti o di oro, o di argento, l' attrazione delle quali sostanze col mercurio è maggiore di quella, che hanno fra loro le molecole mercuriali, il mercurio in questi tubi capillari metallici non si terrebbe al disotto del suo livello, ma si solleverebbe al di sopra più, o meno secondo la maggiore, o minore affinità del mercurio colla sostanza metallica, di cui è formato il tubo capillare ecc.

que, che il vetro attragga il mercurio s' intende perchè la ſuperficie della colonna mercuriale nei barometri ſia ſempre o conveſſa, o concava, e non mai piana; conveſſa quando il barometro s' inalza, oppure quando il mercurio è verſato in una canna inferiormente chiuſa; concava quando il barometro diſcende, perchè le parti della colonna mercuriale contenuta nel tubo, che ſono più vicine alle pareti attraenti della canna, riſentono aſſai più l' attrazione delle medeſime, che quelle, che ſono più lontane, perciò reſiſtono ad eſſere ſmoſſe con una forza proporzionata al grado d'attrazione, che paſſa fra il vetro ed il mercurio. A miſura che ſi va ſcoſtandoſi dalle pareti del tubo barometrico, l'attrazione divien minore, e perciò le parti della colonna mercuriale a miſura che ſono più vicine all' aſſe della colonna, che è il ſito più lontano dalla ſuperficie attraente, s' inalzano di più, e quelle che ſono nell' aſſe della colonna ſono quelle che ſi tengono più elevate delle altre; talchè la curva formata dalla ſuperficie della colonna mercuriale eſprime la curva dell' attrazione del vetro a diverſe diſtanze. Di fatto ſi oſſerva, che a miſura che le canne barometriche ſono di un maggior diametro, maggiore è anche in eſſe l' elevazione del mercurio, perchè le parti centrali eſſendo più lontane dalle pareti del tubo appena ſentono la loro attrazione, e non obbediſcono, che al ſolo peſo dell' aria. Che ciò ſia, facile è il farne l' eſperienza.

Si prenda un tubo di vetro, che abbia due pollici di diametro, e chiuſa una delle ſue eſtremità, verſata in eſſo una colonna di mercurio, ſi oſſerverà, che la ſuperficie della ſommità di queſta colonna non è totalmente curva, ma piano-curva, eſſendo la parte centrale di queſta ſommità quaſi piana, appunto perchè queſte parti centrali della colonna eſſendo molto diſcoſte dalle pareti della canna, ſono fuori della sfe-

ra d'attrazione. Per questa medesima ragione ancora il mercurio nei barometri si tiene altrettanto più elevato, e la curva, che il mercurio forma, è tanto più convessa, quanto più i barometri sono di un diametro maggiore; poichè le parti centrali di una colonna mercuriale non obbediscono che al solo peso dell'aria, nè la loro elevazione è impedita o disturbata dall' attrazione delle pareti del vetro. Così pure il mercurio si tiene più alto nel tubo lungo barometrico *ACD* a misura che è minore il diametro del tubo *PP* adattato nell'imbuto del pozzetto *E*, o maggiore la forza attraente della superficie libera della canna *PP*, ovvero del vetro della medesima canna *PP*.

Da questo medesimo principio d'attrazione del vetro si potrebbe facilmente dedurre la spiegazione di varj fenomeni risguardanti il barometro, che noi per brevità tralasciamo di riferire, invitando soltanto i Fisici, che desiderano di fare delle buone osservazioni barometriche, a preferire il vetro Flint d'Inghilterra a qualunque altra specie di vetro, ed a scegliere il tubo barometrico di un diametro, che sia per lo meno di 3 linee francesi, perchè dalle osservazioni, che abbiamo fatte, le parti di una tale colonna mercuriale, che sono nell'asse della medesima, risentono pochissimo l' attrazione delle pareti della canna, che le contiene; talchè estimando l'altezza della colonna mercuriale dall' apice della curva da quella formata, si è quasi sicuro di avere il vero e preciso peso dell' aria, che comprime il mercurio.

§. V.

Dei tubi barometrici interiormente inverniciati.

Siccome le ſperienze del Sig. *Jurin* (*) hanno dimoſtrato, che la depreſſione del mercurio nei tubi capillari non ha luogo, quando il tubo vitreo ſia coperto da un velo di ſevo, o di cera, poichè in queſti caſi il mercurio anzi che ſtare al diſotto del ſuo livello s' inalza in eſſo ſenſibilmente; ed altronde le ſperienze, che noi abbiamo riferite, apertamente dimoſtrano, che molti fenomeni dei tubi capillari ſono comuni anche ai tubi di un diametro non capillare, abbiamo voluto ſperimentare, ſe il mercurio ne' tubi interiormente inverniciati ſi tenga, o no più elevato, che ne' tubi di un egual diametro non inverniciati.

Per fare l' eſperienza in una maniera deciſiva e convincente abbiamo preſo un tubo di Flint d' Inghilterra lungo circa un piede, di 3 linee di diametro ſenſibilmente per tutta la ſua lunghezza, e l' abbiamo interiormente inverniciato per la lunghezza di circa 6 pollici colla vernice ordinaria di ſpirito di vino (**). Indi lo abbiamo, toſto che fu aſciutto, adattato con cera nel pozzetto *E* per la parte, che non era inverniciata, ed abbiamo verſato in eſſo tanto mercurio, fin-

---

(*) Phil. Tranſ. n. 333.

(**) Siccome taluno può avere la curioſità di rifare queſta ſperienza, e potrebbe forſe trovarſi imbarazzato nel dare la vernice alla ſola metà della canna, crediamo, che ſia neceſſario d'indicare il mezzo da noi adoperato, ed è d' immergere nella vernice la canna *PP*, per quella parte, che ſi vuole inverniciare. Indi adattando l' altra eſtremità nella bocca aſpirare l'aria in eſſa contenuta, ſino che la colonna di vernice arrivi a quella altezza, che ſi vuole coprire di vernice; ritirando la bocca applicata alla canna, la colonna di vernice cade nel vaſe, e tutta la ſuperficie della canna toccata dalla colonna di vernice reſta beniſſimo, ed uniformemente inverniciata ecc.

chè questo arrivasse precisamente all'altezza di 4 pollici; indi coll'anello scorrevole *H* abbiamo al solito determinata la lunghezza della colonna mercuriale elevata nel tubo barometrico *ACD*, che fu da noi trovata essere pollici Inglesi 29, lin. 6. 030. Ciò fatto abbiamo rivoltato il nostro tubo, ed adattatolo con cera nel pozzetto *E*, come nella prima sperienza, ma per la parte inverniciata, e versato in questo tubo precisamente 4 pollici di mercurio, abbiamo trovato, che l'elevazione della colonna mercuriale nel tubo *ACD* era di pollici 29 lin. 6. 045, cioè di 015 di linea più alta di quando il mercurio nel tubo *PP* era nella parte non verniciata.

Non si può attribuire questa maggiore elevazione del mercurio, quando fu messa in esperienza la canna *PP* per la parte inverniciata, all' essere questa canna divenuta di un diametro più ristretto pel velo di vernice, che le è stato applicato, poichè si è dimostrato nel paragrafo dell'effetto dell' ineguaglianza dei diametri nei tubi barometrici, che quando invece di una canna *PP* di $3\frac{1}{2}$ linee di diametro si adattò nel pozzetto un'altra canna di un diametro di sole 3 linee, la differenza nell'altezza del mercurio fu solo di 008, mentre nella nostra sperienza, nella quale certamente il sottile strato di vernice non poteva restringere il diametro della canna di mezza linea, l' altezza osservata del mercurio fu solo di, 0. 015.

§. VI.

Dell' azione dell' elettricità sopra il barometro.

Poichè in questa Memoria si tratta delle cagioni che influiscono sull' altezza del mercurio nel barometro indipendentemente dal peso dell' aria e del calore, non si doveva tralasciare di esaminare se l'elettricità faccia

o no variare l'altezza del mercurio nel barometro. Egli è vero che il Sig. *Comus* (*) ed il Sig. *Changeux* (**) hanno su di ciò pubblicate delle osservazioni e sperienze che sembrano sciogliere questo problema, poichè esse tendono a provare che l'elettricità altera sensibilmente l'altezza del mercurio nel tubo barometrico fino a farla divenir maggiore di due linee; ma le sperienze di questi Signori non sono abbastanza circostanziate per meritarsi tutta quella fede che unicamente si accorda a sperienze fatte con tutte le avvertenze possibili, poichè è facile trascurandone alcuna di prendere de' grossi abbagli. Altronde siccome il Signor *Changeux* nella sua Memoria riferisce che non sempre elettrizzando ha luogo la maggiore elevazione della colonna mercuriale nel tubo barometrico, perciò con qualche fondamento si poteva dubitare che l'osservata maggiore altezza non all'elettricità, ma a qualche altra non avvertita circostanza si dovesse ascrivere. Onde non ci parve inutile di consultare l'oracolo della sperienza.

Elettrizzato un barometro con elettricità vitrea sempre e costantemente s' inalza colle seguenti circostanze; cioè s' inalza sempre assai più nella prima volta, che in tutte le altre consecutive, così che se quando si comincia l'esperimento si è ottenuto l'aumento di $\frac{40}{100}$ di linea, le altre volte consecutive non arriva che a $\frac{25}{100}$. Lasciato in quiete il barometro torna a dare elettrizzandolo la prima elevazione più grande. Quando si cava la scintilla si abbassa ad un tratto il mercu-

(*) Journal de physique.
(**) Journal de physique.

rio per quasi tutto lo spazio che si era inalzato; non si ricompone però all'altezza di prima se non dopo alcuni minuti.

Nell' atto che il barometro è elettrizzato sortono dalla colonna mercuriale delle visibili scintillette state già osservate da altri fisici (*); la colonna mercuriale sensibilmente oscilla, non per tremore, nè scosse del barometro, ma per mero effetto dell'elettricità. Questa oscillazione, e coscintillazione accade anche togliendo l' anello che abbraccia il tubo barometrico, così che ad esso ascrivere non si può un tale fenomeno.

Elettrizzato un barometro con elettricità resinosa, per la prima volta alquanto si alza, ma meno che colla elettricità vitrea; oscilla e dà qualche scintilla: elettrizzato in seguito altre volte consecutive non si muove visibilmente o almeno pochissimo. Toltogli l'elettricità, pare che si rialzi, e che si renda più convesso, e non ritorna alla primitiva elevazione se non dopo circa un quarto d'ora.

Ma con tutto ciò che queste sperienze provino che il fluido elettrico influisce sull'altezza barometrica, pure non si può inferire che esso possa avere alcuna parte nelle variazioni del barometro, direttamente almeno, poichè non mi è mai accaduto di osservare alcuna differenza durante un furioso temporale fra due barometri uno de' quali era isolato: dissi direttamente poichè l'elettricità può benissimo render l' aria più o meno grave, avendo avuto più volte occasione di osservare che nell'atto che scoppia qualche fulmine il mercurio sensibilmente oscilla nel tubo barometrico, probabilmente per essere l'aria scossa ed urtata dal fluido elettrico che in grande copia dalle nubi si lancia alla terra.

(*) Vedi *de Luc* Rech. sur les modif. de l'athm. Vol. I.

§. VII.

Se le oſcillazioni della colonna mercuriale nei tubi barometrici contribuiſcano ad accreſcere l' altezza barometrica.

Nei barometri fatti di un tubo capillare che almeno non ecceda una linea di diametro è ſenſibiliſſimo il fenomeno della maggiore altezza a cui in eſſi ſi tiene ſoſpeſa la colonna mercuriale dopo che o collo ſmovere la tavola ſu cui è fiſſato il tubo barometrico, o con qualunque altro artificio ſi è obbligata la colonna mercuriale a fare delle oſcillazioni in un barometro che aveva il diametro di $\frac{8}{10}$ di linea; il mercurio dopo aver oſcillato per il tratto di cinque in ſei pollici, ſi tenne più alto di 3 lin. e $\frac{6}{10}$ e non ſi ricompoſe all' equilibrio coll' aria ſe non dopo paſſate molte ore.

Ne' barometri di un maggior diametro ſebbene un tal fenomeno non ſia così ſenſibile come ne' tubi di un diametro riſtretto, pure lo è abbaſtanza, perchè ſi abbia ad avere de' riguardi nelle oſſervazioni e ſperienze barometriche.

Il Signor de *Luc* per tacer di molti altri ha conſigliato di non oſſervare l' altezza barometrica ſe non dopo una buona mezz' ora che ſia ſtato ſituato immobilmente il barometro, ed ha inoltre preſcritto di dare al tubo barometrico de' piccioli urti, acciocchè più preſto l' altezza della colonna mercuriale ſi ricomponga all' equilibrio col peſo dell' aria.

L' apparato rappreſentato nella figura 10 è ottimo per fare queſte ſperienze, poichè col comprimere il cilindro *SS* ed obbligarlo ad immergere più o meno nel

mercurio contenuto nel vaſe *AA*, ſi può con tutta la facilità obbligare la colonna mercuriale a fare delle oſcillazioni più o meno grandi a piacimento ſenza correre alcun pericolo che l'aria s' introduca nel tubo barometrico *DD* ad alterarne il vuoto. Le ſperienze ſono ſtate più volte replicate in diverſe circoſtanze di peſo di aria, di umidità, di temperatura, ed altre ſimili.

I riſultati generali delle ſperienze ſono 1. Che quanto più grande è il numero delle oſcillazioni che ha fatto la colonna mercuriale, e quanto più eſſe ſi ſono eſteſe in uno ſpazio ſenſibile, altrettanto maggiore è l'altezza a cui ſi tiene la colonna mercuriale, e maggior tempo v' impiega a diſcendere all' altezza corriſpondente al real peſo dell' aria.

2. Che nei giorni umidi e caldi minore è queſto eccеſſo di altezza nella colonna mercuriale, che nei giorni aſciutti e freddi.

3. Che ne' tubi di un diametro notabile, come di 4 in 5 linee, non ha preſſo che luogo un tal fenomeno, ed all' oppoſto è più ſenſibile ne' tubi a miſura che eſſi ſono più anguſti.

4. Che il mercurio nei tubi di un diametro di tre in quattro linee come ſono i barometri ordinarj dopo 20', o 30' ſi riduce alla vera altezza corriſpondente al peſo dell' aria.

5. Che il dare al tubo barometrico delle picciole ſcoſſe, ſiccome viene conſigliato dal Signor de *Luc*, contribuiſce moltiſſimo a fare che la colonna mercuriale più preſto ſi abbaſſi.

7. Che è un' ottima pratica quella di fare che il mercurio diſcenda lentamente quando ſi mette il barometro in eſperienza, poichè più corte, e minori rieſcono le oſcillazioni della colonna mercuriale, conſeguentemente minore è l' eccеſſo dell' altezza della colonna mercuriale.

§. VIII.

Se la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nella ciſterna oſſia pozzetto del barometro ſemplice Torricelliano influiſca ſull' altezza barometrica.

Da che colle ſperienze riferite nei paragrafi antecedenti ſi è ſcoperto che alcune circoſtanze apparentemente indifferenti poſſono contribuire a diminuire, od accreſcere l'altezza barometrica, ed altronde qualunque ricerca che riguardi la perfezione del barometro non eſſendo giammai inutile; ſi è voluto con eſperienze determinare: *ſe la quantità più o meno grande del mercurio contenuto nel pozzetto del barometro ſemplice Torricelliano influiſca ſull' altezza barometrica*; poichè eſſendo la maggior parte dei barometri migliori fatti a pozzetto come ſono quelli di *Ramſdem*, *Magellan*, *Brander* ecc. era neceſſario di ſtabilire ſe la capacità di queſti pozzetti poteva eſſere arbitraria, ſiccome generalmente ſi riguarda, oppure ſe nella coſtruzione dei barometri paragonati eſſer doveva coſtante ed eguale.

A queſto effetto ſi è fatto coſtruire un barometro in cui la maſſa del mercurio contenuto nel pozzetto foſſe variabile ſenza che variaſſe la quantità della ſuperficie del mercurio eſpoſto all' aria. La figura 10 rappreſenta queſto barometro. *AA* è un vaſe cilindrico di criſtallo il quale è ſuperiormente aperto, ed inferiormente termina in un tubo cilindrico *BB* che s' inalza parallelo al vaſe *AA*. In queſto vaſe *AA* peſca profondamente il tubo barometrico *DD*, ſopra il quale evvi una lunga vite WW che ſi muove nel collare *X* fiſſato alla tavola del barometro. Queſta vite WW ha alla di 'ei eſtremità inferiore fiſſato un lungo cilindro di legno *SS* infilato nel tubo barometrico *DD*, di modo che col muovere la vite WW ſi può inalzare, od ab-

baſſare a piacimento il cilindro *SS*, e farlo più o meno immergere nel vaſe *AA*.

Ora per fare le ſperienze neceſſarie per determinare ſe la quantità del mercurio contenuto nel vaſe *AA* influiſca ſull' altezza barometrica per mezzo della vite *WW*, s' inalza il cilindro di legno *SS* fino a tanto che appena di una linea circa ſia immerſo nel mercurio contenuto nel vaſe *AA*. Ben s' intende, che a miſura che s' inalza il cilindro *SS* è neceſſario di verſare del mercurio nel vaſe *AA* acciocchè quando il cilindro *SS* è inalzato alla maggiore altezza del mercurio nel vaſe *AA* ſia ad una altezza tale che nel tubo comunicante l' apice *BB* della colonna mercuriale tocchi il tagliente dell' anello *C* fiſſato ſulla canna *BB*. Qualora dunque il mercurio contenuto nel vaſe *AA* ſia a queſta altezza ſi miſura con tutta la preciſione l' elevazione della colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico *DD*; indi per mezzo della vite *WW* ſi abbaſſa il cilindro *SS* finchè ſia immerſo di tre, di cinque, o più linee nel vaſe *AA*; e ſiccome a miſura che il cilindro *SS* s' immerge nel vaſe *AA* eſſo ſcaccia un volume di mercurio eguale alla parte immerſa del ſuddetto cilindro *SS*, perciò facilmente ſi comprende che ſi può avere nel pozzetto *AA* ora una maggiore, ed ora una minore quantità di mercurio a piacimento, ſenza che perciò varj la quantità della ſuperficie del mercurio eſpoſto all' aria, poichè eſſendo cilindrico il vaſe *AA*, ed *SS* cilindro, l' anello mercuriale compreſo fra le pareti del vaſe *AA* ed il cilindro *SS* è coſtantemente eguale.

La grandezza del vaſe *AA*, e del cilindro *SS* nel barometro che ſi è fatto coſtruire è tale che un abbaſſamento di una linea del cilindro *SS* ſcaccia un volume di cinque oncie di mercurio, e potendoſi abbaſſare il ſuddetto cilindro di 15 linee, ſi può avere un pozzetto che abbia una capacità variabile dalle 5 on-

cie fino alle 65 oncie, ciò che è anche più del bisogno.

Ridotto il cilindro ligneo *SS* ad una tale altezza che esso non era immerso nel mercurio che di una sola linea, e fatto che successivamente immergesse da una linea fino a 15 linee, e presa ad ogni depressione del cilindro *SS* con tutta l' esattezza l' altezza della colonna mercuriale sospesa nel tubo barometrico *DD*, nonostante che la quantità del mercurio contenuto nel vase *AA* variasse dalle cinque oncie fino alle 65, pure non vi fu la menoma differenza. Perciò pare che si possa conchiudere che la quantità del mercurio contenuto nel pozzetto non influisca nè punto, nè poco nell' altezza della colonna mercuriale sospesa nel tubo barometrico, e che è quindi arbitraria la grandezza del pozzetto ne' barometri semplici Torricelliani.

§. IX.

Se la grandezza del vuoto barometrico influisca sull' altezza della colonna mercuriale sospesa nel barometro.

Nella parte superiore del barometro, che comunemente chiamasi il vuoto barometrico, per quanto bene sia purgato di aria il mercurio vi rimane sempre una picciola porzione di aria che è impossibile forse l' espellerla intieramente. Il Sig. de *Luc* disperando di poter rendere gli accurati suoi barometri assolutamente privi di aria si contentò di farli che non ne contenessero che una determinata e costante quantità di cui ne tenne sempre esatto conto nelle sue osservazioni. Altri per render sensibile l' effetto di questa aria contenuta nel vuoto barometrico immaginarono di fare che l' estremità superiore del tubo barometrico terminasse in un' ampia boccia affinchè quel poco d' aria che rimane nel

mercurio di cui queſto fluido coll' ebullizione non ſi può totalmente liberare, dilatandoſi in uno ſpazio notabile abbia a comprimer meno la ſotto poſta colonna mercuriale (*a*). Di fatto ſe ſi facciano caricare due barometri che abbiano eguali dimenſioni, che ſieno egualmente caricati ecc. e ſolo che uno di eſſi in luogo di avere la parte ſuperiore di un diametro eguale al rimanente della canna barometrica abbia invece ſoffiata una boccia di una ſenſibile capacità, ſi oſſerverà che il mercurio ſi terrà più elevato nel barometro che ha ſuperiormente la ſuddetta boccia, che nell' altro la di cui canna da un capo all' altro è perfettamente cilindrica.

Ma un tale fenomeno non è ſtato bene ſpiegato coll' attribuirlo ſoltanto alla maggiore rarefazione dell' aria contenuta nello ſpazio voto, poichè vi ha qualche parte la maggiore ſuperficie vitrea della boccia. Altronde ſe la maggiore elevazione della colonna mercuriale oſſervata nel barometro che ha ſuperiormente una boccia procedeſſe ſoltanto dalla rarefazione dell' aria, ne verrebbe che in un barometro, la cui canna foſſe cilindrica da un capo all' altro ed in cui la grandezza del vuoto foſſe variabile, ne verrebbe, diſſi, che gli aumenti nell' altezza della colonna mercuriale ſarebbero proporzionali eſattamente all' accreſciuta grandezza dello ſpazio vuoto, ciò che non corriſponde alle ſperienze che ſono per riferire.

Situata la tavola *KK* oſſia il barometro di prova in un piano eſattamente perpendicolare all' orizzonte, ed adattata nell' imbuto del pozzetto *E* una canna *PP* di un diametro eguale in tutta la ſua lunghezza, ſi

(*a*) Quand' anche con tale artificio ſi arrivaſſe a rendere inſenſibile l' effetto dell' aria che vi è ſempre nel vuoto barometrico ſi avrebbe un peggiore inconveniente nell' accreſciuta fragilità e peſo del barometro, che eſſendo una macchina deſtinata al traſporto deve eſſere quanto è poſſibile ſolida, e leggera.

versò in essa tanto mercurio, finchè nel tubo barometrico *ACD* non vi fosse che un vuoto di soli due pollici. Ciò fatto per mezzo degli anelli scorrevoli *H*, *L* si determinò colla maggiore precisione possibile la distanza fra i due colmi delle due colonne di mercurio contenute ne' due tubi *AC*, *PP*, e fu trovata essere poll. 29 lin. 6.04; coll' aprire la vite *F* del pozzetto *E* (vedi la *fig.* 2) si estrasse tanto mercurio dalla canna *PP* fino che l' apice della colonna mercuriale in essa contenuta si è abbassato di due pollici esattamente. Corrispondentemente a questo abbassamento della colonna mercuriale contenuta nella canna *PP* lo spazio vuoto nel tubo *AC* crebbe di due pollici, onde fu in tutto di 4 pollici. Misurata la distanza fra i due colmi delle colonne mercuriali contenute nelle canne *AC*, *PP*, fu trovata essere poll. 29 lin. 6.011. Con 6 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.018; con 8 pollici di vuoto fu poll. 2 lin. 6.023; con 10 pollici di vuoto fu poll. 29 lin. 6.032; con 12 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.034; con 14 poll. di vuoto fu poll. 29 lin. 6.039.

Non contenti di aver determinato in questo modo che la grandezza del vuoto barometrico influisce sull' altezza barometrica si è voluto ripetere la medesima sperienza in un altro modo, cioè in un ordine contrario facendo che la grandezza del vuoto barometrico andasse di due in due pollici diminuendo, ciò che facilmente si ottenne versando del mercurio nella canna *PP* in modo che in essa il mercurio s' inalzi di due in due pollici; poichè con questo ordine retrogrado si va all' incontro di molti scrupoli e dubbj che potrebbero nascere sulla sperienza fatta nel modo sovraccennato.

Sebbene facendo rimontare in questo modo il mercurio nella canna *AC* i risultati delle osservazioni non corrispondono esattamente a quelli che si sono avuti facendo che il mercurio discenda, e che il vuoto ba-

rometrico vada aumentando; pure ſono abbaſtanza conſiſtenti e ſicuri per iſtabilire con certezza, che coll' aumento del vuoto ſi accreſce l' altezza barometrica, ma non proporzionalmente alla rarefazione dell' aria che può eſſer nella parte vuota del barometro.

Non è poi meraviglia ſe i riſultati delle ſperienze ed oſſervazioni fatte obbligando il mercurio a rimontare, non corriſpondano eſattamente a quelli che ſi hanno facendo che il mercurio diſcenda, poichè dalle ſperienze riferite nel paragrafo VII conſta, che facendo fare delle oſcillazioni alla colonna mercuriale ſoſpeſa nel tubo barometrico, l'altezza della colonna varia per l' attrazione eſercitata dalla canna ſulla colonna mercuriale; onde per ottenere una piena corriſpondenza fra le oſſervazioni fatte a mercurio aſcendente e diſcendente ſarebbe ſtato neceſſario di laſciare un intervallo di tempo fra una oſſervazione e l' altra di una buona mezz' ora acciocchè l' effetto dell' attrazione che neceſſariamente inſorge per lo sfregamento ed oſcillazione della colonna mercuriale aſcendente o diſcendente intieramente ſvaniſſe. Ma non ſi è avuto l' agio di fare queſte oſſervazioni con queſti neceſſarj intervalli di tempo; ciò nonoſtante però le differenze dei riſultati delle oſſervazioni fatte a colonna aſcendente o diſcendente non ſono molto notabili, poichè non arrivano ad eſſere maggiori di 15 ønteſimi di linea ingleſe, prendendo la media di 4 ſerie di oſſervazioni fatte nello ſteſſo giorno.

Più notabili differenze ſi oſſervano ripetendo queſte ſperienze in diverſe circoſtanze di temperatura, poichè queſte differenze talvolta arrivano ad eſſere maggiori di 30 centeſimi di linea, ed anche più, e ciò per la ſola ed unica circoſtanza di una diverſa temperatura. Poichè avendo io ripetuta l' eſperienza di far diſcendere di due in due pollici il mercurio nella canna *AC* mentre la temperatura dell' aria della ſtanza in cui

ſperimentava era ſtata eſpreſſamente con una ſtuffa riſcaldata di 30° Reaumuriani, per 14 pollici di vuoto l' aumento dell' altezza barometrica fu ſolo di $\frac{33}{100}$ laddove fatta la medeſima ſperienza in un giorno in cui la temperatura dell' aria era ſoltanto gr. 17 Reaumuriani, l' aumento fu notabilmente maggiore cioè di $\frac{59}{100}$ di linea ed anche più.

Sarebbe inutile il riferire minutamente le ſperienze fatte per aſſicurarſi che la grandezza del vuoto barometrico influiſce moltiſſimo ſull' altezza della colonna mercuriale; e che l' aumento dell' altezza della colonna mercuriale, poſta la ſteſſa quantità di vuoto, varia colla temperatura del mercurio contenuto nel barometro, poichè le ſperienze fatte per queſto oggetto non ſono abbaſtanza numeroſe per poter ricavare una formola che con ſicureza eſprima la quantità dell' influenza del vuoto corriſpondente ad ogni grado di temperatura del mercurio, e ad ogni pollice di vuoto.

Noſtro progetto però era d' intraprendere queſta ſerie d' oſſervazioni onde ricavare una tale cognizione, e certamente l' apparato da noi immaginato poteva fornirci queſti dati: ma sfortunatamente diſtratti in molte altre occupazioni avendo dovuto in diverſi giorni riprendere queſte ſperienze che eſiggono molta attenzione e diligenza, nel maneggiare frequentemente il barometro di prova, avvenne che qualche bolla d' aria furtivamente entrò nella canna *AC* ad alterare l' eſattezza del vuoto barometrico: nè avendo avuto finora comodo di caricare di nuovo e purgar bene d' aria queſto barometro ſiamo coſtretti a pubblicare queſte *Oſſervazioni*, che avrebbero potuto eſſer più perfette, qualora aveſſimo avuto agio di eſtenderle a tutte quelle combinazioni che eſigge la natura di queſte ricerche.

L' imperfezione

L'imperfezione però di queste osservazioni non esclude che esse non sieno attendibili per dimostrare che l'ampiezza del vuoto barometrico influisce sull' altezza della colonna mercuriale, e che una tale influenza non è proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è sempre nei barometri per quanto bene purgati eglino sieno, e che essa varia secondo la temperatura del mercurio contenuto nel barometro. Ora posta la verità di queste importanti osservazioni, come mai si potrà lusingarsi di una certa precisione, e corrispondenza nelle osservazioni barometriche se non si è mai tenuto conto dell'ampiezza del vuoto sovrastante alla colonna mercuriale? Se mai si è dubitato che questo effetto fosse maggiore o minore secondo la diversa temperatura del mercurio? eppure frequentemente succede nella misura delle grandi altezze che un barometro a piedi del monte abbia una temperatura notabilmente diversa da quella che ha il barometro alla sommità del monte. Inoltre se l'influenza del vuoto varia colla di lui ampiezza, e se una tale influenza arriva talora ad essere di $\frac{60}{100}$ in $\frac{70}{100}$ di linea, chi non vede la necessità di tener esatto conto di questa influenza nelle misure delle grandi altezze, nelle quali la grandezza del vuoto varia da un pollice fino a 14 e più pollici? Perlochè utilissima cosa sarebbe che taluno intraprendesse una serie di osservazioni ben fatte medianti le quali si determinasse la quantità dell' influenza della grandezza del vuoto barometrico di pollice in pollice dai 15 gradi al disotto del ghiaccio fino a 25° al disopra della congelazione. Frattanto le sperienze che abbiamo riferito in questo paragrafo bastar possono a far sentire l'importanza di una tale ricerca che contribuirebbe certamente a rendere più sicuro l'uso di questo utile istrumento.

Noi crediamo che la quantità dell' influenza del vuoto non sia proporzionale alla dilatazione dell' aria che vi è sempre anche nei barometri meglio purgati d'aria; ma proceda dalla maggiore perfezione del vuoto barometrico, perchè a misura che il vuoto s' ingrandisce esso diviene più perfetto, in quanto che quel poco d'aria che è nella parte vota dilatandosi in un maggiore spazio comprime meno la sottoposta colonna mercuriale. Ora il mercurio essendo meno compresso dall' aria contenuta nello spazio voto si cangia in un vapor elastico che estendendosi nello spazio voto comprime esso pure la sottoposta colonna mercuriale, per modo che non si deve tener conto della sola compressione dell'aria rarefatta che è nella parte vota del barometro, ma anche di questo vapor elastico mercuriale la di cui quantità ed elaterio è più o meno grande secondo che è più o meno grande e conseguentemente perfetto il vuoto barometrico.

Questo vapor elastico mercuriale non è un ente ipotetico. Negli atti dell' Accademia di Parigi (*) è riferita un' osservazione che dimostra che il mercurio quando non è compresso dall' aria ad un discreto grado di calore si cangia in vapori; poichè furono osservate le pareti della parte vuota del barometro stabilmente fissato ad un muro coperte da minutissimi globetti mercuriali; fenomeno che io pure ebbi occasione di ammirare in Toscana. Il Sig. *Roy* inoltre, il Sig. *Ramsdem* ed altri osservarono essi pure questa singolare sublimazione del mercurio; anzi il Sig. *Roy* (**) nella sua bella memoria del barometro riferisce d'aver fatto l' esperienza di riscaldare tutto il mercurio contenuto nella canna barometrica, mentre la parte vota era raf-

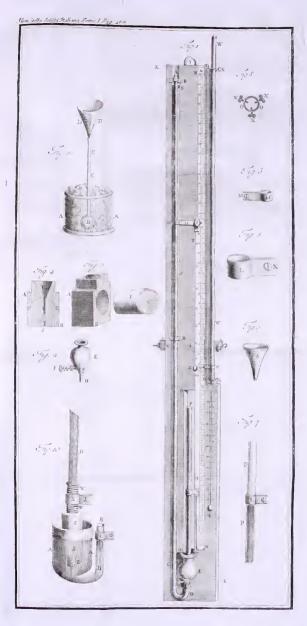
---

(*) Mem. de l' Acad. Roy. des Sciences.
(**) Phil. Transf.

Fig. 1.

Fig. 8.

Fig. 3.

Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 10

freddata da un bagno di ghiaccio pesto; ed assicura di aver osservato che il freddo applicato al vuoto barometrico faceva condensare il vapor elastico mercuriale sulle pareti del tubo sotto forma di visibili globetti mercuriali. Tanto è vero che anche il mercurio, toltogli la compressione dell'aria, si volatilizza e si sublima; onde la proprietà osservata da *Nairne* (*) dei fluidi facilmente evaporabili quando non sono compressi dall'aria è comune al mercurio che è un fluido di meno facile evaporazione.

Questa evaporazione del mercurio e trasformazione in un vapore elastico è facilitata e promossa dal calore siccome accade ai liquori evaporabili, onde non è meraviglia se le osservazioni sull'influenza dell'ampiezza del vuoto barometrico non si corrispondono quando sono fatte in temperature diverse, perchè è in ragione della temperatura la quantità di questo vapore elastico mercuriale che si svolge dal mercurio quando non è compresso dal peso dell'aria.

Forse e senza forse la quantità di questo vapore svolgentesi dal mercurio variar potrebbe in ragione dell'ampiezza della superficie del mercurio. Ma non affrettiamoci a pronunziare prima di consultare l'oracolo della sperienza.

(*) Transf. Philos. Journal de Phis. de Rozier.

NUOVA INVESTIGAZIONE

DELLA

SOMMA GENERALE DELLE SERIE.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona.

Riandando la ſtoria de' progreſſi umani nelle Scienze, e nell' Arti, ella è coſa ordinaria il vedere alle più luminoſe ſcoperte fatta ſtrada da alcune cognizioni per l'innanzi ſconneſſe e ſterili da molti anni, che baſtava ravvicinare per diſcernervi un' intima relazione, e una fecondità del tutto inaſpettata. Si potrebbe dire in qualche modo delle produzioni dell' intelletto quello, che ſuol dirſi dell' operazioni della natura: che non ſi fanno altramente per ſalto. E ſe pur talvolta ci appariſcono di getto, ciò addiviene perchè non abbiamo preſenti tutte le loro relazioni, nè le fila capitali, alle quali ſi attengono neceſſariamente. Il ſolo ormai familiariſſimo Calcolo Differenziale può darcene un eſempio ſegnalato; calcolo, che unito al ſuo inverſo ha fatto mutar faccia alle Scienze Matematiche. Non aveavi, che un breve paſſo da fare, una non difficile eſtenſione da darſi al modo di calcolare gli elementi delle linee, e dell' aree di *Barrovio*, e di *Wallis* per metterlo in tutta la luce, che ha avuto prima dal ſublime ingegno di *Newton*, indi da quello di *Leibnitz*. Così combinando i metodi di *Barrovio*, e di *Wallis* con altri precedenti, e con quello eziandio degl' indiviſibili del *Cavalieri*, e queſto coll' antico dell' eſauſtioni, è agevole il conoſcere, che tutto va

per iſcala, e che d'ordinario un' invenzione non è che un anello aggiunto ad una lunga catena di cognizioni anteriori.

Egli è noto da gran tempo, che prendendo la differenza ſucceſſivamente de' termini conſecutivi di una ſerie, comunque eſſi procedano con legge o ſenza legge, la ſerie delle differenze che ne riſulta ammette ſempre una ſomma nella combinazione di alcuni termini della ſerie primitiva, onde ha tratto l' origine, la quale perciò vien detta comunemente Sommatoria o Sommatrice, relativamente alla ſerie derivata, di cui ella ſomminiſtra la ſomma. Ma ſe non v' ha ſerie da cui non poſſa trarſi la ſerie delle differenze, non è del pari agevole coſa il ritorno, o il rimontare da una ſerie alla ſerie primitiva, da cui può ella eſſere ſtata originata. Se ſi eccettuino le ſerie a differenze coſtanti, e qualche caſo particolare di ſerie frazionali, ond' è ſtata aſſegnata la ſomma per queſta via dalla mano poſſente del Sig. *Eulero* nel principio delle ſue Inſtituzioni di Calcolo Differenziale, non abbiamo ſu di ciò alcun altro importante tentativo, ch' egli ſteſſo chiama difficiliſſimo. E pure la natura ſteſſa della coſa il vuole, che tra l' una e l' altra v' abbia uno ſtretto legame, una determinata conneſſione, per cui, eſſendo dato il termine generale della ſerie delle differenze, ſia pure in pronto il termine generale della ſommatrice.

Biſogna credere, che queſti due oggetti non ſieno mai ſtati abbaſtanza avvicinati. Non avrebbero per certo traſcurato i Geometri di profittarne, e ne ſarebbe conſeguito indubitatamente un paſſo de' più vantaggioſi nell' ardua Teoria delle ſerie. Di fatto pigliandola in eſame a parte a parte ne' diverſi Autori, che vi ſi ſono applicati, vedeſi quaſi per ogni claſſe capitale meſſo in uſo e adattato un metodo particolare. Ma quello che ha per obbietto le ſerie ſuſcettibili di ſomma algebraica, non ſi eſtende ſu le traſcendenti. Un

altro le comprende entrambe, ma ſotto un' eſpreſſione compoſta d' infiniti termini, la quale non s' interrompe e divien finita, che in alcuni caſi ſingolari.

Dove all' oppoſito internandoſi più addentro, che non s' è fatto, nell' indole loro, ſi avrebbero ſvolti ſintomi baſtevoli, onde ſcuoprire le ſerie ſommatrici, alle quali ſi riferiſcono neceſſariamente. V' ha poi più d' un ordine di ſerie totalmente intrattabili, alle quali non può aggiugnere alcuno de' metodi conoſciuti ſinora, in cui pure non è ſommamente oſcura l' intima relazione colle ſommatrici. Queſto è quello, che imprendo a moſtrare in queſta Memoria, ove con andamento facile e ſempre uniforme ſi riducono ad un unico metodo ordini di ſerie, che potevano parere incompatibili ſotto una legge comune per tutti. L' ho fatto rapidamente, eſſendomi propoſto men di fare un Trattato generale ſu queſta immenſa dottrina, che di aprirvi una ſtrada non battuta, in cui per ſin le ſerie, che non ammettono propriamente termine generale, e quelle che non ne ammettono che di traſcendenti, non ricuſano di ſtare a fianco dell' Algebraiche, e delle Geometriche più ſemplici. Non laſcerò di ribatterla, e di far parte a' Geometri de' progreſſi, che mi ſarà permeſſo di farvi; non eſſendo infruttoſo alcun paſſo ulteriore, che poſſa farſi a perfezione ed incremento di una Scienza, ch' è il riſugio ultimo delle matematiche ſublimi, e a cui ſi attiene il calcolo integrale dell' equazioni differenziali finite, come ſi avrà occaſione di vederlo nella ſuſſeguente Memoria.

PRINCIPJ FONDAMENTALI.

§. I.

Qualunque progreſſione regolare creſcente o decreſcente, di qualunque natura ella ſiaſi, può ſempre ridurſi alla forma (K)

A, $A+b$, $A+b+c$, $A+b+c+d$, ecc. . . . . . . (K)
confiderando, che una certa grandezza A vada continuamente variando ftato, e diventando fucceffivamente $A+b$, $A+b+c$, ecc. e la progreffione altro non fia che la difpofizione in ferie di quefti ftati fucceffivi della grandezza A.

§. II.

Per confeguenza la differenza di due termini proffimi farà neceffariamente la variazione dall' uno all' altro di quefti ftati fucceffivi; e la ferie delle differenze de' termini (L)

b, c, d, e, ecc. . . . . (L)

farà la collezione ordinata di tutte quefte variazioni confecutive.

§. III.

Se coll' indeterminata x fi efprima nella progreffione (K) la località in generale di uno ftato qualunque della grandezza A, è cofa nota

I. Che vi ha una certa funzione di x, la quale rappresenta generalmente tutti quefti ftati, o tutti i termini della progreffione, e per ciò fuol dirfi termine generale della progreffione.

II. Che qualunque volta, prendendo la fomma fucceffivamente di due termini, di tre, di quattro ecc. della progreffione (K), ne rifulta un' altra progreffione regolare avente per termine generale una nuova funzione di x, quefta funzione vien comunemente detta fomma generale della progreffione (K).

III. E che la fomma della progreffione (K) all' infinito è quello che quefta funzione diventa, allorchè fi affegna all' indeterminata x un valore infinito.

§. IV.

Chiamando pertanto T il termine generale della progreſſione (K), T' quello che diventa T ſoſtituendovi $x+1$ in luogo di x; ſarà neceſſariamente T' il termine generale d' una progreſſione, che comincia dal ſecondo termine della progreſſione (K).

§. V.

E prendendo la differenza T'' delle due funzioni T, T', è manifeſto, che T'' è il termine generale della ſerie (L) delle variazioni (§. II.), o delle differenze ſucceſſive de' termini della ſerie primitiva.

§. VI.

Se ſi ſottragga la grandezza variante A dal termine $x.^{mo}$ della progreſſione primitiva, il reſiduo non è altro evidentemente, che la ſerie (L) delle differenze compreſe tra il primo termine, e il termine $x.^{mo}$; e però, eſſendo T il termine generale della ſerie primitiva, la differenza tra la funzione T e la grandezza variante A ſarà neceſſariamente uguale alla ſomma di $x-1$ termini della ſerie delle differenze (L).

§. VII.

Per conſeguenza la differenza tra la funzione T' e il primo termine A ſarà la ſomma generale della ſerie delle differenze (L), di cui T'' è il termine generale. Imperciocchè, eſſendo la differenza tra la funzione T e il primo termine A uguale alla ſomma di $x-1$ termini della ſerie (L) (§. VI.), e T' eſſendo quello che diventa T ponendovi $x+1$ in luogo di x, egli è manifeſto,

manifesto, che la differenza tra T' e il primo termine A sarà uguale alla somma di x termini della serie (L).

Questa nuova funzione pertanto sarà il termine generale d'una serie avente per termini le somme successive de' termini della serie (L), e però ne esprimerà ella la somma generale (§. III).

§. VIII.

Se dunque si faccia, che la serie (L) rappresenti generalmente qualsivoglia progressione regolare, di cui sia T'' il termine generale, per determinarne la somma basterà rimontare dal termine T'' ai termini T, T'.

§. IX.

E poichè $T'' = T' - T$, sarà $T' - T$ ciò che diremo costantemente la forma differenziale di qualunque termine generale T'', siccome quello, che risulta dalla differenza de' termini T', T.

CAPITOLO PRIMO.

DELLE SERIE A DIFFERENZE COSTANTI.

PROBLEMA I.

Sommare le Serie a differenze costanti di qualunque ordine elle sieno.

RISOLUZIONE.

Essendo l' espressione (M)

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2)$$
$$+ (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \ldots + \mathfrak{Q}(x+1)^n$$
$$- \mathfrak{Q}x^n \ldots\ldots\ldots\ldots (M)$$

il termine generale delle ſerie a differenze coſtanti, in cui x è l' eſponente de' termini; il ſi metta ſotto la forma differenziale (N) (§. IX)

$$A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+\text{ecc.}\ldots\ldots$$
$$-Ax-Bx^2-Cx^3-\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (N)$$

Si ſoſtituiſca l' unità in luogo di x nel ſecondo membro (O)

$$Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (O)$$

preſo affermativamente, il che ſomminiſtra la quantità (O')

$$A+B+C+D+E+\text{ecc.}\ldots\ldots\ldots\ (O')$$

e ſi prenda la differenza (P) tra le eſpreſſioni (O), (O')

$$Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ecc.}-A-B-C-D-\text{ecc.}\ldots (P).$$

Dopo di che ſi metta in (P) $x+1$ in luogo di x; oppure ſi ſottragga, ch' è lo ſteſſo, la quantità (O') dal primo membro della forma differenziale (N); e ſi avrà l' eſpreſſione (R)

$$Ax+(2Bx+Bx^2)+(3Cx+3Cx^2+Cx^3)$$
$$+\text{ecc.}\ldots\ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^n-\mathfrak{Q}\ldots\ldots\ldots\ (R)$$

dico, che (R) è la ſomma generale di tutte le ſerie a differenze coſtanti.

Imperciocchè, ponendo $x+1$ in luogo di x nel ſecondo membro dell' eſpreſſione (N), ne riſulta il primo manifeſtamente. Dunque, eſſendo $Ax+Bx^2+Cx^3$ $+$ecc. il termine generale d' una ſerie, ſarà neceſſariamente $A(x+1)+B(x+1)^2+C(x+1)^3+$ecc. il termine generale d' una ſerie, che comincia dal ſecondo termine di quella (§. IX.). E però la differenza (M) di queſte due funzioni è il termine generale della ſerie delle variazioni (§. V.) o delle differenze ſucceſſive de' termini della ſerie, di cui la funzione (O) è il termine generale; $A+B+C+D+$ecc. è la quantità variante; e l' eſpreſſione (P) è la ſomma generale di $x-1$ termini della ſerie delle differenze (§.VI). Ma l' eſpreſſione (R) è quello che diventa (P) mettendovi $x+1$ in luogo di x. Per conſeguenza ſarà

(*R*) la somma generale della serie (§. VII), di cui la funzione (*M*) è il termine generale, cioè di tutte le serie a differenze costanti. Il che ecc.

ESEMPIO.

Sia proposta una serie a differenze costanti, di cui si dimanda la somma, essendo (*S*) il suo termine generale

$$9 - 2x + 2x^2 \ldots\ldots\ (S)$$

Bisogna primieramente trarre dall'espressione (*M*), che rappresenta i termini di queste serie generalmente, il termine generale delle serie a seconde differenze costanti, cioè

$$A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2).$$

Per ritrovare i valori delle indeterminate A, B, C non s'ha che a formare le tre seguenti equazioni $A + B + C = 9$; $2B + 3C = -2$; $3C = 2$, dalle quali si ricaverà agevolmente $A = \frac{31}{3}, B = -2, C = \frac{2}{3}$.
Dopo di che si traggano dall'espressione generale delle somme (*R*) i termini comprendenti le stesse indeterminate A, B, C, vale a dire

$$(A + 2B + 3C)x + (B + 3C)x^2 + Cx^3$$

e vi si sostituiscano i valori ritrovati. L'espressione, che ne verrà

$$\frac{25x}{3} + \frac{2x^3}{3}$$

sarà la somma generale ricercata.

SCOLIO I.

E' superfluo l'aggiugnere altri esempj, essendo per sè chiaro e facile il metodo per tutti gli ordini di questa natura di serie, intorno alle quali è stato scrit-

to da tanti illuſtri uomini e così diffuſamente in altri tempi, come può vederſi nell'Opere di *Faulhaber*, *Ramellini*, *Wallis*, *Mercator*, *Preſtet* ecc. parlando de' più antichi, e in quelle più recenti de' dottiſſimi *Bernoulli*, *Eulero*, *Riccati* ecc. Ne ho trattato io ſteſſo con un mio particolar metodo in un Opuſcolo ſtampato in Verona nel 1767. Ma non laſcia per queſto di raccomandarſi abbaſtanza il metodo preſente per la ſomma facilità e ſemplicità con cui poſſono elle maneggiarſi, e con queſta ſegnata differenza da tutti gli altri, che non è altramente riſtretto a queſta ſola e ſingolar claſſe di ſerie.

SCOLIO II.

Paſſando a trattare ne' ſuſſeguenti Capitoli d' altre nature di progreſſioni, penſo di ommettere le dimoſtrazioni, che richiederebbe ogni particolare propoſizione, per non ripetere ſempre una medeſima coſa, eſſendo tutte appoggiate a' principj fondamentali, che abbiamo premeſſo, e dello ſteſſo preciſo tenore della precedente.

CAPITOLO SECONDO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ALGEBRAICA.

LEMMA.

LA differenza di due frazioni della forma (*I*) (*II*)

$$\frac{f}{m.2m.3m\ldots xm}\ \ldots\ldots(I)\qquad \frac{d}{2m.3m.4m\ldots(x+1)m}\ \ldots(II)$$

ſi riduce alla forma (*III*)

$$\frac{\pm f(x+1)m \mp dm}{m \,.\, 2m \,.\, 3m \ldots (x+1)m} \ldots (III).$$

Imperciocchè, non differendo i fattori de' denominatori tra di sè fuorchè in questo, che il primo della frazione (II) comincia dal secondo della frazione (I), e l'ultimo di questa riesce il penultimo di quella, è manifesto che tutti i fattori della frazione (I), eccettuato il primo, sono i fattori medesimi della frazione (II), eccettuato l'ultimo. Per conseguenza il numeratore della differenza è patentemente $\pm f(x+1)m \mp dm$, e il denominatore $m \,.\, 2m \,.\, 3m \ldots (x+1)m$. Dunque ecc.

PROBLEMA II.

Sommare le serie frazionali a fattori semplici consecutivi.

RISOLUZIONE.

Poichè l'espressione (M) è il termine generale di queste serie

$$\frac{\pm\left(A+Bx+Cx^2+\text{ecc.}\ldots Qx^n\right)\left(a+b(x+n+1)\right)}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$$\frac{\mp\left(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\text{ecc.}\ldots Q(x+1)^n\right)(a+bx)}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$\ldots\ldots\ldots (M)$

la si ponga sotto forma differenziale, la quale si ridurrà, pel Lemma precedente, alla forma (N)

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2+\text{ecc.}\ldots Qx^n}{\left(a+bx\right)\left(a+b(x+1)\right)\ldots\left(a+b(x+n)\right)}$$

$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots+Q(x+1)^n}{\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)\ldots\left(a+b(x+n+1)\right)}$$

$\ldots\ldots\ldots (N)$

Si sostituisca l'unità in luogo di x nel primo membro del binomio (N), con che si avrà l'espressione (C)

$$\frac{A+B+C\ldots\ldots+Q}{(a+b)\,(a+2b)\ldots(a+b(n+1))}\ldots\ldots(C)$$

e presa la differenza tra il secondo membro del binomio (N), e la quantità (C), si avrà l'espressione (Q)

$$\frac{\pm(A+B+C+\text{ ecc}\ldots Q)(a+b(x+1))(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1))}{(a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1))((a+b(x+1)(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1)))}$$

$$\frac{\mp((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1)))(A+B(x+1)+C(x+1)^2+\ldots Q(x+1)^n)}{(a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1))((a+b(x+1)(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1)))}$$

$\ldots\ldots\ldots(Q)$

la quale è la somma generale delle serie frazionali a fattori semplici consecutivi, e a somma algebraica.

La Dimos. è la stessa, come nella I. Proposizione.

ESEMPIO.

Sia da sommarsi la serie, di cui $\frac{1+x}{x(1+x)(2+x)}$ è il termine generale.

Poichè sono tre i fattori al denominatore, si faccia $n=1$ nel termine generale (M); ed essendo decrescente la serie, si avrà generalmente

$$\frac{(A+Bx)(a+b(x+2))-(A+B(x+1))(a+bx)}{(a+bx)(a+b(x+1))(a+b(x+2))}$$
$$=\frac{2Ab-aB+bBx}{(a+bx)(a+b(x+1))(a+b(x+2))}$$

Paragonando quest'espressione generale col termine generale proposto si ricaverà pel valore delle indeterminate $a=0$, $b=1$, $A=\frac{1}{2}$, $B=1$. Si tragga ora dal-

la somma generale ($\mathcal{Q}$), colla sostituzione di $n=1$, l'espressione generale seguente

$$\frac{(A+B)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)-\left(A+B(x+1)\right)(a+b)(a+2b)}{(a+b)(a+2b)\left(a+b(x+1)\right)\left(a+b(x+2)\right)}$$

e vi si sostituiscano i valori ritrovati. La frazione risultante $\frac{x(3x+5)}{4(1+x)(2+x)}$ sarà la somma generale ricercata, e posto $x=\infty$, sarà $\frac{3}{4}$ la somma della serie all'infinito.

PROBLEMA III.

Sommare le serie frazionali a fattori composti consecutivi.

Risoluzione.

Essendo l'espressione (M)

$$\pm\frac{(A+Bx+Cx^2\ldots+\mathcal{Q}x^n)\left(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}{(M+Nx+Ox^2\ldots+Sx^{n+1})\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$
$$\mp\frac{\left(A+B(x+1)\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^n\right)(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})}{(M+Nx+Ox^2\ldots+Sx^{n+1})\left(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1}\right)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots(M)$$

il termine generale di queste serie, il si metta sotto la forma differenziale (N)

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2\ldots+\mathcal{Q}x^n}{M+Nx+Ox^2\ldots+Sx^{n+1}}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^n}{M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots+S(x+1)^{n+1}}\ldots\ldots(N)$$

Posto ciò, si sostituisca l'unità in luogo di x nel pri-

mo membro dell'espressione (N); dal che risulterà la quantità (C);

$$\frac{A+B+C+D\ldots\ldots+\mathcal{Q}}{M+N+O\ldots\ldots+S}\ldots\ldots(C)$$

e si prenda la differenza tra la quantità (C) e il secondo membro della forma (N). L'espressione risultante $(\mathcal{Q})$.

$$\frac{\pm(A+B+C\ldots\ldots+\mathcal{Q})\,(M+N(x+1)\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+N+O\ldots\ldots+S)\,(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1})}$$
$$\frac{\mp(M+N+O\ldots\ldots+S)\,(A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^n)}{(M+N+O\ldots\ldots+S)\,(M+N(x+1)+O(x+1)^2\ldots\ldots+S(x+1)^{n+1})}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots(\mathcal{Q})$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

ESEMPIO.

Trovare la somma della serie, di cui $\frac{1+3x+x^2}{x^2(1+x)^2}$ è il termine generale.

Poichè i fattori del denominatore non eccedono il secondo grado, è agevole il vedere, che fa d'uopo supporre $n=1$, perchè i fattori del denominatore nell'espressione generale (M) non oltrepassino questo grado. E però la frazione, che rappresenta il termine generale di tali serie, sarà necessariamente di questa forma

$$\frac{AN-BM+AO+(2AO+BO)x+BOx^2}{(M+Nx+Ox^2)\,(M+N(x+1)+O(x+1)^2)}$$

Ora, paragonando questa espressione col termine generale dato, si trova facilmente essere $M=N=0$, $A=B=O=1$. Sostituendo pertanto questi valori nell'espressione $(\mathcal{Q})$, ne risulta la forma

$$\frac{3x+2x^2}{(1+x)^2}$$

$$\frac{3x + 2x^2}{(1+x)^2}$$

che farà la fomma generale ricercata.

Scolio.

Efaminando il termine generale *(M)* di quefta forta di ferie nella Propofizione precedente, fi riconofce agevolmente, che il numero de' fattori femplici nel denominatore eccede di due unità il numero di fimili fattori nel numeratore. Quefta condizione è neceffaria non meno per quefte ferie, che per quelle a fattori femplici confecutivi, perchè poffano effere fufcettibili di fomma algebraica. Ma havvi ancora un' altra condizione da foddisfare nelle ferie a fattori compofti per rifpetto a' coefficienti. Ne' termini generali delle ferie della II. Propofizione il numero $n+1$ delle indeterminate, che debbono definirfi, non eccede il numero de' termini che poffono aver luogo ne' numeratori de' termini generali propofti; ma non è così nelle ferie a fattori compofti. Imperciocchè il numero delle indeterminate effendo parimente $n+1$, i coefficienti che poffono aver luogo ne' numeratori de' termini generali ne' cafi particolari fono al numero di $2n+1$. In confeguenza è neceffario, che quefti coefficienti abbiano tra di sè una determinata relazione, affinchè le equazioni pofte poffano tutte aver luogo ad un tempo. E appunto, oltre all' enunciata comune colle ferie a fattori femplici, v' è quefta condizione di più da adempiere per le ferie a fattori compofti, perchè ammettano fomma algebraica; il che s' accorda puntualmente con quello che da altri ancora è ftato avvertito.

CAPITOLO TERZO.

DELLE SERIE RICORRENTI.

PROBLEMA IV.

Trovare la somma generale delle progressioni geometriche.

Risoluzione.

Poichè l'espressione

$$(\pm A \mp AK^b)\, K^{a+bx} \ldots\ldots\ (M)$$

è il termine generale delle progressioni geometriche, si metta sotto la forma differenziale (N)

$$\pm AK^{a+bx} \mp AK^{a+b(x+1)} \ldots\ldots\ (N).$$

Si sostituisca poi nel primo membro AK^{a+bx} l'unità in luogo di x, e si avrà l'espressione AK^{a+b}. Se pertanto si prenda la differenza tra questa quantità e il secondo membro della forma differenziale $AK^{a+b(x+1)}$, l'espressione risultante $(\mathfrak{Q})$

$$AK^{a+b}(\pm 1 \mp K^{bx}) \ldots\ldots\ (\mathfrak{Q})$$

sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA V.

Sommare le serie composte di progressioni algebraiche, e geometriche.

Risoluzione.

Essendo la formula (M)

$\pm K^{a+bx}\left(A'-A'K^{b}+Ax-AK^{b}(x+1)+Bx^{2}-BK^{b}(x+1)^{2}\ldots+\mathfrak{Q}x^{n}-\mathfrak{Q}K^{b}(x+1)^{n}\right)$
. . . . (M)

il termine generale di queste serie, il si metta sotto la forma differenziale (N)

$\pm\left(A'+Ax+Bx^{2}\ldots+\mathfrak{Q}x^{n}\right)K^{a+bx}\mp\left(A'+A(x+1)+B(x+1)^{2}\ldots+\mathfrak{Q}(x+1)^{n}\right)K^{a+b(x+1)}$
. . . . (N)

sostituendo poi l'unità in luogo di x nel primo membro della forma (N), si prenda la differenza tra la quantità che ne risulta e il secondo membro, e si troverà l'espressione ($\mathfrak{Q}$)

$\pm K^{a+b}\left(A'-A'K^{bx}+A-AK^{bx}(x+1)+B-BK^{bx}(x+1)^{2}\ldots+\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}K^{bx}(x+1)^{n}\right)$
. . . . ($\mathfrak{Q}$)

Sarà pertanto ($\mathfrak{Q}$) la somma generale, che si ricercava. Il che ecc.

Esempio.

Sia da trovarsi la somma generale della serie, che ha per termine generale la funzione $2^{x}(1+x+x^{2})$. Giacchè la più alta potestà di x nel termine generale della serie algebraica non oltrepassa il secondo grado, si faccia $n=2$ nel termine generale (M). Essendo crescente la serie, l'espressione generale, che ne risulterà, sarà

$K^{a+bx}\left(-A'+A'K^{b}-Ax+AK^{b}(x+1)-Bx^{2}+BK^{b}(x+1)^{2}\right)$

in cui posto $K=2$, $a=0$, $b=1$, si avrà

$$2^{x}\left(A'+2A+2B+(A+4B)x+Bx^{2}\right)$$

e però, paragonando i termini tra di sè, si troverà essere $A'=5$, $A=-3$, $B=1$. Sostituiti questi valori nell' espressione ($\mathfrak{Q}$), per essere crescente la serie, sarà

$$2^{x}(6-2x+2x^{2})-6$$

la somma generale ricercata.

COROLLARIO I.

Egli è dimoſtrato da gran tempo, che i termini generali di tutte le ſerie Ricorrenti ſono formule eſponenziali, o eſponenziali moltiplicate con quantità coſtanti, oppure con funzioni di x intiere e razionali. E poichè col mezzo della IV e V Propoſizione ſi ſommano tutte le ſerie aventi sì fatte eſpreſſioni per termini generali, ſi avrà la ſomma conſeguentemente di tutte le ſerie Ricorrenti, che a tali ſerie ſi riducono generalmente.

COROLLARIO II.

Se ſi faccia $n=o$ nelle due eſpreſſioni (M), $(\mathfrak{Q})$ della Prop. precedente, ſi ottiene il termine e la ſomma generale di tutte le ſerie eſponenziali della IV.

COROLLARIO III.

E facendo ſemplicemente $K=1$, ſi cangiano toſto queſte ſerie in ſerie a differenze coſtanti, il che ſi conforma a quanto ha dimoſtrato il Sig. *Moivre* nel ſuo eccellente libro *de Menſura ſortis*, e il Sig. Daniele *Bernoulli* nel III. Vol. de' vecchj Comentarj di Pietroburgo per vie differentiſſime.

CAPITOLO QUARTO.

DELLE SERIE FRAZIONALI A SOMMA ESPONENZIALE.

PROBLEMA VI.

Sommare le serie frazionali a fattori semplici consecutivi, e a somma esponenziale.

RISOLUZIONE.

La formula (M)

$$\frac{\pm K^{a+bx}\big((A+Bx+Cx^2\ldots+Qx^n)\ (a+b(x+n+1))\big)}{(a+bx)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)\ldots\big(a+b(x+n+1)\big)}$$

$$\frac{-K^{a+bx+b}\big((a+bx)\ (A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^n)\big)}{(a+bx)\big(a+b(x+1)\big)\big(a+b(x+2)\big)\ldots\big(a+b(x+n+1)\big)}$$

$$\ldots\ldots\ (M)$$

è il termine generale di queste serie. Il si metta dunque sotto la forma differenziale (N), secondo il lemma del II. Cap.

$$\pm\frac{A+Bx+Cx^2\ldots+Qx^n}{(a+bx)\ldots(a+b(x+n))}K^{a+bx}$$

$$\mp\frac{A+B(x+1)+C(x+1)^2\ldots+Q(x+1)^n}{\big(a+b(x+1)\big)\ldots\big(a+b(x+n+1)\big)}K^{a+b(x+1)}$$

$$\ldots\ldots\ (N)$$

e messa l' unità in luogo di x nel primo membro di questa forma, si prenda la differenza tra la quantità che ne risulta e il secondo membro. Si ricaverà la formula (Q)

$$\frac{\pm K^{a+b}\Big((A+B+\text{ecc.}\ldots Q)((a+b(x+1))\ldots\ldots(a+b(x+n+1))\Big)}{\Big((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1))\Big)\Big((a+b(x+1))(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1))\Big)}$$
$$\frac{-K^{a+bx+b}\Big((a+b)\ldots a+b(n+1))(A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^n)\Big)}{\Big((a+b)(a+2b)\ldots(a+b(n+1))\Big)\Big((a+b(x+1))(a+b(x+2))\ldots(a+b(x+n+1))\Big)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ (Q)$$

la quale sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA VII.

Sommare la stessa classe di serie a fattori composti consecutivi.

RISOLUZIONE.

Poichè l' espressione (M)

$$\pm K^{a+bx}\left(\frac{(A+Bx\ldots+Qx^n)(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$
$$\left(\frac{-K^b(A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^n)(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})}{(M+Nx\ldots+Sx^{n+1})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$
$$\ldots\ldots\ (M)$$

è il termine generale di queste serie, gli si dia la forma differenziale, che gli è propria (N)

$$\pm\frac{A+Bx\ldots+Qx^n}{M+Nx\ldots Sx^{n+1}}K^{a+bx}$$
$$\mp\frac{A+B(x+1)\ldots+Q(x+1)^n}{M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1}}K^{a+b(x+1)}\ \ldots\ldots\ (N)$$

Ponendo in seguito l' unità in luogo di x nel primo termine dell' espressione (N), dal che risulta la quantità (C),

$$(C)\ldots\ldots\ \frac{A+B+C\ldots+Q}{M+N+O\ldots+S}K^{a+b}$$

ſi prenda la differenza tra il ſecondo termine della formula (N) e la quantità (C), e ſi avrà l'eſpreſſione $(\mathcal{Q})$

$$\pm K^{a+b}\left(\frac{((A+B+C\ldots+\mathcal{Q})(M+N(x+1)\ldots+S(x+1)^{n+1})}{(M+N+O\ldots+S)(M+N(x+1)+O(x+1)^{2}\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$
$$\left(\frac{-K^{bx}(A+B(x+1)\ldots+\mathcal{Q}(x+1)^{n})(M+N+O\ldots+S))}{(M+N+O\ldots+S)(M+N(x+1)+O(x+1)^{2}\ldots+S(x+1)^{n+1})}\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(\mathcal{Q})$

La quale ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

ESEMPIO.

Sia propoſta da ſommare la ſerie, di cui

$$\frac{(3-4x+x^{3})2^{x}}{(x^{2}-x+1)(x^{2}+x+1)}$$

è il termine generale.

Si tragga dal termine generale (M) di queſte ſerie (*Prop. preced.*) l' eſpreſſione convenevole a queſto caſo, facendo $n=1$, $K=2$, $a=0$, $b=1$, $M=O=1$, $N=-1$. Si avrà la formula ſeguente

$$\frac{(A+2B-(3A+B)x+(A-B)x^{2}+Bx^{3})2^{x}}{(x^{2}-x+1)(x^{2}+x+1)}$$

la quale paragonata col termine particolare propoſto ſomminiſtrerà $A=B=1$. Determinati tutti queſti valori, ſi ſoſtituiſcano nella ſomma generale $(\mathcal{Q})$, e ne riſulterà la formula

$$\frac{(4+2x)2^{x}}{x^{2}+x+1}-4$$

la quale ſarà la ſomma generale ricercata.

SCOLIO.

E' neceſſario l'avvertire in queſto luogo, come s'è fatto precedentemente, che eſſendo il numero delle indeterminate del numeratore ſempre minore del numero dell'equazioni da formare, fa d'uopo neceſſariamente, che v'abbia una determinata relazione tra queſti coefficienti, perchè la ſerie ſia ſuſcettibile di ſomma eſponenziale della forma ($\mathfrak{Q}$).

PROBLEMA VIII.

Sommare la ſerie (R)

$$\frac{p}{(p\pm1)(p^2\mp1)}+\frac{p^2}{(p^2\pm1)(p^3\pm1)}+\frac{p^3}{(p^3\pm1)(p^4\pm1)}\ldots\ldots$$
$$+\frac{p^x}{(p^x\pm1)(p^{x+1}\pm1)}\ldots\ldots(R)$$

RISOLUZIONE.

Si metta ſotto forma differenziale il termine generale propoſto .... $\frac{p^x}{(p^x\pm1)(p^{x+1}\pm1)}$ la quale ſarà della forma ſeguente (N)

$$\frac{1}{(p-1)(p^x\pm1)}-\frac{1}{(p-1)(p^{x+1}\pm1)}\ldots\ldots(N)$$

Si ponga nel primo termine l'unità in luogo di x, e ſi avrà l'eſpreſſione $\frac{1}{(p-1)(p\pm1)}$; ſi ſottragga quindi il ſecondo termine da queſta eſpreſſione. La formula ($\mathfrak{Q}$) riſultante

$$\frac{p(p^x-1)}{(p-1)(p\pm1)(p^{x+1}\pm1)}\ldots\ldots\ldots(\mathfrak{Q})$$

ſarà

sarà pe' nostri principj la somma generale dimandata. Il che ecc.

CAPITOLO QUINTO.

LE serie a differenze costanti, e le serie Ricorrenti in generale ammettono tutte senza eccezione una somma generale Algebraica, o esponenziale, siccome abbiamo veduto nelle Prop. I. IV. V. All' opposito le serie frazionali non ne sono generalmente suscettibili, avendovene un' infinità, che non ammettono che somme trascendenti. Le Prop. II, e VI non abbracciano che le serie a somma Algebraica o esponenziale. Ma non lascia perciò il nostro metodo di soggettare anche quelle alle sue leggi. In effetto le ho tutte generalmente ridotte sotto forme Integrali, e nel presente Capitolo esporremo il modo di sommarle. Così per tutt' altra via si vedranno comprese sotto generalissime espressioni le somme di questa natura di serie che sono state per l' addietro tolte per mano da tanti illustri uomini, e sopra le quali ho io pure pubblicato una Memoria nel 1775, che ha per titolo *Specimen de Seriebus convergentibus*. Al qual passo non disdice il ricordare, che un Geometra de' primi inclinò a credere, che il metodo da me adoperato in quel Libro potesse avere comuni i principj con quello che l' immortale *Eulero* espose nel VI. Vol. degli antichi Com. di S. Pietroburgo. Ma per verità deriva il mio metodo da alcune proposizioni fondamentali, che ho premesso, delle quali realmente non so di essere debitore a chi che sia, e su le quali non s' appoggia altramente il metodo Euleriano. Mostriamolo con qualche facile esempio. Si tratti di sommare le serie, che hanno (*A*)

$\frac{x^n}{(an+b)(cn+e)}$ per termine generale. Avendo dimostrato al §. V. di quel mio Opuscolo essere
$\frac{1}{qx^{b:a}}\int\left(x^{b:a}dx.\frac{1-x^n}{1-x}\right)$ la somma generale delle serie aventi per termine generale $\frac{x^n}{an+b}$, moltiplicando quest' espressione, e la serie per $x^{e:c-b:a}$, e fatta un' integrazione, ricavo immediatamente, posto sempre nelle quantità finite $x=1$, la formula

$$(B)\ \ldots\ \frac{1}{bc-ae}\int\left(1-x^{e:c-b:a}\right)x^{b:a}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)$$

ch' esprime la somma generale di quelle serie. Continuando così a fare altra moltiplicazione e successiva integrazione determino di mano in mano le somme generali per tre fattori, indi per quattro ecc. come può vedersi al §. X.

Il Sig. *Eulero* nel §. 10 di quella Memoria, per le serie aventi l' espressione (A) per termine generale, opera in questo modo. Chiama S la somma ricercata. Moltiplica la lettera S, e la serie per px^π, e differenzia l' equazione; indi determina il valore di p, π in a, b. Moltiplica di nuovo quest' equazione differenziata per px^π, e dopo un' altra differenziazione determina il valore di p, π in a, b, c, e. Passando poscia a due successive integrazioni, ov' entra s, e ds, trova finalmente per s la stessa espressione nostra (B). Se la serie avesse tre fattori, prende da capo a trattarla con simili operazioni, e così di mano in mano per quattro, e per tal numero di fattori che vuole. Parrebbe differente anche ne' principj un metodo che con una sola moltiplicazione, ed una sola integrazione di funzioni semplici di x, pervenisse ad un risultamento, che un al-

tro non ottiene che con due moltiplicazioni, due differenziazioni, e due integrazioni; e molto più in progresso crescendo il numero de' fattori. Ma quello che siamo qui per esporre è ben da tutti diverso così ne' principj, come nell' applicazione.

Delle Serie Frazionali trascendenti.

PROBLEMA IX.

Trovare il termine generale della serie (Υ)

$$\frac{1}{m+n}+\frac{1}{m+2n}+\frac{1}{m+3n}\;\ldots\ldots\ldots\;(\Upsilon)$$

sotto una forma integrale.

Risoluzione.

Essendo (μ) $\frac{1}{m+nx}$ il termine generale algebraico della serie (Υ), fa d' uopo, che il nuovo termine generale dia dopo l' integrazione l' espressione (μ). Per conseguenza non si tratta che di assumere tal funzione differenziale d' una variabile z, ch' essendo integrata, e avendo posta l' unità in luogo di z nell' integrale, ne risulti la funzione algebraica (μ). Ma appunto facendo l' integrazione della funzione differenziale $\frac{1}{n}z^{m:n+x-1}dz$, è manifesto, che l' integrale

$$(r)\;\ldots\ldots\ldots\;\frac{1}{n}\int(z^{m:n+x-1}dz)=\frac{1}{m+nx}$$

fatto $z=1$ dopo l' integrazione. Dunque la formula (r) rappresenta il termine generale della serie (Υ). Il che ecc.

PROBLEMA X.

Sommare la ſerie (Υ) della Prop. precedente.

RISOLUZIONE.

Poichè $\frac{1}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)$ è il termine generale della ſerie (Υ), il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x-1}\,dz}{1-z}-\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n+x}\,dz}{1-z}\;\ldots\ldots\;(N)$$

Meſſa poi l'unità in luogo di x nel primo termine, con che ſi ha $\frac{1}{n}\int\frac{z^{m:n}dz}{1-z}$ (C), ſi ſottragga dall'eſpreſſione (C) il ſecondo termine della forma (N). La differenza, che ne riſulta (Q)

$$\frac{1}{n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\ldots\ldots(Q)$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula (M)

$$\frac{A}{nqs..\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+x-1}dz\;\cdots(M)$$

integrata da $z=0$ *ſino a* $z=1$, *è il termine generale di tutte le ſerie* (X)

$$\frac{A}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega)}+\frac{A}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)}\;\text{ecc.}\ldots(X)$$

nelle quali il numeratore è una quantità coſtante, e il

denominatore il prodotto d'un numero qualunque di fattori ſemplici.

Dimostrazione.

Si traggano per ordine fuor de' ſegni le quantità differenziali, e ſe ne prendano ſucceſſivamente gl' integrali in modo che ſvaniſcano per la ſoſtituzione di $z = 0$. Si avrà dalla prima in ordine l' integrale $\frac{nz^{m:n+x}}{m+nx}$; il che eſſendo moltiplicato per $z^{p:q-m:n-1}dz$, e integrato darà per la ſeconda

$$\int z^{p:q-m:n-1}dz \int z^{m:n+x-1}dz = \frac{nqz^{p:q+x}}{(m+nx)(p+qx)}$$

e così operando ſucceſſivamente ſi perverrà alla forma

$$\frac{nqs \ldots \phi\omega z^{\Delta:\omega+x}}{(m+nx)(p+qx)+ \ldots (\Delta+\omega x)}$$

la quale diviſa per $nqs \ldots \phi\omega$, e moltiplicata per A, dopo di aver fatto $z = 1$, è il preciſo termine generale delle ſerie propoſte (X). Il che ecc.

PROBLEMA XI.

Sommare le ſerie (X) *della Prop. precedente.*

Risoluzione.

Eſſendoſi dimoſtrato, che la formula integrale (M) è il termine generale di queſte ſerie, la ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$\frac{A}{nqs \ldots \phi\omega} \int x^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz \ldots \text{ecc.} \int \frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z}$$

$$\frac{-A}{nqs \ldots \phi\omega} \int x^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz \ldots \text{ecc.} \int \frac{z^{m:n+x}dz}{1-z} \ldots\ldots (N)$$

Messa quindi l'unità in luogo di x nel primo termine, dal che risulta l'espressione

$$\frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:t-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n}dz}{1-z}$$

si sottragga da questa espressione il secondo termine della forma (N). La differenza $(\mathcal{Q})$

$$\frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:t-1}dx\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)$$

$\ldots\ldots(\mathcal{Q})$

sarà manifestamente la somma generale dimandata. Il che ecc.

TEOREMA II.

La formula (M)

$$\frac{\delta.}{ndz}\left(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)\ldots.(M)$$

è il termine della serie (μ)

$$\frac{a+b}{m+n}+\frac{a+2b}{m+2n}+\frac{a+3b}{m+3n}+\text{ecc.}\ldots.\frac{a+bx}{m+nx}\ldots.(\mu)$$

esprimendo la lettera δ. *una differenziazione ordinaria.*

DIMOSTRAZIONE.

Si prenda attualmente l' integrale della quantità sotto il segno. La formula (M) diverrà

$$\frac{\delta.(bz^{a:b+x})}{dz(m+nx)}$$

la quale essendo differenziata somministra

$\frac{a+bx}{m+nx}z^{a:b+x-1}$. E poichè quest' espressione svanisce

facendovi $z=0$, si ponga $z=1$. Si avrà $\frac{a+bx}{m+nx}$, ch'è effettivamente il termine generale della serie (μ). Il che ecc.

COROLLARIO I.

Si perverrebbe allo stesso risultamento se la funzione (M) fosse sviluppata, com' è manifesto. Imperciocchè, facendo $\frac{a}{b}-\frac{m}{n}=\pi$, si avrebbe l' espressione seguente

$$\frac{b\pi}{n}z^{\pi-1}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)+\frac{b}{n}z^{a:b+x-1}$$

dalla quale, dopo l' integrazione compiuta, e la sostituzione di $z=1$, si ricaverebbe il medesimo termine generale di prima. In fatti, posto $z=1$ nelle quantità finite, la formula diventa

$$\frac{b\pi}{n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)+\frac{b}{n}$$

e però, integrando, si ha

$$\frac{b\pi}{n}\cdot\frac{nz^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n}=\frac{b\pi z^{(m+nx):n}}{m+nx}+\frac{b}{n},$$ cioè, fatto

$$z=1,\ \frac{b}{m+nx}\left(\frac{a}{b}-\frac{m}{n}\right)+\frac{b}{n}=\frac{a+bx}{m+nx}.$$

COROLLARIO II.

Nello stesso modo si proverebbe, che l' espressione

$$\frac{1}{dz}\delta.\left(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)$$

è il termine generale della serie

$$\frac{(a+b)(c+e)}{m+n}+\frac{(a+2b)(c+2e)}{m+2n}\ldots\ldots+\frac{(a+bx)(c+ex)}{m+nx}$$

e l' espressione

$$\frac{1}{dz}\delta.\left(gz^{f:g-c:e+1}\times\frac{1}{dz}\delta.(ez^{c:e-a:b+1}\times\frac{1}{ndz}\delta.(bz^{a:b-m:n}\int\left(z^{m:n+x-1}dz\right)\right)$$

il termine generale della serie

$$\frac{(a+b)(c+e)(f+g)}{m+n}+\frac{(a+2b)(c+2e)(f+2g)}{m+2n}$$

$$\ldots\ldots\ldots+\frac{(a+bx)(c+ex)(f+gx)}{m+nx}$$

e così successivamente.

PROBLEMA XII.

Sommare la Serie (μ) del II Teorema.

Risoluzione.

Si ponga il termine generale (M) sotto la forma differenziale (N)

$$\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z})-\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z})..(N)$$

E si sostituisca nel primo membro l' unità in luogo di x. Se pertanto si sottragga la quantità che ne risulta dal secondo membro; si avrà l' espressione seguente

$$\frac{b}{ndz}\delta.(z^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz(\frac{1-z^x}{1-z})$$

la quale sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA

TEOREMA III.

Si supponga $Z = \frac{b}{dz}\,\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz)\right).$

La formula (M)

$$\frac{1}{nqs\ldots\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\varphi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-a:b}Zdz\ \ldots(M)$$

da $z=0$ *fino a* $z=1$ *è il termine generale della serie* (Y)

$$\frac{a+b}{(m+n)(p+q)\ldots(\Delta+\omega x)}+\frac{a+2b}{(m+2n)(p+2q)\ldots(\Delta+2\omega)}$$

$$\ldots\ldots+\frac{a+bx}{(m+nx)(p+qx)\ldots(\Delta+\omega x)}\ \ldots\ldots(Y)$$

DIMOSTRAZIONE.

Essendosi dimostrato nel Teorema precedente
$\frac{b}{dz}\,\delta.\left(z^{a:b-m:n}\int(z^{m:n+x-1}dz)\right)=\frac{n(a+bx)}{m+nx}z^{a:b+x-1}$,
si moltiplichi questo valore per $z^{p:q-a:b}dz$, e prendendo l' integrale del prodotto, si avrà

$$\frac{nq(a+bx)z^{p:q+x}}{(m+nx)(p+qx)}.$$

moltiplicando di nuovo quest' espressione per
$z^{r:s-p:q-1}dz$, e integrando il prodotto, si avrà

$$\frac{nqs(a+bx)z^{r:s+x}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)}$$

e così successivamente operando, si perverrà alla forma

$$\frac{(a+bx)nqs\ldots\phi\omega z^{\Delta:\omega+x}}{(m+nx)(p+qx)(r+sx)\ldots\ldots(\Delta+\omega x)}$$

Fatta per tanto la divifione per $nqs\ldots\phi\omega$, e fostituendo l' unità in luogo di z, fi avrà il termine generale conofciuto della ferie (Υ). Il che dovea dimoftrarfi.

PROBLEMA XIII.

Sommare le Serie (Υ) del Teorema precedente

RISOLUZIONE.

Si metta il termine generale (M) fotto la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x-1}dz}{1-z}\right)$$

$$\frac{-1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z}\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots (N)$$

pofta l' unità in luogo di x nel primo termine, fi fottragga dalla quantità, che ne rifulta il fecondo termine dell' efpreffione (N); Si avrà la formula $(\mathfrak{Q})$

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-a:b}\delta.\left(bz^{a:b-m:n}\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\right)$$

$$\ldots\ldots\ldots (\mathfrak{Q})$$

che farà la fomma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO.

In quefta guifa fi potranno fommare le altre Claffi di Serie aventi al numeratore un numero qualunque di

ſattori. Imperciocchè, determinata che ſia la funzione Z per n ſattori al numeratore, ſecondo ciò che s' è detto nel II Corollario del II Teorema, ſi ricaverà dal III Teorema il termine generale corriſpondente, e in ſeguito la ſomma generale, ſenza che mi diffonda maggiormente in queſto luogo.

Esempi.

Per ſacilitare l' intelligenza del metodo addurremo quì due eſempj.

I.

Sia da ſommarſi la ſerie

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}\;.\;.\;.\;.\;.+\frac{1}{x(3+x)}$$

Si tragga dall'eſpreſſione generale della Prop. XI. li due ultimi integrali a cagione dei due fattori al denominatore della ſerie propoſta, cioè

$$\frac{A}{nq}\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n}dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)$$

E poichè $A=1$, $m=0$, $n=q=1$, $p=3$, l'eſpreſſione della ſomma diverrà

$$\int z^2dz\int dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)=\frac{1}{3}\int\left((1-z^3)dz\left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)\right)$$

Ma queſta formula, fatto $z=1$ dopo l' integrazione, diventa l'eſpreſſione algebraica (Q)

$$\frac{x}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2(2+x)}+\frac{1}{3(3+x)}\right)\ldots\ldots(Q)$$

e però (Q) è la ſomma generale dimandata. Facendo per tanto $x=\infty$, ſarà $\frac{11}{18}$ la ſomma della ſerie all' infinito.

II.

Sia da ſommare la ſerie

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{7.8}\,\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(-2+3x)\,(-1+3x)}$$

Eſſendo $A=1$, $m=-2$, $n=3$, $p=-1$, $q=3$, l'eſpreſſione generale dell'eſempio precedente diventa

$$\frac{1}{9}\int z^{-2:3}dz\int z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{(1-z^{1:3})(1-z^{x})z^{-2:3}dz}{1-z}$$

di cui l'integrale dipende manifeſtamente dalle quadrature note. E volendo la ſomma della ſerie all' infinito, ſi ponga $x=\infty$; la formula precedente ſi cangia in queſta

$$\frac{1}{3}\int z^{-2:3}dz\left(\frac{1-z^{1;3}}{1-2}\right)=\int\frac{dy}{1+y+y^{2}}$$

facendo $z^{1:3}=y$. Per conſeguenza la ſomma della ſerie all'infinito = Arc. 40° di un cerchio avente $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ per raggio.

SCOLIO.

E' noto, che queſta ſorta di ſerie va bene ſpeſſo unita con qualche ſerie geometrica, e che non è ſempre poſſibile di eſprimere le ſomme con formule eſponenziali. Un ſolo Problema generale baſterà, come mi ſembra, per indicare la ſtrada, che convien tenere in caſo che queſte ſerie non ammettano altra ſomma, che traſcendente.

PROBLEMA XIV.

Sommare le serie (I)

$$\frac{K^{a+b}}{(m+n)(p+q)\ldots\ldots(\Delta+\omega)}$$

$$+\frac{K^{a+2b}}{(m+2n)(p+2q)\ldots\ldots(\Delta+2\omega)}\ldots\ldots\frac{K^{a+bx}}{(m+nx)(p+qx)\ldots(\Delta+\omega x)}$$

. . . . (*I*)

Risoluzione.

Essendo l'espressione (*M*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int z^{m:n+x-1}K^{a+bx}dz$$

. . . . (*M*)

il termine generale delle serie (*I*) (*Teorema I. del pref. Cap.*), il si metta sotto la forma differenziale (*N*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x-1}K^{a+bx}dz}{1-K^{b}z}$$

$$-\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n+x}K^{a+b(x+1)}dz}{1-K^{b}z}$$

. . . . (*N*)

E posta poi l'unità in luogo di x nel primo termine, dal che risulta la quantità

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\phi-1}dz\ldots\text{ecc.}\int\frac{z^{m:n}K^{a+b}dz}{1-K^{b}z}$$

si sottragga il secondo termine da quest'espressione; sarà la differenza (*Q*)

$$\frac{1}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\omega-\mu:\rho-1}dz\ldots\text{ecc.}\int z^{p:q-m:n-1}dz\int\frac{z^{m:n}K^{a+b}dz(1-K^{bx}z^{x})dz}{1-K^{b}z}$$

. . . . ($\mathfrak{Q}$)

La fomma generale ricercata. Il che ecc.

Corollario

Se la Serie aveffe de' fattori al numeratore, fi potrebbe nello fteffo modo fommarla, ricavando i termini generali convenienti da' Teoremi, che abbiamo premeffo; il che non ha bifogno di effere efemplificato.

Scolio.

Ma non è poi fuor di propofito, che fi prendano qui per mano le ferie Reciproche de' numeri naturali feparatamente, ancorchè non fieno elle che puri cafi particolari delle ferie generali, onde abbiamo affegnato la fomma in quefto Capitolo fotto forme trafcendenti. Ne daremo pertanto due efpreffioni differenti, una delle quali ci appartiene in particolare, ficcome può vederfi nel Libro, che abbiamo mentovato nell' introduzione del Capitolo, e l' altra è del pari tratta direttamente da' principj di quefta Memoria, ma coincide, quanto al finale rifultamento, con quella che ha trovato il Sig. *Eulero* per diverfa via, e pubblicato nel VI Vol. de' primi Com. dell' Accademia di S. Pietroburgo.

PROBLEMA XV.

Sommare le ferie Reciproche de' numeri naturali

$$1+\frac{1}{2^{n}}+\frac{1}{3^{n}}+\frac{1}{4^{n}}+\text{ecc.}\;\ldots\ldots\;\frac{1}{x^{n}}$$

RISOLUZIONE.

Se nell' espressione (M) del Termine generale (*Prop. XIV.*) si faccia m, p ecc. μ, $\Delta = 0$; n, q, s ecc. ... ϕ, $\omega = 1$; $K = 1$; il termine generale di queste serie prenderà la forma seguente

$$\overline{\int dz:z \ldots \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \int z^{x-1} dz}}}}$$

e la somma generale la seguente

$$\overline{\int dz:z \ldots \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \int dz \left(\frac{1-z^x}{1-z}\right)}}}}$$

prendendo altrettanti integrali da destra a sinistra, quante sono le unità in u. Per conseguenza la somma all' infinito di tutte queste serie sarà manifestamente

$$\overline{\int dz:z \ldots \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \overline{\int dz:z \int dz:(1-z)}}}}$$

Il che ecc.

PROBLEMA XVI.

Sommare direttamente le serie Reciproche de' numeri naturali.

RISOLUZIONE.

Essendo $\int z^{x-1} dz \left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1} = \frac{1.2.3....(u-1)}{x^u}$ nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, siccome è dimostrato nel Calcolo Integrale, l' espressione

$$\frac{1}{1.2.3....(u-1)} \int z^{x-1} dz \left(l.\frac{1}{z}\right)^{u-1} = \frac{1}{x^u}$$

ſarà il termine generale di queſte ſerie. Le ſi dia la forma differenziale (N)

$$\frac{1}{1.2.3...(u-1)}\int\frac{z^{x-1}dz(l.\frac{1}{z})^{u-1}}{1-z}$$

$$-\frac{1}{1.2.3...(u-1)}\int\frac{z.z^{x-1}dz(l.\frac{1}{z})^{u-1}}{1-z}\ldots(N)$$

Si metta in ſeguito l'unità in luogo di x nel primo termine, e ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità che riſulta da quella ſoſtituzione. La differenza ($\mathfrak{Q}$).

$$\frac{1}{1.2.3...(u-1)}\int dz(l.\tfrac{1}{z})^{u-1}\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\ldots(\mathfrak{Q})$$

ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO.

Sarà dunque nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione.

$$1.2.3...(u-1)\int dz:z...\int dz:z\int\frac{dz}{1-z}=\int\frac{dz}{1-z}(l.\tfrac{1}{z})^{u-1}$$

$$1.2.3...(u-1)\int dz:z...\int dz:z\int dz:z\int\frac{dz(1-z^{x})}{1-z}$$

$$=\int\left(dz(l.\tfrac{1}{z})^{u-1}\left(\frac{1-z^{x}}{1-z}\right)\right)$$

SCOLIO.

E perchè non s'abbia a ricorrere a quel mio libro per avere le ſomme all'infinito d'un certo numero di queſte ſerie reciproche de' numeri naturali, non ſarà inutile per le occorrenze, che qui pure ſi regiſtrino, come le ho ivi accuratamente determinate.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\text{ecc}\ldots=.6931471$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\text{ecc}\ldots=.8224670$$

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{6^3}+\text{ecc}\ldots=.9016769$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\text{ecc}\ldots=.9470327$$

$$1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{6^5}+\text{ecc}\ldots=.9722291$$

$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}-\frac{1}{6^6}+\text{ecc}\ldots=.9855511$$

$$1-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}-\frac{1}{6^7}+\text{ecc}\ldots=.9926366$$

$$1-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}-\frac{1}{6^8}+\text{ecc}\ldots=.9962322$$

$$1-\frac{1}{2^9}+\frac{1}{3^9}-\frac{1}{4^9}+\frac{1}{5^9}-\frac{1}{6^9}+\text{ecc}\ldots=.9981151$$

$$1-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}-\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}-\frac{1}{6^{10}}+\text{ecc}\ldots=.9990368$$

$$1-\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}-\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{5^{11}}-\frac{1}{6^{11}}+\text{ecc}\ldots=.9995089$$

$$1-\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}-\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}-\frac{1}{6^{12}}+\text{ecc}\ldots=.9997928$$

ecc.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\text{ecc}\ldots=\infty$$

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\text{ecc}\ldots=1.\ 6449340$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{6^3}+\text{ecc}\ldots=1.\ 2022358$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0823231$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{6^5}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0370444$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{6^6}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0173431$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{6^7}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0083927$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{6^8}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0040766$$

$$1+\frac{1}{2^9}+\frac{1}{39}+\frac{1}{4^9}+\frac{1}{5^9}+\frac{1}{6^9}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0020292$$

$$1+\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{4^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\frac{1}{6^{10}}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0009918$$

$$1+\frac{1}{2^{11}}+\frac{1}{3^{11}}+\frac{1}{4^{11}}+\frac{1}{5^{11}}+\frac{1}{6^{11}}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0004859$$

$$1+\frac{1}{2^{12}}+\frac{1}{3^{12}}+\frac{1}{4^{12}}+\frac{1}{5^{12}}+\frac{1}{6^{12}}+\text{ecc}\ldots=1.\ 0002320$$

ecc...

CAPITOLO SESTO.

DELLE SERIE A FATTORI CRESCENTI.

LE Serie a fattori creſcenti formano una Claſſe di progreſſioni ſommamente eſteſa, ed utile baſtevolmente per aver luogo in queſte Ricerche a fianco delle Serie più note, e maneggiate da' Geometri. Tutto ciò, che ne ſapevamo prima del Sig. *Eulero* conſiſteva per verità in puri caſi particolari ſvolti cogli artifizj del calcolo. Egli è il primo, che additò la ſtrada di aſſegnare a' loro termini generali eſpreſſioni traſcendenti nel V. Vol. de' primi Com. di S. Pietroburgo. Non mancò in ſeguito di fare un tentativo intorno alle loro Somme nel VI. Vol. de' medeſimi Com. mettendole ſotto forme differenziali con un metodo non ignoto, ſe ſi vuole, a due grandi uomini, che il precedettero (*veggaſi il Com. Epiſt. tra Leibnitz e Bernoulli Tom.* 1.), ma non ancora perfezionato, nè ſpinto tant' oltre. Ancorchè creſca il grado dell' equazione differenziale, augmentandoſi il numero de' fattori ne' termini ſucceſſivi, e le indeterminate non vi ſi laſcino ſeparare, di modo che non è opera comune l' integrazione che reſta da affrontare, le ha ridotte almeno quell' uomo incomparabile a forme conoſciute e famigliari. Dopo di lui non è a mia cognizione, che ſia ſtato fatto alcun paſſo notabile di più. Vo' credere pertanto, che non ſia per diſpiacere a' Geometri il vedere ſottomeſſe coll' altre anche le Somme di queſte ſerie alla ſemplicità de' noſtri principj.

PROBLEMA XVII.

Trovare la somma generale della serie (I)

$1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2.3.4 + \text{ecc.}\ldots\ldots 1.2.3\ldots x\ldots\ldots (I)$

Risoluzione.

Poichè l'espressione integrale $\int dz(-l.z)^x$ è il termine generale di questa serie (*V. Vol. de'vecchj Com. di S. Pietrob.*), le si dia la forma differenziale (*N*).

$$\int\frac{dz(-l.z)^{x+1}}{-1-l.z}-\int\frac{dz\,(-l.z)^x}{-1-l.z}\,\ldots\ldots\ldots (N)$$

Posta pertanto l'unità in luogo di x nel secondo termine, essendo crescente la serie, si sottragga la quantità risultante dal primo termine dell'espressione (*N*). La differenza (*Q*)

$$\int\frac{dz\,l.z\left((-l.z)^x-1\right)}{1+l.z}\,\ldots\ldots (Q)$$

sarà la somma ricercata della serie (*I*), posto $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

Scolio.

Il metodo è sommamente semplice, e singolarmente quando si tratti di serie, nelle quali il numero de' fattori ne' termini successivi va crescendo secondo una data legge, come sarebbe

$1 + 1.2.3 + 1.2.3\ldots\ldots 5 + 1.2.3\ldots\ldots 7 \ldots\ldots\ldots + 1.2.3\ldots\ldots \overline{2x-1}$

$1 + 1.2\ldots\ldots 6 + 1.2\ldots\ldots 11 + 1.2\ldots\ldots 16\ldots\ldots\ldots\ldots + 1.2.3\ldots\ldots \overline{5x-4}$

Se i fattori crescono secondo il numero intiero m, il metodo del Sig. *Eulero* (*Vol. VI. de' med. Com.*) porta necessariamente a equazioni differenziali del grado m, come il testifica egli medesimo alla pag. 87. *De quo no-*

tandum est, tot semper in æquatione resultante signa integralia sibi invicem esse juncta, quot sunt factores, quibus sequens quisque terminus augetur. Nel nostro metodo all' opposito non entrano equazioni differenziali da integrare con le indeterminate mescolate insieme, ma si perviene direttamente all' espressione della somma: Il che potrebbe aprire un campo a qualche utile speculazione nel calcolo integrale combinando i due metodi. Eccone un esempio.

PROBLEMA XVIII.

Sommare la serie (R)

$$1.2.3.....\overline{a+b}+1.2.3......\overline{a+2b}.......+1.2.3....\overline{a+bx}.....(R)$$

RISOLUZIONE.

Essendo $\int dz(-l.z)^x$ il termine generale della serie a fattori crescenti consecutivi (*Prop. preced.*), è manifesto, che mettendo $a+bx$ in luogo di x, l' espressione (*M*)

$$(M) \ldots\ldots \int dz(-l.z)^{a+bx}$$

sarà il termine generale della serie (*R*). La si metta sotto la forma differenziale (*N*)

$$\int\frac{dz(-l\,z)^{a+b(x+1)}}{(-l.z)^b-1}-\int\frac{dz(-l.z)^{a+bx}}{(-l.z)^b-1}\ldots\ldots(N)$$

Posto pertanto $x=1$ nel secondo termine di quest'espressione, si sottragga dal primo la quantità che ne risulta, e la differenza

$$\int\frac{dz(-l.z)^{a+b}\left((-l.z)^{bx}-1\right)}{(-l.z)^b-1}$$

sarà, nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, la somma generale della serie (*R*). Il che ecc.

PROBLEMA XIX.

Sommare la ſerie (M)

$$K^{a+b} + 1.2K^{a+2b} + 1.2.3K^{a+3b} \ldots\ldots + 1.2.3\ldots xK^{a+bx} \ldots (M)$$

Risoluzione.

Eſſendo $\int dz(-l.z)K^{a+bx}$ il termine generale di queſta ſerie, con un' operazione ſimile alla precedente ſi troverà, che l' eſpreſſione

$$\int \frac{dz\, l.z\, K^{a+b}\left(K^{bx}(-l.z)^{x} - 1\right)}{1 + K^{b}\, l.z}$$

nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione, è la ſomma generale della ſerie (M). Il che ecc.

PROBLEMA XX.

Sommare la ſerie

$$\frac{1}{K^{2}} - \frac{1.2}{K^{3}} + \frac{1.2.3}{K^{4}} - \text{ecc.} \ldots \pm \frac{1}{K^{x+1}}(1.2.3\ldots\ldots x)$$

Risoluzione.

Eſſendo dimoſtrato (*Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 74) che nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione, avendo luogo il ſegno poſitivo ſe ſia x numero pari, e il negativo ſe ſia x impari,

$$\int z^{u} dz (l.z)^{x} = \pm \frac{1}{(u+1)^{x+1}}(1.2.3\ldots\ldots x)$$

ſe ſi ponga $K - 1$ in luogo di u, è manifeſto, che l' eſpreſſione (M)

$$\int z^{K-1} dz (l.z)^{x} \ldots\ldots (M)$$

ſarà il termine generale della propoſta ſerie. Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale (N)

$$\int\frac{z^{K-1}dz\,(l.z)^{x}}{1-l.z}-\int\frac{z^{K-1}dz\,(l.z)^{x+1}}{1-l.z}\ \ldots\ (N)$$

e ſi faccia $x=1$ nel primo membro. Dopo queſto ſi ſottragga il ſecondo dalla quantità che riſulta da quella ſoſtituzione, e la differenza

$$\int\frac{dz\left(1-(l.z)^{x}\right)z^{K-1}\,l.z}{1-l.z}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA I.

La formula integrale $\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$, *nel caſo di* $z=1$ *dopo l'integrazione, è il termine generale della ſerie* (R)

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2}{(m+1)(m+2)(m+3)}+\frac{1.2.3}{(m+1)\ldots\ldots(m+4)}$$

$+$ ecc. . . . . . (R)

Si vegga il V. Vol. de' vecchj Com. di S. Pietrob. pag. 41

COROLLARIO.

Si dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che la formula

$$\frac{1}{q^{x}}\int z^{p:q}dz\,(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2}{(p+q)\ldots\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

e che

$$(K:q)^{x}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}$$

è il termine generale delle ſerie

$$\frac{K}{p+q}+\frac{1.K^2}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2K^3}{(p+q)....(p+3q)}+\text{ecc.}$$

PROBLEMA XXI.

Trovare la Somma generale della Serie (R)

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.3}{(m+1)....(m+3)}+\text{ecc.} \ldots (R)$$

Risoluzione.

Poichè $\int z^m (1-z)^{x-1}$ è il termine generale della Serie (*Teor. preced.*), il ſi metta ſotto la forma differenziale (N)

$$(A)\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1} - (B)\int z^{m-1} dz(1-z)^{x} \ldots (N)$$

ch' è equivalente, giacchè eſſendo $\int z^{m-1} dz(1-z)^x$ $= \frac{x}{m+x}\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1}$ nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, e $\frac{m}{m+x}\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1}$ $= \int z^m dz(1-z)^{x-1}$, farà $(A)-(B)$

$$= \left(1-\frac{x}{m+x}\right)\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1}$$

$$= \frac{m}{m+x}\int z^{m-1} dz(1-z)^{x-1} = \int z^m dz(1-z)^{x-1}.$$

Si faccia per tanto $x=1$ nel primo membro (A), dal che

che ſi ha integrando $\frac{z^m}{m}$, e ſi ſottragga da $\frac{z^m}{m}$ il ſecondo termine (B). La differenza nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, cioè

$$\frac{1}{m}-\int z^{m-1}dz(1-z)^x$$

ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

Corollario I.

Similmente ponendo il termine generale

$$\frac{1}{q^x}\int z^{q:q}dz(1-z)^{x-1}$$

ſotto queſta forma differenziale

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z}-\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^x}{q-1+z}$$

la quale coincide con queſta

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q-1+z}-\frac{1}{q^x}\int\frac{qz^{p:q}dz(1-z)^{x-1}(1-z)}{q-1+z}$$

col metodo ſolito ſi ricaverà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{1}{q^x}\int\frac{z^{p:q}dz\left(q^{x-1}-(1-z)^{x-1}\right)}{q-1+z}$$

la quale nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione ſarà la ſomma generale della ſerie

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1.2}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

Nello stesso modo si troverà essere

$$K{:}q^{x}\int\frac{z^{p:q}dz\left(q^{x-1}-(K-Kz)^{x-1}\right)}{q-K+Kz}$$

la somma generale della serie di cui è termine generale

$$\left(\frac{K}{q}\right)^{x}\int z^{q:q}dz(1-z)^{x-1}$$

TEOREMA II.

La forma (M')

$$\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}}{(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}}$$

. . . . . . (M')

nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione si riduce alla forma* (M)

$$\frac{\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dx(1-z)^{x-1}}\ldots\ldots(M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x}=\frac{mx}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

$$(m-p-1)\int z^{p}dz(1-z)^{x}=\frac{(m-p-1)x}{p+x+1}\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$$

la forma (M') si riduce manifestamente a questa

$$\frac{\frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}}$$

Ma per le medesime regole

$$\int z^{m}dz(1-z)^{x-1} = \frac{m}{m+x}\int z^{m-1}dz(1-z)^{x-1}$$

Dunque la forma (M') si riduce alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXII.

Sommare la serie (R)

$$\frac{p+1}{m+1}+\frac{(p+1)(p+2)}{(m+1)(m+2)}+\frac{(p+1)\ldots(p+3)}{(m+1)\ldots(m+3)}+\text{ecc.}\ldots\ldots(R)$$

RISOLUZIONE.

La formula $\int z^{m}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della serie

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\frac{1.2}{(m+1)\ldots\ldots(m+3)}+\text{ecc.}\ldots\ldots(A)$$

per il I. *Teorema*; e per conseguenza la formula $\int z^{p}dz(1-z)^{x-1}$ è il termine generale della serie

$$\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)(p+2)}+\frac{1.2}{(p+1)\ldots\ldots(p+3)}+\text{ecc.}\ldots\ldots(B)$$

Dunque, dividendo per ordine il termine x^{mo} della serie (A) pel termine x^{mo} della serie (B), l'espressione (M)

$$\frac{\int z^{m} dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{p} dz(1-z)^{x-1}}$$

diventa necessariamente il termine generale della serie (R). Gli si dia pertanto la forma differenziale equivalente (M') del II. *Teorema*; e sostituendo poscia l' unità in luogo di x nel primo termine, si sottragga il secondo dalla quantità risultante, e la differenza

$$\frac{p+1}{m-p-1}-\frac{m\int z^{m-1} dz(1-z)^{x}}{(m-p-1)\int z^{p} dz(1-z)^{x}}$$

sarà la somma generale ricercata. Il che ecc.

TEOREMA III.

La forma (N)

$$\frac{(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x+1}}{m\int z^{m-1} dz(1-z)^{x+1}}-\frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1} dz(-z)^{x}}$$

.........(N)

nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione, si riduce alla forma* (M)

$$\frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{\int z^{m} dz(1-z)^{x}} \quad \ldots\ldots (M)$$

DIMOSTRAZIONE.

Poichè per le riduzioni del Calcolo Integrale

$$\int dz(-l.z)^{x+1} = z(-l.z)^{x+1} + \overline{x+1} \int dz(-l.z)^{x}$$

$$\int z^{m-1} dz(1-z)^{x+1} = \frac{z^{m}(1-z)^{x+1}}{m+x+1}$$

$$+ \frac{x+1}{m+x+1} \int z^{m-1} dz(1-z)^{x}$$

nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione, la forma (N) diventa manifeſtamente

$$\frac{(m+x+1)(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1} dz(1-z)^{x}} - \frac{(m+x+1)\int dz(-l.z)^{x}}{m\int z^{m-1} dz(1-z)^{x}}$$

Ma $m\int z^{m-1} dz(1-z)^{x} = (m+x+1)\int z^{m} dz(1-z)^{x}$,

per le ſteſſe riduzioni. Per conſeguenza la forma (N) ſi riduce evidentemente alla forma (M). Il che ecc.

PROBLEMA XXIII.

Sommare la Serie (R)

$$(m+1)(m+2)^2 + (m+1)(m+2)(m+3)^2$$
$$+ (m+1)(m+2)(m+3)(m+4)^2 + \text{ecc.} \ldots (R)$$

RISOLUZIONE.

L' eſpreſſione $\int dz(-l.z)^{x}$ è il termine generale della ſerie

$1 + 1.2 + 1.2.3 + 1.2\ldots4 + 1.2\ldots.5 + \text{ecc.}\ldots$ (*Prop. XVII*);

e l' espressione $\int z^m dz(1-z)^x$ è il termine generale delle serie

$$\frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1.2}{(m+1)...(m+3)}$$
$$+ \frac{1.2.3}{(m+1)....(m+4)} + \text{ecc. } (\textit{Teor. I.})$$

dunque la formula

$$\frac{\int dz(-l.z)^x}{\int z^m dz(1-z)^x}$$

è il termine generale della serie
$(m+1)(m+2)+(m+1)(m+2)(m+3)+(m+1)...(m+4)+$ ecc.

Per conseguenza la formula (*M*) del Teor. precedente è il termine generale della serie proposta (*R*). Il si metta per tanto sotto la forma differenziale (*N*) del medesimo Teorema, e posta l' unità in luogo di x nel secondo termine, si sottragga la quantità risultante dal primo.

La differenza

$$\frac{(m+x+2)\int dz(-l.z)^{x+1}}{m\int z^{m-1}dz(1-z)^{x+1}} - (m+1)(m+2)$$

Nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

SCOLIO.

Le Propos. precedenti non abbracciano tutto ciò che può ricercarsi in questa classe di serie. Per la qual cosa mi fo a risolvere le seguenti generalissime. I Teoremi, coll' ajuto de' quali ho superato la difficoltà di risolverle, meritano, a quello che mi pare, l' attenzione de' Geometri.

TEOREMA IV.

Nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione la formula* (M)

$$\frac{1}{q(z^{p:q+1}e^{1:qz})}\int(z^{p:q+x}dz.e^{1:qz})(p+q(x+1)-z^{-1})$$

. . . . . . (M)

è uguale all' unità, essendo e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico.

DIMOSTRAZIONE.

Si divida la formula (M) in due facendo per maggior semplicità $\Delta=\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}$. Ella diverrà

$$\Delta\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}-\Delta\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}$$

Ora, esprimendo $\delta.$ una differenziazione ordinaria, sarà

$$\delta.(z^{p:q+x+1}e^{1:qz})=\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$
$$-\frac{1}{q}z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}$$

Per conseguenza, integrando, sara

$$\frac{1}{q}\int z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}=-z^{p:q+x+1}e^{1:qz}$$
$$+\frac{p+q(x+1)}{q}\int z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$e\ \Delta\Big(\int\frac{p+q(x+1)}{q}z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}$$

$$-\int\frac{z^{p:q+x-1}dz.e^{1:qz}}{q}\Big)=$$

$$\frac{\Delta}{q}\int\big(z^{p:q+x}dz.e^{1:qz}\big)\big(p+q(x+1)-z^{-1}\big)$$

$$=\Delta z^{p:q+x+1}e^{1:qz}=z^{x}=1,$$

sostituendo l' unità il luogo di z. Il che ecc.

COROLLARIO.

Nello stesso modo si proverà, che

$$\frac{1}{q\big(z^{p:q}e^{-z:q}\big)}\int z^{p:q+x}e^{-z:q}dz\big((p+qx)z^{-1}-1\big)=z^{x}=1$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

TEOREMA V.

Nel caso di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\big(\overline{p+qx}.z^{-1}-(m+nx+n)\big)z^{p:q+x}dz(q-nz)^{m:n-p:q}=1$$

DIMOSTRAZIONE

Si supponga per semplicità $\mu=\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}$, $\Delta=m:n-p:q$, e si divida la formula in due, come segue

$$(A)\ (p+qx)\,\mu\int z^{p:q+x-1}dz(q-nz)^{\Delta}$$

$$-(B)\ (m+nx+n)\,\mu\int z^{p:q+x}dz(q-nz)^{\Delta}$$

Ora,

Ora, essendo per le riduzioni del calcolo integrale,

$$\int z^{p:q+x} dz\,(q-nz)^{\Delta} = -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{(p:q+x+\Delta+1)n}$$

$$+\frac{p+qx}{(p:q+x+\Delta+1)n}\int z^{p:q+x-1} dz\,(q-nz)^{\Delta}$$

$$= -\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{m+nx+n} + \frac{p+qx}{m+nx+n}\int z^{p:q+x-1} dz(q-nz)^{\Delta}$$

sarà

$$\int z^{p:q+x-1} dz(q-nz)^{\Delta} = \frac{m+nx+n}{p+qx}\int z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta}$$

$$+\frac{z^{p:q+x}(q-nz)^{\Delta+1}}{p+qx}$$

e però $(A)-(B)=z^{x}=1$, sostituendo l'unità in luogo di z. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Essendo dimostrato (*Vol. V. de' primi Com. di S. Pietrob.*), che la forma

$$\frac{q^{x+1}\int dz\,(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p:q} dz(1-z)^{x}} = K$$

è il termine generale della serie ($\mathfrak{Q}$)

$p+q+(p+2q)+(p+q)\ldots(p+3q)$ ecc..... $(p+q)\ldots(p+qx)\ldots$. ($\mathfrak{Q}$)

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, ed essendo dimostrato presentemente, che nel medesimo caso la forma (M) del IV *Teorema* è uguale all'unità, egli è manifesto, che

$$K = \frac{1}{q\left(z^{p:q+1}e^{1:qz}\right)}\int z^{p:q+x} Ke^{1:qz} dz\left(p+q(x+1)-z^{-1}\right)$$

. . . . . (P)

mentre per una parte K non è variabile, per quello che rappresenta il valore di

$$\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^x}{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^x}$$

dopo l' integrazione, e la foſtituzione dell' unità in luogo di z; e per l'altra la formula (M) nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione non è che l' unità, come il ſi è dimoſtrato; e però la forma (P) non eſprime, che il termine generale della ſerie ($\mathfrak{Q}$) trasformato.

Corollario II.

Similmente, eſſendo la formula

$$\frac{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^x}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^x}=K'$$

il termine generale della ſerie reciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q)\ldots(p+3q)}+\text{ecc.}$$

combinando queſta forma con quella del *Coroll.* dopo il IV. *Teorema*, ſarà per la ſteſſa ragione

$$K'=\frac{1}{q\left(z^{p:q}e^{-z:q}\right)}\int z^{p:q+x}K'e^{-z:q}dz\left((p+qx)z^{-1}-1\right)\ldots(\mathfrak{Q}')$$

Corollario III.

E per fine, eſſendo l' eſpreſſione

$$\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(n-nz)^x}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}dz(q-qz)^x}=K''$$

il termine generale della ſerie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)}-\frac{(m+n)\ldots\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots\ldots(p+3q)} \text{ ecc.}$$

combinando questa forma con quella del V. *Teorema*, sarà

$$K''=\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int\left((p+qx)z^{-1}-(m+nx+n)\right)z^{p:q+x}K''dz\,(q-nz)^{\Delta}\ldots(R)$$

PROBLEMA XXIV.

Sommare la serie
$p+q+(p+q)(p+2q)+(p+q)\ldots\ldots(p+3q)+$ ecc.

RISOLUZIONE.

Essendo, per le regole di riduzione del calcolo integrale, nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione

$$q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}=xq^{x+1}\int dz(-l.z)^{x-1}$$

$$(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}=qx\int z^{p:q}(dz(1-z)^{x-1}$$

il termine generale (P) (*Coroll.* I.) prende la seguente forma

$$\frac{1}{q\left(z^{p:q+1}e^{1:qz}\right)}\int\left\{z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\overline{p+q.x+1}.z^{x}\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p.q}dz(1-z)^{x}}\right.\right.$$

$$\left.\left.-(p+qx)z^{x-1}\frac{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}\right)\right\}$$

Il si metta pertanto sotto la forma differenziale (N)

$$(A)\,\Delta\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{\overline{p+q.x+1}}{q}z.^{x}\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q(x+1))\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}-\frac{p+q}{q}\right)$$

$$(B)-\Delta\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\left(\frac{p+qx}{q}z^{x-1}.\frac{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}-\frac{p+q}{q}\right)$$

$\ldots\ldots\ldots(N)$

ma, posta l' unità in luogo di x nel secondo membro (B), secondo i nostri principj, tutto svanisce. Dunque il primo termine

$$(A)\ldots\frac{1}{z^{p:q+1}e^{1:qz}}\int z^{p:q}e^{1:qz}dz\Big(\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}}{q}z^{x}.\frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}-\frac{p+q}{q}\Big)$$

sostituito il valore di Δ, sarà necessariamente la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA XXV.

Sommare la serie Riciproca

$$\frac{1}{p+q}+\frac{1}{(p+q)(p+2q)}+\frac{1}{(p+q).,..(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Attese le riduzioni mentovate nella Prop. preced. si trova facilmente, che il termine generale $(\mathfrak{Q}')$ (*Coroll. II Teor. V*) di questa serie prende la seguente forma, posto $\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}=\Delta'$,

$$\Delta'\int\Big\{z^{p:q}e^{-z:q}dz\Big(\frac{(p+qx)z^{x-1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}-\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}.z^{x}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\Big)\Big\}$$

Le ſi dia dunque la ſeguente forma differenziale,

$$(A)..\Delta'\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{(p+q.\overline{x+1})\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

$$(B)..-\Delta'\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x-1}.\frac{(p+qx)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x-1}}{q^{x}\int dz(-l.z)^{x-1}}\right)$$

Ma, come nella Prop. preced., ſe ſi faccia $x=1$ nel ſecondo termine (B), l' eſpreſſione ſvaniſce. Dunque il primo

$$(A)\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz\left(1-z^{x}.\frac{\overline{p+q.\overline{x+1}}\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}\right)$$

ſarà la ſomma generale dimandata nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO.

La ſomma pertanto della ſerie all' infinito ſarà

$$\frac{1}{q(z^{p:q}e^{-z:q})}\int z^{p:q}e^{-z:q}dz$$

eſſendo infinitamente piccolo il termine

$$\frac{(p+q.\overline{x+1}\int z^{p:q}dz(1-z)^{z}}{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}$$

nel caſo di $x=\infty$, e ſvanendo nel medeſimo tempo il fattore z^{∞} a cagione di z minore dell' unità prima dell' integrazione.

PROBLEMA XXVI.

Sommare la serie

$$\frac{m+n}{p+q}+\frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)}+\frac{(m+n)\ldots.(m+3n)}{(p+q)\ldots.(p+3q)}+\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

Poichè per le regole di riduzione del calcolo integrale nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{m:n} dz(p-qz)^{x-1}=\frac{m+nx+n}{nqx}\int z^{m:n} dz(q-qz)^{x}$$

$$\int z^{p:q} dz(n-nz)^{x-1}=\frac{p+qx+q}{nqx}\int z^{p:q} dz(n-nz)^{x}$$

farà

$$\frac{n\int z^{p:q} dz(n-nz)^{x-1}}{q\int z^{m:n} dz(q-qz)^{x-1}}=\frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q} dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n} dz(q-qz)^{x}}$$

Per conseguenza il termine generale (R) (*Coroll. III Teor. V*) di questa serie prende la seguente forma, posto $\Delta=\frac{m}{n}-\frac{p}{q}$,

$$\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q+x} dz(q-nz)^{\Delta}(\overline{m+nx}\,.\,z^{-1}K''$$

$$-(m+nx+n)K'')$$

essendo K'' ciò che diventa K'' (*Coroll. III*) mettendovi $x-1$ in luogo di x.

Il si metta pertanto sotto la forma differenziale, che segue

$$(A)..\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q} dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx+n)\,z^{x}\,K''\right)$$

$$(B)...\frac{-1}{z^{p:q}(q-nz)^{\Delta+1}}\int z^{p:q} dz(q-nz)^{\Delta}\left(m+n-(m+nx)z^{x-1}\,K'\right)$$

e poichè, facendo $x=1$ nel ſecondo membro (B), l'eſpreſſione ſvaniſce, egli è evidente, che il primo termine (A), ſoſtituiti i valori di K' e Δ

$$(A)...\frac{1}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int\left\{z^{p:q} dz(q-nz)^{m:n-p:q}\right.$$

$$\left.\left(m+n-(p+qx+q)z^{x}.\ \frac{n\int z^{p:q}dz(n-nz)^{x}}{q\int z^{m:n}\, dz(q-qz)^{x}}\right)\right\}$$

ſarà la ſomma generale ricercata nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO.

In conſeguenza, eſſendo la ſerie decreſcente, ſarà, per quello che s'è detto nel Coroll. della Prop. precedente, la ſomma all'infinito eſpreſſa in queſto modo

$$\frac{m+n}{z^{p:q}(q-nz)^{m:n-p:q+1}}\int z^{p:q} dz\,(q-nz)^{m:n-p:q}$$

SCOLIO.

Sarebbe qui a propoſito l' applicare generalmente il metodo anche quando il numero de' fattori va creſcendo di un numero m maggiore dell' unità, come ſe n'è fatto menzione qui innanzi, e ſe n' è pure dato un eſempio (*Prop. XVIII*); ma penſo, che torni meglio ripigliare queſto ſoggetto in altra occaſione, ove farò vedere, che s' eſtende il metodo anche ai caſi ne' quali il numero m non è coſtante; il che non potrebbe farſi con alcun metodo conoſciuto; tanto più, che in

sì fatta ricerca s' offrono da considerare moltissimi importanti Teoremi di calcolo integrale, che non sono poi di questo luogo.

CAPITOLO SETTIMO.

DELLE SERIE LOGARITMICHE.

IL legame, che ha il calcolo integrale con le serie logaritmiche, e l'uso, che se ne può fare in moltissime occasioni, m'ha determinato a formarne una nuova Classe, e non senza frutto. Imperciocchè, mentre non avevamo altre forme per esprimere i termini generali delle serie a fattori crescenti, delle quali abbiamo trattato nel Capitolo precedente, fuorchè quelle che il Sig. *Eulero* ha pubblicato nel *V. Vol. de' Vecchj Com. di S. Pietrob.*, avremo quì un nuovo modo di esprimerli, che ho ricavato dalla considerazione delle serie logaritmiche, e insieme alcuni Teoremi non inutili al progresso dell' Analisi.

PROBLEMA XXVII.

Trovare la somma generale della serie

$l.2 + l.3 + l.4 + l.5 + \text{ecc.} \; \ldots\ldots\; l.\overline{x+1}$

RISOLUZIONE.

Essendo dimostrato nel *Vol. XIX de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 70, che

$$\int \frac{z^x dz}{l.z} = l.\overline{x+1} + \int \frac{dz}{l.z}$$

nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, egli è manifesto che questa espressione rappresenta il termine generale della

della ſerie. Si metta pertanto la formula $\int \frac{z^x dz}{l.z}$ ſotto forma differenziale, come ſegue

$$(A) \int \frac{z^x dz}{(1-z)\,l.z} - (B) \int \frac{z^{x+1} dz}{(1-z)\,l.z}$$

e avendo ſoſtituito l'unità in luogo di x nel termine (A), ſi ſottragga dalla quantità che ne riſulta $\int \frac{z dz}{(1-z) l.z}$ il ſecondo termine (B). Si avrà l'eſpreſſione

$$\int \frac{z dz\,(1-z^x)}{(1-z)\,l.z}$$

Ma il termine generale della ſerie è

$$\int \frac{z^x dz}{l.z} - \int \frac{dz}{l.z} \quad \ldots\ldots (M)$$

Dunque la ſomma generale completa della ſerie ſarà neceſſariamente

$$\int \frac{z dz\,(1-z^x)}{(1-z)\,l.z} - x\int \frac{dz}{l.z} = \int \frac{dz}{(1-z) l.z}\big(z(1-z^x) - x(1-z)\big)$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

Corollario I.

Mettendo $p+qx-1$ in luogo di x nell'eſpreſſione (M), è manifeſto che la formula

$$\int \frac{z^{p+qx-1} dz}{l.z} - \int \frac{dz}{l.z} = l.\,\overline{p+qx}$$

nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, ſarà il termine generale della ſerie

$$l.\,(p+q) + l.\,(p+2q) + l.\,(p+3q) + \text{ecc.}$$

Operando pertanto come s'è fatto nella Propoſizione precedente, ſi troverà, che l'eſpreſſione

$$\int \frac{dz}{(1-z^q)\,l.z}\big(z^{p+q-1}(1-z^{qx}) - x(1-z^q)\big)$$

ſarà la ſomma generale delle ſerie.

COROLLARIO II.

E poichè

$l.2 + l.3 + l.4 +$ ecc. $\ldots\ldots l.(x+1) = l.\big(2.3.4\ldots(x+1)\big)$

$l.(p+q) + l.(p+2q) + l.(p+3q) +$ ecc. $\ldots l.(p+qx)$

$= l.\big((p+q.(p+2q)\ldots.(p+qx)\big)$

Se sia e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico, sarà

$$(A)\ldots e^{\int\frac{dz}{(1-z)l.z}\left(z(1-z^{x})-x(1-z)\right)} = 2.3.4\ldots.\overline{x+1}$$

$$(B)\ldots e^{\int\frac{dz}{(1-z^{q})l.z}\left(z^{p+qx-1}(1-z^{qx})-x(1-z^{q})\right)} = (p+q)(p+2q)\ldots(p+qx)$$

e però (A), (B) saranno i termini generali delle serie

$2 + 2.3 + 2.3.4. + 2.3.4.5. +$ ecc.

$p+q+(p+q)(p+2q)+(p+q)(p+2q)(p+3q)+$ecc.

COROLLARIO III.

Paragonandoli dunque con quei del Sig. *Eulero* usati nel Cap. precedente (*Prop. XVII e Coroll. I del Teor. V*) avremo i seguenti Teoremi

$$e^{\int\frac{dz}{(1-z)l.z}\left(z(1-z^{x})-x(1-z)\right)} = \int dz(-l.z)^{x+1}$$

$$e^{\int\frac{dz}{(1-z^{q})l.z}\left(z^{p+qx-1}(1-z^{qx})-x(1-z^{q})\right)} = \frac{q^{x+1}\int dz(-l.z)^{x}}{(p+qx+q)\int z^{p:q}dz(1-z)^{x}}$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXVIII.

Sommare la serie

$$l.\frac{m+n}{p+q}+l.\frac{m+2n}{p+2q}+l.\frac{m+3n}{p+3q}+\text{ecc.}\ldots l.\frac{m+nx}{p+qx}$$

RISOLUZIONE.

Essendo nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$(\mathfrak{Q})\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{p+qx-1}-1\right)=l.(p+qx)$$

$$(\mathfrak{Q}')\ldots\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-1\right)=l.(m+nx)$$

pel primo Coroll. della Prop. precedente, sarà evidentemente

$$\int\frac{dz}{l.z}\left(z^{m+nx-1}-z^{p+qx-1}\right)=l.\frac{m+nx}{p+qx}=(\mathfrak{Q}')-(\mathfrak{Q})$$

Ma per lo stesso Coroll. la somma generale della serie $(\mathfrak{Q})$ è

$$\int\frac{dz}{(1-z^q)l.z}\left(z^{p+q-1}(1-z^{qx})-x(1-z^q)\right)\ldots(R)$$

e la somma generale delle serie $(\mathfrak{Q}')$

$$\int\frac{dz}{(1-z^n)l.z}\left(z^{m+n-1}(1-z^{nx})-x(1-z^q)\right)\ldots(R')$$

Dunque $(R')-(R)$

$$=\int\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{m+n-1}(1-z^{nx})}{1-z^n}-\frac{z^{p+q-1}(1-z^{qx})}{1-z^q}\right)$$

sarà la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che &cc.

COROLLARIO IV.

Sarà pertanto

$$e^{(R')-(R)} = \frac{m+n}{p+q} \cdot \frac{m+2n}{p+2q} \cdot \frac{m+3n}{p+3q} \cdot \cdots\cdots \frac{m+nx}{p+qx}$$

E comparando questo nuovo termine generale della serie

$$\frac{m+n}{p+q} + \frac{(m+n)(m+2n)}{(p+q)(p+2q)} + \frac{(m+n)\ldots(m+3n)}{(p+q)\ldots\ldots(p+3q)} + \text{ecc.}$$

con quello del Sig. *Eulero* usato nel *Cap. proced. Coroll. III del Teor. V* si avrà questo Teorema

$$e^{(R')-(R)} = \frac{n(p+qx+q)\int z^{p:q}\, dz(n-nz)^{x}}{q(m+nx+n)\int z^{m:n}\, dz(q-qz)^{x}}$$

nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione.

PROBLEMA XXIX.

Sommare la serie

$$l.\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)} + l.\frac{(a+2b)(c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} \ldots + l.\frac{(a+bx)(c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

RISOLUZIONE.

Essendo, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$(A)\ldots \int \frac{dz}{l.z}\left(z^{a+bx-1} - z^{m+nx-1}\right) = l.\frac{a+bx}{m+nx}$$

$$(B)\ldots \int \frac{dz}{l.z}\left(z^{c+ex-1} - z^{p+qx-1}\right) = l.\frac{c+ex}{p+qx}$$ (*Prop. precedente*)

Sarà $(A)+(B)=l.\frac{a+bx}{m+nx}+l.\frac{c+ex}{p+qx}=l.\frac{(a+bx)(c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$
il termine generale della proposta serie.

Ma la somma generale della serie, di cui (A) è il termine generale, è di questa forma

$$(P)\ldots\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{a+b-1}(1-z^{bx})}{1-z^{b}}-\frac{z^{m+n-1}(1-z^{nx})}{1-z^{n}}\right)\right\}$$

e la somma generale della serie, che ha (B) per termine generale, è espressa così

$$(P')\ldots\int\left\{\frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{c+e-1}(1-z^{ex})}{1-z^{e}}-\frac{z^{p+q-1}(1-z^{qx})}{1-z^{q}}\right)\right\}$$

(Prop. preced.)

Per conseguenza $(P)+(P')$ sarà manifestamente la somma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO V.

Nello stesso modo si troverebbe, che $(P)-(P')$ è la somma generale della serie

$$l.\frac{(a+b)(p+q)}{(c+e)(m+n)}+l.\frac{(a+2b)(p+2q)}{(c+2e)(m+2n)}+\text{ecc.}$$

COROLLARIO VI.

Così procedendo non sarebbe difficile cosa il ritrovare le somme di queste serie logaritmiche, qualunque si fosse il numero de' fattori.

COROLLARIO VII.

E poichè, paſſando dai logaritmi ai numeri, ſi ha

$$e^{(P)+(P')} = \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} \cdots \frac{(a+bx)\ (c+ex)}{(m+nx)(p+qx)}$$

ſarà $e^{(P)+(P')}$ il termine generale della ſerie

$$\frac{(a+b)(c+e)}{(m+n)(p+q)} + \frac{(a+b)\ (c+e)}{(m+n)(p+q)} \cdot \frac{(a+2b)\ (c+2e)}{(m+2n)(p+2q)} + \text{ecc.} \ldots\ldots (R)$$

Ma, ſecondo il Signor *Eulero*,

$$\frac{b(m+nx+n) \int z^{m:n} dz\ (b-bz)^x}{n(a+bx+b) \int z^{a:b} dz\ (n-nz)^x} = \mathfrak{Q}$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{a+b}{m+n} + \frac{(a+b)\ (a+2b)}{(m+n)\ (m+2n)} + \text{ecc.}, \text{ e}$$

$$\frac{e\ (p+qx+q) \int z^{p:q} dz\ (e-ez)^x}{q(c+ex+e) \int z^{c:e} dz\ (q-qz)^x} = \mathfrak{Q}'$$

è il termine generale della ſerie

$$\frac{c+e}{p+q} + \frac{(c+e)(c+2e)}{(p+q)(p+2q)} + \text{ecc.}$$

E però $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}'$ è il termine generale della ſerie (R). In conſeguenza ſi avrà queſto bel Teorema

$$e^{(P)+(P')} = \mathfrak{Q}\,\mathfrak{Q}'$$

nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione. E facendo $c=a$, $e=b$, $p=m$, $q=n$, ſarà

$$e^{2(P)} = \mathfrak{Q}^2$$

$$e^{3(P)} = \mathfrak{Q}^3$$

. . . .

$$e^{\Delta(P)} = \mathfrak{Q}^\Delta$$

PROBLEMA XXX.

Sommare le ſerie del Signor Eulero (Vol. XIX. de' nuovi Com. di S. Pietrob.)

$$l.2 + (l.3 - 2\,l.2) + (l.4 - 3\,l.3 + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}\,l.2)$$

$$+ (l.5 - 4\,l.4 + \frac{3 \cdot 4\,l.3}{1 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}\,l.2) + \text{ecc.} \ldots (I)$$

RISOLUZIONE.

Avendo dimoſtrato queſto Geometra, che nel caſo di $z = 1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{(z-1)^x dz}{l.z} = l.(x+1) - \frac{x}{1}\,l.x + \frac{x.(x-1)}{1.2}\ l.(x-1)$$

$$- \frac{x\,(x-1)\,(x-2)}{1.2.3.}\ l.(x-2)$$

+ ecc. è manifeſto, che queſta formula è il termine generale della ſerie (I). La ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$(A) \int \left(\frac{(z-1)^x dz}{(2-z)\,l.z} \right) - (B) \int \left(\frac{(z-1)^{x+1} dz}{(2-z)\,l.z} \right)$$

e avendo poſto l'unità in luogo di x nel termine (A), dalla quantità riſultante ſi ſottragga il ſecondo termine (B); l'eſpreſſione

$$\int \frac{(z-1)dz}{(2-z)l.z}\left(1-(z-1)^x\right)$$

ſarà, nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione, la ſomma generale della ſerie (I). Il che ecc.

PROBLEMA XXXI.

Sommare la ſerie

$l.$ ſen. $\Delta + l.$ ſen. $2\Delta + l.$ ſen. $3\Delta \ldots\ldots + l.$ ſen. $x\Delta$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato nel medeſimo luogo (*pag.* 86), che nel caſo di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int \frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1-z^{2n}}\cdot\frac{dz}{l.z} = l.\ \text{ſen.}\ \frac{\pi(n-u)}{2n}$$

mentre ſia π la circonferenza d'un cerchio, di cui l'unità è diametro; ſi faccia $\frac{\pi}{2n}=\Delta$, $u=\frac{\pi}{2\Delta}-x$; ſarà nel medeſimo caſo

$$\int \frac{z^{x-1}+z^{\pi:\Delta-x-1}}{1-z^{\pi:\Delta}}\cdot\frac{dz}{l.z} = l.\ \text{ſen.}\ x\Delta$$

il termine generale della propoſta ſerie.

Il ſi metta pertanto ſotto forma differenziale così

$$\int \frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} - \int \frac{z^{x}dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

$$+\int \frac{z^{\pi:\Delta-x-1}dz}{(1-\frac{1}{z})\,(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} - \int \frac{z^{\pi:\Delta-x-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

e ſi ponga l'unità in luogo di x nel primo e terzo termine. Si avrà

$$(A)\int \frac{dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z},\quad (B)\int \frac{z^{\pi:\Delta-2}dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

Si ſottragga

Si sottragga da (A) il secondo termine, e da (B) il quarto.

Si otterrà così l'espressione

$$\int \frac{(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z} + \int \frac{z^{\pi:\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})\,l.z}$$

La quale si riduce alla seguente forma agevolmente

$$(M) \ldots\ldots\ldots \int \frac{(1+z^{\pi:\Delta-x-1})(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

e sarà ella la somma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXII.

Sommare la serie

$l.\,\text{cos}.\,\Delta + l.\,\text{cos}.\,2\Delta + l.\,\text{cos}.\,3\Delta \ldots\ldots + l.\,\text{cos}.\,x\Delta$

RISOLUZIONE.

Se nell'espressione $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{n-u-1}+z^{n+u-1}}{1-z^{2n}}\right)$

si faccia $\frac{\pi}{2\Delta}=n$, $u=x$, essendo sen. $\frac{\pi(n-u)}{2n}=\text{cos}.\,\frac{\pi u}{2n}$,

sarà $\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-1}+z^{\pi:2\Delta+x-1}}{1-z^{\pi:\Delta}}\right)=l.\,\text{cos}.\,x\Delta$

il termine generale della serie proposta.

Gli si dia pertanto la forma differenziale seguente

$$(1)\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-1}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})}\right) - \int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta-x-2}}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})}\right)(2)$$

$$(3)+\int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta+x-1}}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right) - \int \frac{dz}{l.z}\left(\frac{z^{\pi:2\Delta+x}}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right)(4)$$

Si sostituisca poi l'unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità risultanti si sottraggano rispettivamente i termini (2), (4). Sarà

$$\int \frac{z^{\pi:2\Delta-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:\Delta})l.z} + \int \frac{z^{\pi:2\Delta}(1-z^x)dz}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})l.z}$$

$$=\int \frac{z^{\pi:1\Delta}dz}{l.z}\left(\frac{(1+z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(1-z^{\pi:\Delta})}\right) \ldots . (N)$$

La somma generale ricercata. Il che ecc.

COROLLARIO VIII.

Consegue evidentemente dalle due Proposizioni precedenti la verità di due importanti Teoremi; cioè, passando dai logaritmi ai numeri, sarà generalmente

$$e^{(M)} = \text{sen.}\,\Delta\ \text{sen.}\,2\Delta\ \text{sen.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{sen.}\,x\Delta$$

$$e^{(N)} = \text{cos.}\,\Delta\ \text{cos.}\,2\Delta\ \text{cos.}\,3\Delta \ldots\ldots \text{cos.}\,x\Delta$$

TEOREMA.

Sia (N′) *quello che diventa l'espressione* (N) *della Proposizione precedente, mettendovi* $\frac{1}{2^x}$ *in luogo di* x: *dico, che quando* x $= \infty$, π *essendo la circonferenza d'un cerchio che ha l'unità per diametro, sarà* $\pi = 2e^{-(N')}$

DIMOSTRAZIONE.

Facendo $\frac{\pi}{2} = K$, K è la quarta parte della circonferenza d'un cerchio, che ha l'unità per raggio. Ma si dimostra facilmente, essere

$$\frac{1}{\text{cos.}\frac{K}{2}} = 2\ \text{sen.}\,\frac{K}{2}$$

$$\frac{1}{\text{cos.}\frac{K}{2}\ \text{cos.}\frac{K}{4}} = 4\ \text{sen.}\,\frac{K}{4}$$

. . . .

$$\frac{1}{\text{cos}.\frac{K}{2}\text{cos}.\frac{K}{4}\ \ldots\ldots\ \text{cos}.\frac{K}{2^x}} = 2^x\ \text{sen}.\frac{K}{2^x}.$$

Essendosi dunque dimostrato (*Coroll. VIII.*), che

$$e^{-(N)} = \frac{1}{\text{cos}.K\ \text{cos}.2K\ \text{cos}.3K\ \text{ecc.}\ldots\text{cos}.xK}$$

sarà, mettendo $\frac{1}{2^x}$ in luogo di x,

$$e^{-(N')} = \frac{1}{\text{cos}.\frac{K}{2}\text{cos}.\frac{K}{4}\ \text{cos}.\frac{K}{16}\ \text{ecc.}} = 2^x\ \text{sen}.\frac{K}{2^x}$$

Ma nel caso di $x = \infty$, 2^x sen. $\frac{K}{2^x} = K$. Dunque nel caso di $z = 1$ dopo l'integrazione, e di $x = \infty$ sarà

$$2e^{-(N')} = 2e^{-\int\frac{(1+z^{1:2^x})(1-z^{1:2^x})dz}{z^{1:2^x}(1-z)(1-z^2)l.z}} = 2K = \pi.$$

ch'è un'espressione del cerchio totalmente nuova. Il che ecc.

PROBLEMA XXXIII.

Sommare la serie
$l.$ tang. $a + l.$ tang. $2a + l.$ tang. $3a \ldots\ldots l.$ tang. xa

Risoluzione.

Poichè nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{n+x-1} - z^{n-x-1}}{1+z^{2n}}.\frac{dz}{l.z} = l.\ \text{tang}.\ \frac{\pi(n+x)}{4n}$$

siccome è dimostrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S.*

Pietrob., si faccia $\frac{\pi}{4n} = a$, e si metta $x - \frac{\pi}{4a}$ in luogo di x; l' espressione

$$\int \frac{z^{x-1} - z^{\pi:2a-x-1}}{1+z^{\pi:2a}} \cdot \frac{dz}{l.z}$$

sarà il termine generale della serie. Gli si dia perciò la forma differenziale, che segue

$$(1)\int \frac{z^{x-1}dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z} - (2)\int \frac{z^{x}dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

$$(3) - \int \frac{(z^{\pi:2a-x-1})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z} + (4)\int \frac{(z^{\pi:2a-x-2})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

Posta quindi l' unità in luogo di x ne' due termini (1), (3), si sottraggano dalle quantità risultanti i termini (2), (4). Sarà

$$\int \frac{(1-z^{x})dz}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z} - \int \frac{z^{\pi:2a-2}(1-z^{-x})dz}{(1-\frac{1}{z})(1+z^{\pi:2a})l.z}$$

$$= \int \frac{(1-z^{\pi:2a-x-1})dz(1-z^{x})}{(1-z)(1+z^{\pi:2a})l.z} \quad \ldots\ldots \quad (P)$$

la somma generale della serie proposta nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

COROLLARIO IX.

Ed essendo $\frac{1}{\text{cot.}\, xa} = \text{tang.}\ xa$, e $l.\ \text{tang.}\ xa = -l.$ $\text{cot.}\ xa$, la somma generale della serie

$l.\ \cot.\ a + l.\ \cot.\ 2a + l.\ \cot.\ 3a \ldots\ldots l.\ \cot.\ xa$
sarà evidentemente

$$\int \frac{\left(z^{\pi:2a - x - 1} - 1\right)\left(1 - z^{x}\right) dz}{(1 - z)\left(1 + z^{\pi:2a}\right) l.z} \ldots\ldots (Q)$$

COROLLARIO X.

Avremo dunque, in aggiunta agli altri, anche i due Teoremi, che seguono

$$e^{(P)} = \text{tang.}\ a\ \text{tang.}\ 2a\ \text{tang.}\ 3a \ldots\ \text{tag.}\ xa$$

$$e^{(Q)}\quad \cot.\ a\ \cot.\ 2a\ \cot.\ 3a \ldots\ \cot.\ xa$$

facendo passaggio dai logaritmi ai numeri.

CAPITOLO OTTAVO

DELLE SERIE A PRODOTTI INFINITI.

NOn è ignota la teoria de' prodotti infiniti dopo ciò che ne hanno sapientemente scritto *Wallis*, *Euler*, *de la Grange*, ed altri Geometri. Ma, avendolo trovato utile in alcune occasioni, credo, che importi il metterli per la prima volta in serie, e il formarne un ordine apposito. Ogni termine è realmente finito, ma apparisce sotto una forma infinita, essendo composto d' un numero infinito di fattori, che formano un prodotto continuo.

TEOREMA I.

Nel caso di $z = 1$ *dopo l' integrazione*

$$(A)\int z^{a-1}dz(1-z^b)^{(m+p):p}$$

$$=(B)\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}dz(1-z)^{(m+p):p}$$

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia $a-1=n$, $\frac{m+p}{p}=r$, e si sviluppi l'espressione integrale (A). Si avrà pertanto

$$(1-z^b)^r=1-\frac{rz^b}{1}+\frac{r(r-1)z^{2b}}{1.2}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}z^{3b}+\text{ecc.}$$

e però

$$\int z^n dz(1-z^b)^r=\frac{z^n}{n+1}-\frac{rz^{n+b+1}}{1(n+b+1)}$$

$$+\frac{r.(r-1)z^{n+2b+1}}{1.2(n+2b+1)}-\text{ecc.}$$

Ma poichè, facendo $z=0$, tutto svanisce, si faccia $z=1$, e si avrà

$$\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r(-1)}{1.2(a+2b)}-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3(a+3b)}+\text{ecc.....}\ (M)$$

Similmente sviluppando la formula (B), sarà

$$(1-z)^r=1-\frac{rz}{1}+\frac{r(r-1)}{1.2}z^2-\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}z^3+\text{ecc.}$$

$$\int z^{a:b-1}dz(1-z)^r=\frac{bz^{a:b}}{a}-\frac{brz^{a:b+1}}{1(a+b)}$$

$$+\frac{br(r-1)z^{a:b+2}}{1.2(a+2b)}-\text{ecc.}$$

e infine, posto $z=1$,

$$\frac{1}{b}\int z^{a:b-1}dz(1-z)^r=\frac{1}{a}-\frac{r}{1(a+b)}+\frac{r(r-1)}{1.2(a+2b)}$$

$$- \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3.(a+3b)} + \text{ecc.}$$

ch' è appunto la ſerie (M). Dunque ecc.
Il che ecc.

COROLLARIO I.

E poichè ſi dimoſtrerebbe nello ſteſſo modo, che

$$\int z^{f-1} dz\left(1-z^{g}\right)^{(m+p):p} = \frac{1}{g}\int z^{f:g-1} dz(1-z)^{(m+p):p}$$

ſi conchiuda, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione,

$$\frac{\int z^{a-1} dz\left(1-z^{b}\right)^{(m+p):p}}{\int z^{f-1} dz\left(1-z^{g}\right)^{(m+p):p}} = \frac{g\int z^{a:b-1} dz(1-z)^{(m+p):p}}{b\int z^{f:g-1} dz(1-z)^{(m+p):p}}$$

TEOREMA II.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\int z^{a-1} dz\left(1-z^{b}\right)^{(m-p):p} = \frac{p}{am}\cdot\frac{2(ap+bm)}{(a+b)(m+p)}\cdot$$
$$\frac{3\left(ap+b(m+p)\right)}{(a+2b)(m+2p)}\cdot\frac{4\left(ap+b(m+2p)\right)}{(a+3b)(m+3p)} \text{ ecc.}$$

all' infinito . . . . . . (P)
Se ne vegga la dimoſtrazione nel *I Vol. del Calc. Integrale* del Sig. *Eulero pag.* 264.

TEOREMA III.

Nel caſo di $z=1$ *dopo l' integrazione*

$$\frac{\int z^{a-1} dz\left(1-z^{p}\right)^{(m-p):p}}{\int z^{f-1} dz\left(1-z^{p}\right)^{(q-p):p}}$$

$$= \frac{fq(a+m)}{am(f+q)} \cdot \frac{(p+f)(q+p)(a+m+p)}{(a+p)(m+p)(f+q+p)} \cdot \frac{(p+2f)(q+2p)(a+m+2p)}{(a+2p)(m+2p)(f+q+2p)}$$
$$\cdot \frac{(p+3f)(q+3p)(a+m+3p)}{(a+3p)(m+3p)(f+q+3p)} \text{ ecc.} \ldots\ldots (\mathfrak{Q}) \; (\textit{ibidem pag. } 269)$$

PROBLEMA XXXIV.

Trovare la somma generale della serie (B)

$$\frac{p}{a} \cdot \frac{2(ap+b)}{(a+b)(1+p)} \cdot \frac{3\big(ap+b(p+1)\big)}{(a+2b)(1+2p)} \cdot \frac{4\big(ap+b(2p+1)\big)}{(a+3b)(1+3p)} \text{ ecc.}$$
$$+ \frac{p}{2a} \cdot \frac{2(ap+2b)}{(a+b)(2+p)} \cdot \frac{3\big(ap+b(p+2)\big)}{(a+2b)(2+2p)} \cdot \frac{4\big(ap+b(2p+2)\big)}{(a+3b)(2+3p)} \text{ ecc.}$$
$$+ \frac{p}{3a} \cdot \frac{2(ap+3b)}{(a+b)(3+p)} \cdot \frac{3\big(ap+b(p+3)\big)}{(a+2b)(3+2p)} \cdot \frac{4\big(ap+b(2p+3)\big)}{(a+3b)(3+3p)} \text{ ecc.}$$
$$+ \text{ ecc.} \ldots\ldots\ldots (B)$$

RISOLUZIONE.

Se si metta x, esponente ordinario de' termini, in luogo di m nell' equazione (*P*) *del II Teorema*, è manifesto, che sostituendo nel prodotto infinito i numeri naturali successivamente in luogo di x, ne risulta la serie (*B*), di cui la formula

$$\int z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p:p}}$$

sarà necessariamente il termine generale. Posto ciò, si metta questa formula sotto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p:p}}}{1-(1-z^b)^{1:p}} - \int \frac{z^{a-1} dz (1-z^b)^{\overline{x-p+1:p}}}{1-(1-z^b)^{1:p}}$$

e, posta poi l' unità in luogo di x nel primo termine, se si sottraga il secondo termine dalla quantità risultante, l' espressione, che segue

$$\int \frac{z^{a-1} dz (1-z^b)^{(1-p):p} \left(1-(1-z^b)^{x:p}\right)}{1-(1-z^b)^{1:p}}$$

farà la somma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XXXV.

Sommare la serie (M)

$$\frac{p}{m} \cdot \frac{2(p+bm)}{(1+b)(m+p)} \cdot \frac{3(p+b(m+p))}{(1+2b)(m+2p)} \cdot \frac{4(p+b(m+2p))}{(1+3b)(m+3p)} \text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{2m} \cdot \frac{2(2p+bm)}{(2+b)(m+p)} \cdot \frac{3(2p+b(m+p))}{(2+2b)(m+2p)} \cdot \frac{4(2p+b(m+2p))}{(2+3b)(m+3p)} \text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{3m} \cdot \frac{2(3p+bm)}{(3+b)(m+p)} \cdot \frac{3(3p+b(m+p))}{(3+2b)(m+2p)} \cdot \frac{4(3p+b(m+2p))}{(3+3b)(m+3p)} \text{ ecc.}$$

. . . . (M)

RISOLUZIONE.

Si ponga x in luogo di a nell'equazione (P) del *II. Teorema*. E' manifesto, che l'espressione

$$\int z^{x-1} dz (1-z^b)^{(m-p):p}$$

farà il termine generale della serie (M). Il si metta pertanto sotto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{x-1} dz (1-z^b)^{(m-p):p}}{1-z} - \int \frac{z^x dz (1-z^b)^{(m-p):p}}{1-z}$$

e, procedendo come nella Proposizione antecedente, si avrà l'espressione

$$\int \frac{dz (1-z^x)(1-z^b)^{(m-p):p}}{1-z}$$

La quale, nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione, farà la somma generale dimandata. Il che ecc.

COROLLARIO II.

Con queſto metodo ſi potranno convertire in ſerie i prodotti infiniti degli Eſempj I, II, III, IV del calcolo integrale ſopraccitato *Vol. I. pag.* 265, ed altri ſenza numero, ſubordinandoli a queſta claſſe, e determinando col noſtro metodo le ſomme a parte a parte.

PROBLEMA XXXVI.

Sommare la ſerie (I)

$$\frac{p}{(f+g)(p+q+r)} \cdot \frac{2\left(p(f+g)+b(p+q+r)\right)}{(f+g+b)(2p+q+r)} \cdot \frac{3\left(p(f+g)+b(2p+q+r)\right)}{(f+g+2b)(3p+q+r)} \text{ ecc.}$$

$$+\frac{p}{(f+2g)(p+q+2r)} \cdot \frac{2\left(p(f+2g)+b(p+q+2r)\right)}{(f+2g+b)(2p+q+2r)} \cdot \frac{3\left(p(f+2g)+b(2p+q+2r)\right)}{(f+2g+2b)(3p+q+2r)} \text{ ecc.}$$

$$\ldots\ldots\ldots (I)$$

RISOLUZIONE.

Si metta $f+gx$ in luogo di a nell'equazione (P) del II Teorema, $p+q+rx$ in luogo di m. Il prodotto infinito, ſoſtituendo ſucceſſivamente i numeri naturali in luogo di x, darà la ſerie (I), e l'eſpreſſione

$$\int z^{f+gx-1} dz\left(1-z^{b}\right)^{(q+rx):p}$$

ſarà il ſuo termine generale. Gli ſi dia pertanto la forma differenziale

$$\int \frac{z^{f+gx-1} dz\left(1-z^{b}\right)^{(q+rx):p}}{1-z^{g}(1-z^{b})^{r:p}} - \int \frac{z^{(f+g(x+1)-1} dz(1-z^{b})^{\left(q+r(x+1)\right):p}}{1-z^{g}(1-z^{b})^{r:p}}$$

e ſoſtituendo l'unità in luogo di x nel primo termine,

si sottragga il secondo dalla quantità, che ne risulta; sarà la formula

$$\int \frac{z^{f+g-1}dz(1-z^b)^{(q+r):p}\left(1-z^{gx}(1-z^b)^{rx:p}\right)}{1-z^g(1-z^b)^{r:p}}$$

la somma generale della serie (I) nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione. Il che ecc.

TEOREMA IV.

Nel caso di $z=1$ *dopo l'integrazione*

$$\int z^{\mu-1}dz(1-z)^{\omega-1}=\int z^{\omega-1}dz(1-z)^{\mu-1}$$

DIMOSTRAZIONE.

E' dimostrato dal Sig. *Eulero*, che in questo caso

$$\int z^{m-1}dz(1-z^n)^{(K-n):n}=\int z^{k-1}dz(1-z^n)^{(m-n):n}$$

(*ved. il calc. integr. T. 5 pag. 262*). Si faccia $K:n=\mu$, $m:n=\omega$. Sarà stessamente

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1}=\int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1}$$

Ma

$$\int z^{m-1}dz\left(1-z^n\right)^{\mu-1}=\frac{1}{n}\int z^{m:n-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

$$\int z^{K-1}dz\left(1-z^n\right)^{\omega-1}=\frac{1}{n}\int z^{K:n-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1}$$

per ciò che abbiamo dimostrato nel I Teorema. Rimettendo dunque i valori $K:n$, $m:n$, sarà evidentemente nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione

$$\int z^{\mu-1}dz\left(1-z\right)^{\omega-1}=\int z^{\omega-1}dz\left(1-z\right)^{\mu-1}$$

Il che ecc.

PROBLEMA XXXVII.

Sommare la ferie (M)

$$\frac{f(a+p)}{a(f+p)} \cdot \frac{(p+f)(a+2p)}{(a+p)(f+2p)} \cdot \frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+3p)} \cdot \text{ecc.}$$

$$+ \frac{f(a+2p)}{a(f+2p)} \cdot \frac{(p+f)(a+3p)}{(a+p)(f+3p)} \cdot \frac{(p+2f)(a+3p)}{(a+2p)(f+4p)} \text{ ecc.}$$

$+$ ecc. . . . . (M)

Risoluzione.

Si ponga px in luogo di m, e di q nell' equazione ($\mathfrak{Q}$) del III Teorema; il prodotto infinito con la sostituzione successiva de' numeri naturali in luogo di x darà la ferie (M), di cui farà per conseguenza termine generale la formula (S)

$$\frac{\int z^{a-1} dz (1-z^p)^{x-1}}{\int z^{f-1} dz (1-z^p)^{x-1}} \quad \dots\dots (S)$$

Ma l' espressione (S) pel *I Coroll. del Teor. I* si cangia nell' espressione (T)

$$\frac{\int z^{a:p-1} dz (1-z)^{x-1}}{\int z^{f:p-1} dz (1-z)^{x-1}} \quad \dots\dots (T)$$

Si metta per tanto (T) sotto la forma differenziale

$$\frac{(a-p)\int z^{a:p-2} dz(1-z)^{x-1}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1} dz(1-z)^{x-1}} - \frac{(a-p)\int z^{a:p-2} dz(1-z)^{x}}{(a-f-p)\int z^{f:p-1} dz(1-z)^{x}}$$

(*veggasi il II Teorema del Cap. VI*), e fatte le stesse operazioni della Prop. XXII, farà

$$-\frac{\int z^{a:p-2}\, dz(1-z)^{x}}{\int z^{f:p-2}\, dz(1-z)^{x}}$$

la ſomma generale della ſerie (M). Il che ecc.

Corollario III.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe la ſomma della ſerie di cui

$$(M) \ldots \frac{\int z^{x-1}\, dz(1-z)^{m-1}}{\int z^{x-1}\, dz(1-z)^{q-1}} = \frac{q(m+x)(1+x)(1+q)(m+x+1)}{m(q+x)(1+x)(1+m)(q+x+1)} \cdot \frac{(1+2x)(2+q)(m+x+2)}{(2+x)(2+m)(q+x+2)} \cdot \frac{(1+3x)(3+q)(m+x+3)}{(3+x)(3+m)(q+x+3)} \text{ ecc.}$$

è il termine generale. Imperciocchè, eſſendoſi dimoſtrato, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, l' eſpreſſione

$$(M) = \frac{\int z^{m-1}\, dz(1-z)^{x-1}}{\int z^{q-1}\, dz(1-z)^{x-1}} \text{ (IV Teor.)},$$

la ſomma della ſerie ſi riduce agevolmente a quella della Prop. antecedente.

Scolio.

Queſta Claſſe di ſerie è ſuſcettibile di grandiſſima ampliazione. E molto vi avrebbe da oſſervare ravvicinandola a quella de' fattori creſcenti. Non vo' per altro occuparmivi preſentemente di più, e mi fo a prendere per mano un altr' ordine di ſerie anologhe, le quali hanno per termini ſerie infinite, di valore per altro finito, al par de' prodotti infiniti, ma traſcendente.

CAPITOLO NONO

DELLE SERIE A TERMINI TRASCENDENTI.

PROBLEMA XXXVIII.

Sommare la ſerie (A)

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\text{ecc.}$$
$$+1-\frac{2}{2^2}+\frac{2^2}{3^3}-\frac{2^3}{4^4}+\text{ecc.}$$
$$+1-\frac{3}{2^2}+\frac{3^2}{3^3}-\frac{3^3}{4^4}+\text{ecc.}$$
$$+\text{ecc.}\ \ldots\ldots\ (A)$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo dimoſtrato (*Calc. Integr. di Eulero T. I pag.* 144.) che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int z^{xz}dz=1-\frac{x}{2^2}+\frac{x^2}{3^3}-\frac{x^3}{4^4}+\text{ecc.}$$

è manifeſto, che l' integrale ſviluppato ſomminiſtra la ſerie (A) con la ſoſtituzione ſucceſſiva de' numeri naturali in luogo di x, oppur anche la ſerie (A')

$$\int z^z dz+\int z^{2z}dz+\int z^{3z}dz+\text{ecc.}\ \ldots\ (A')$$

che ha $\int z^{xz}dz$ per termine generale.

Poſto ciò, ſi metta queſto termine generale ſotto la forma differenziale

$$\int\frac{z^{xz}dz}{1-z^z}-\int\frac{z^{z(x+1)}dz}{1-z^z}$$

e ſi ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel primo termi-

ne. Si prenda la differenza tra il secondo termine, e la quantità $\int \frac{z^{z} dz}{1-z^{z}}$ che ne risulta; sarà ella

$$\int \frac{z^{z} dz (1-z^{xz})}{1-z^{z}}$$

ed esprimerà nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, la somma generale della serie (A), e generalmente la somma generale della serie (A'). Il che ecc.

PROBLEMA XXXIX.

Sommare la serie (B)

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+2)^{2}} - \frac{1}{(m+3)^{3}} - \frac{1}{(m+4)^{4}} + \text{ecc.}$$
$$+ \frac{1}{m+1} - \frac{2}{(m+2)^{2}} - \frac{2^{2}}{(m+3)^{3}} - \frac{2^{3}}{(m+4)^{4}} + \text{ecc.}$$
$$+ \frac{1}{m+1} - \frac{3}{(m+2)^{2}} - \frac{3^{2}}{(m+3)^{3}} - \frac{3^{3}}{(m+4)^{4}} + \text{ecc.}$$
$$+ \text{ecc.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B)$$

RISOLUZIONE.

Essendo dimostrato nel medesimo luogo, che nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione,

$$\int z^{xz} z^{m} dz = \frac{1}{m+1} - \frac{x}{(m+2)^{2}} + \frac{x^{2}}{(m+3)^{3}} - \frac{x^{3}}{(m+4)^{4}} + \text{ecc.}$$

purchè non sia m quantità negativa, sarà quest' espressione il termine generale della serie (B), oppure della serie (B')

$$\int z^{z+m} dz + \int z^{2z+m} dz + \int z^{3z+m} dz + \text{ecc.}$$
$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (B')$$

Si dia pertanto alla formula integrale la forma differenziale

$$\int \frac{z^{xz} z^m dz}{1 - z^z} - \int \frac{z^{z(x+1)} z^m dz}{1 - z^z}$$

Con un' operazione simile all' antecedente si ricaverà l' espressione

$$\int \frac{z^z z^m dz (1 - z^{xz})}{1 - z^z}$$

che sarà la somma generale della serie (B) nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione, e generalmente della serie (B'). Il che ecc.

PROBLEMA XL.

Sommare la serie (A)

$$\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{(3p-1)^2} + \frac{1}{(3p+1)^2} + \frac{1}{(5p-1)^2} + \frac{1}{(5p+1)^2} + \text{ecc.}$$
$$+ \frac{1}{(p-2)^2} + \frac{1}{(p+2)^2} + \frac{1}{(3p-2)^2} + \frac{1}{(3p+2)^2} + \frac{1}{(5q-2)^2}$$
$+$ ecc. . . . . . (A)

RISOLUSIONE.

E' dimostrato nel *XIX Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*, che nel caso di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{p-x} + z^{p+x}}{z^{2p} - 1} \cdot \frac{dz l.z}{z} = \frac{\pi^2}{4p^2 \operatorname{cos.} \pi x^2 : 2p} =$$

$$\frac{1}{(p-x)^2} + \frac{1}{(p+x)^2} + \frac{1}{(3p-x)^2} + \frac{1}{(3p+x)^2} + \text{ecc.}$$

essendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Per conseguenza ciascheduna di queste espressioni è il termine generale della serie (A), e parimenti delle serie (A'), (A''), facendo $\pi : 2p = \Delta$

$$\int \frac{z^{p-1}+z^{p+1}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz l.z}{z} + \int \frac{z^{p-2}+z^{p+2}}{z^{2p}-1} \cdot \frac{dz l.z}{z}$$

$+$ ecc. . . . . (A')

$$\Delta^2 \left(\frac{1}{\text{cos}.\ \Delta} + \frac{1}{\text{cos}.\ 4\Delta} + \frac{1}{\text{cos}.\ 9\Delta} + \text{ecc.} \right) \ldots\ldots (A)$$

Posto ciò si metta l' espressione integrale sotto la forma differenziale, che segue

$$(1) \int \frac{z^{p-x-1} dz.\ l.\ z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} - (2) \int \frac{z^{p-x-2} dz.\ l.\ z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)}$$

$$(3) \int \frac{z^{p+x-1} dz.\ l.\ z}{(1-z)(z^{2p}-1)} - (4) \int \frac{z^{p+x} dz..\ l.\ z}{(1-z)(z^{2p}-1)}$$

Si sostituisca poi l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e si sottraggano rispettivamente dalle quantità risultanti li termini (2), (4). Sarà l' espressione

$$\int \frac{z^{p-2}(1-z^{-x})dz.\ l.\ z}{(1-\frac{1}{z})(z^{2p}-1)} + \int \frac{z^{p}(1-z^{x})dz.\ l.\ z}{(1-z)(z^{2p}-1)} =$$

$$\int z^p dz\, l.\ z \left(\frac{(1-z^{-x-1})(1-z^{x})}{(1-z)(z^{2p}-1)} \right)$$

la somma generale ricercata delle serie (A), (A'') nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione, e generalmente della serie (A'). Il che ecc.

PROBLEMA XLI.

Sommare la serie (A)

$$1 + \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3p-1} - \text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}+\frac{1}{2p-2}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}-\text{ecc.}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(A)$$

RISOLUZIONE.

Essendo nel medesimo Volume dimostrato, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{x-1}+z^{p-x-1})dz}{1+z^p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{p-x}-\frac{1}{p+x}-\frac{1}{2p-x}+\frac{1}{2p+x}+\text{ecc.}$$

quest' espressione sarà il termine generale della serie (A). Si metta pertanto la formula integrale sotto la forma differenziale, che segue

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x})dz}{(1-z)(1+z^p)}-\int\frac{(z^{x}-z^{p-x-1})dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

e, sostituita l' unità in luogo di x nel primo membro, si sottragga il secondo dalla quantità, che ne risulta; sarà l' espressione

$$\int\frac{(1+z^{p-x-1})(1-z^{x})dz}{(1-z)(1+z^p)}$$

la somma Generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA XLII.

Sommare la serie

$$1-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2p-1}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{3p-1}+\frac{1}{3p+1}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{2}-\frac{1}{p-2}+\frac{1}{p+2}-\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{2p+2}-\frac{1}{3p-2}+\frac{1}{3p+2}-\text{ecc.}$$

$$+\frac{1}{3}-\frac{1}{p-3}+\frac{1}{p+3}-\text{ecc.}$$

RISOLUZIONE.

E' dimoſtrato nel medeſimo Volume, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x-1})dz}{1-z^p}=\frac{1}{x}-\frac{1}{p-x}+\frac{1}{p+x}-\frac{1}{2p-x}+\frac{1}{2p+x}-\text{ecc.}$$

Dunque, eſſendo queſt' eſpreſſione integrale in tal caſo il termine generale della ſerie propoſta, la ſi metta ſotto la forma differenziale

$$\int\frac{(z^{x-1}-z^{p-x})dz}{(1-z)(1-z^p)}-\int\frac{(z^{x}-z^{p-x-1})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

e operando come nella Prop. antecedente, ſi troverà, che l' eſpreſſione

$$\int\frac{(1-z^{p-x-1})(1-z^{x})dz}{(1-z)(1-z^p)}$$

ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

CAPITOLO DECIMO.

DELLE SERIE DIRETTE E RECIPROCHE DE' SENI, CO-SENI, TANGENTI, E CO-TANGENTI.

LE ſerie dirette, che hanno per termini potenze ſimili di ſeni, e coſeni d' archi che formano tra di sè una progreſſione Aritmetica, ſono ſtate più d' una volta preſe per mano da' Geometri (*Vegg. il Signor* Euler *nell' Introd. all' anal. degl' Inf.*, *il Sig.* Boſſut *nelle Mem. della Soc. Reale per l' anno* 1769, *e li Signori* Bernoulli *e* Lexel *nel XVIII. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob.*). Ma non ſi ſono ancora laſciate ridurre le potenze ſimili delle tangenti, e delle co-tangenti; e

molto meno poi tutta la classe reciproca di quelle e di queste. Avendo pertanto allo stesso metodo soggettate le une e le altre, e le loro reciproche, mi lusingo di far cosa grata a' Geometri accoppiando agli altri anche questo importante ramo della teoria delle serie.

TEOREMI.

Se a rappresenti un Arco di cerchio che ha l' unità per raggio, dico, che

I. $2\,\text{Cos}.\ xa\ \text{sen}.\ xa = \text{sen}.\ 2xa$

II. $\text{Sen}.(x+1)a + \text{sen}.(x-1)a = 2\ \text{cos}.a\ \text{sen}.xa$

III. $\text{Sen}.(x+1)a - \text{sen}.(x-1)a = 2\ \text{cos}.xa\ \text{sen}.a$

IV. $\text{Sen}.(2x+1)a + \text{sen}.a = 2\ \text{cos}.xa\ \text{sen}.(x+1)a$

V. $\text{Sen}.(2x-1)a + \text{sen}.a = 2\ \text{cos}.(x-1)a\ \text{sen}.xa$

VI. $e^{nx} = (\text{cos}.a + \sqrt{-1}\ \text{sen}.a)^x$, se sia e la base de' logaritmi Iperbolici, $n = a\sqrt{-1}$.

VII. $e^{-nx} = (\text{cos}.a - \sqrt{-1}\ \text{sen}.a)^x$

Tutti questi Teoremi si dimostrano agevolmente con le regole cognite del calcolo de' seni e co-seni.

PROBLEMA XLIII.

Trovare la forma differenziale dell' espressione sen. xa.

Risoluzione.

Essendo $2\ \text{cos}.xa\ \text{sen}.xa = \text{sen}.2xa$ (*Teor. I.*); si moltiplichi quest' equazione per sen. a; sarà

$$2\ \text{sen}.xa\ \text{cos}.xa\ \text{sen}.a = \text{sen}.a\ \text{sen}.2xa;$$

ma pel III. Teorema

$$2\ \text{cos}.xa\ \text{sen}.a = \text{sen}.(x+1)a - \text{sen}.(x-1)a.$$

Per conseguenza, mettendo $a{:}2$ in luogo di a, si avrà

$$\frac{\text{sen.}\left(\frac{x+1}{2}\right) a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen. } a:2} - \frac{\text{sen.}\left(\frac{x-1}{2}\right) a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen. } 2:a} = \text{sen. } xa$$

Il che ecc.

Altrimenti.

Essendo sen. $(x+1)a+$sen. $(x-1)a = 2$ cos. a sen. xa, pel II. Teorema, si aggiunga da ambe le parti 2 sen. $xa +$ sen. a; si avrà

$$\text{sen.}a+2\text{sen.}xa-\text{sen.}(x+1)a-\text{sen.}(x-1)a=2\text{sen.}xa(1-\text{cos.}a)+\text{sen.}a$$

Per conseguenza

$$\frac{\text{sen.}a+\text{sen.}xa-\text{sen.}(x+1)a}{2-2\text{cos.}a} - \frac{\text{sen.}a+\text{sen.}(x-1)a-\text{sen.}xa}{2-2\text{ cos. }a}=\text{sen.}xa.$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLIV.

Trovare la forma differenziale dell' espressione cos. xa

RISOLUZIONE.

Poichè pel III. Teorema

$$2 \text{ cos. } xa\,\text{sen. } a = \text{sen. } (x+1)\, a - \text{sen. } (x-1)\, a$$

si metta $2x$ in luogo di x, e si aggiunga da ambe le parti sen. a. Si avrà

$$\text{sen.}a+2\text{cos.}2xa\text{sen.}a=\text{sen. }(2x+1)\, a-\text{sen. }(2x-1)\, a+\text{sen.}a;$$

Ma

sen. $(2x+1)a+$ sen. $a=2$cos. xa sen. $(x-1)$ a (*IV Teorema*)

sen. $(2x-1)a +$ sen. $a = 2$cos.$(x-1)$ a sen.xa (*V Teorema*)

Dunque, ponendo $a:2$ in luogo di a, sarà

$$\frac{\text{cos.}\frac{xa}{2}\text{ sen. }\left(\frac{1+x}{2}\right)a}{\text{sen. } a:2} - \frac{\text{cos.}\left(\frac{x-1}{2}\right) a\,\text{sen.}\frac{xa}{2}}{\text{sen. } a:2} = \text{cos. } xa$$

Il che ecc.

PROBLEMA XLV.

Sommare la ſerie (A)
ſen. a + ſen. $2a$ + ſen. $3a$ + ecc. . . . . . . ſen. xa . . . . (A)

Risoluzione.

Eſſendo ſen. xa il termine generale della ſerie (A), il ſi metta ſotto la forma differenziale trovata poco fa (*Prop. XLIII.*)

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2} - \frac{\text{ſen.}\left(\frac{x-1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2}$$

Si ſoſtituiſca l'unità in luogo di x nel ſecondo termine. Ma l'eſpreſſione ſvaniſce a cagione di $0a = 0$. Non reſtando dunque che il primo termine

$$\frac{\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2}$$

ſarà egli neceſſariamente la ſomma generale della ſerie (A). Il che ecc.

PROBLEMA XLVI.

Sommare la ſerie (B),
1 + coſ. a + coſ. $2a$ + coſ. $3a$ + ecc. . . . . . coſ. xa . . . . (B)

Risoluzione.

Si metta il termine generale xa della ſerie ſotto la forma differenziale trovata nella Prop. XLIV.

$$\frac{\text{coſ.}\frac{xa}{2}\,\text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{ſen.}\,a:2} - \frac{\text{coſ.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a\,\text{ſen.}\frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\,a:2}$$

e ſi faccia $x=0$ nel ſecondo termine, perchè il primo termine della ſerie è l'unità, e non potrebbe egli riſultare da coſ. xa, ſe non ſi cominciaſſe la ſoſtituzione de' numeri naturali in luogo di x da $x=0$. Reſtando pertanto il ſolo primo termine di queſta eſpreſſione

$$\frac{\text{coſ.}\ \frac{xa}{2}\ \text{ſen.}\left(\frac{x+1}{2}\right)a}{\text{ſen.}\ a:2}$$

ſarà egli la ſomma generale della ſerie (B). Il che ecc.

Corollario I.

Nello ſteſſo modo ſi troverebbe

$$\frac{\text{coſ.}\left(\frac{1+x}{2}\right)a\ \text{ſen.}\ \frac{xa}{2}}{\text{ſen.}\ a:2}$$

per la ſomma generale della ſerie

$$\text{coſ.}\ a+\text{coſ.}\ 2a+\text{coſ.}\ 3a\ \text{ecc.}$$

Corollario II.

Queſte due Propoſizioni ſono veramente fondamentali in queſta teoria, ſiccome quelle alle quali ſi riducono le ſomme d'altre ſerie di ſeni, e coſeni più composte. Di fatto

I.

Se ſi abbia la ſerie

(A)...$\text{coſ.}a\ \text{coſ.}b+\text{coſ.}2a\ \text{coſ.}2b+\text{coſ.}3a\ \text{coſ.}3b\ldots+\text{coſ.}xa\ \text{coſ.}xb$,

poichè $\text{coſ.}\ xa\ \text{coſ.}\ xb=\frac{\text{coſ.}\ x(a-b)+\text{coſ.}\ x(a+b)}{2}$

per la teoria de' ſeni, e coſeni, ella ſi traſformerà nelle due ſeguenti

$$\frac{\text{cof.}\,(a-b) + \text{cof.}\,2\,(a-b) + \text{cof.}\,3\,(a-b) \ldots + \text{cof.}\,x(a-b)}{2}$$

$$+ \frac{\text{cof.}\,(a+) + \text{cof.}\,2(a+b) + \text{cof.}\,3\,(a+b) \ldots \text{cof.}\,x\,(a+b)}{2}$$

ognuna delle quali è fommabile pel Corollario I. della Propofizione antecedente.

II.

Similmente trattandofi di fommare la ferie fen. a fen. b + fen. $2a$ fen. $2b$ + ecc. . . . . . fen. xa fen. xb, poichè ella è reducibile alle due

$$\frac{\text{cof.}\,(a-b) + \text{cof.}\,2(a-b) + \text{ecc.}}{2}$$

$$- \frac{\text{cof.}\,(a+b) + \text{cof.}\,2(a+b) + \text{ecc.}}{2}$$

potrà nello fteffo modo fommarfi agevolmente.

III.

Parimenti effendo propofta la ferie

(B) . . . fen. a cof. b + fen. $2a$ cof. $2b$ + ecc. . . . fen. xa cof. xb fi potrà fenza difficoltà determinarne la fomma. Imperciocchè, effendo

$$\text{fen.}\,xa\,\text{cof.}\,xb = \frac{\text{fen.}\,x\,(a+b) + \text{fen.}\,x\,(a-b)}{2}$$

La ferie (B) fi trasforma nelle due

fen. $(a+b)$ + fen. $2(a+b)$ + ecc. . . . . . fen. $x(a+b)$
+ fen. $(a-b)$ + fen. $2(a-b)$ + ecc. . . . . . fen. $x(a-b)$
ciafcheduna delle quali è fommabile per la Prop. XLV.

IV.

Di più cogli fteffi fondamenti fi poffono fommare le ferie

le ſerie di ſeni, e coſeni d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia progreſſione aritmetica $p+qx$, come ſono le ſerie (C), (D)

$(C) \ldots$ ſen. $(p+q)\,a +$ ſen. $(p+2q)\,a +$ ecc. $\ldots\ldots$ ſen. $(p+qx)\,a$

$(D) \ldots$ coſ. $(p+q)\,a +$ coſ. $(p+2q)\,a +$ ecc. $\ldots\ldots$ coſ. $(p+qx)\,a$

Imperciocchè, eſſendo

ſen. $(p+qx)\,a =$ ſen. pa coſ. $xqa +$ coſ. pa ſen. xqa

Se ſi ſvolgano in ſerie i due Termini generali, ſi traſformerà la ſerie (C) nelle due

ſen. pa (coſ. $qa +$ coſ. $2qa +$ coſ. $3qa \ldots\ldots$ coſ. xqa)

$+$ coſ. pa (ſen. $qa +$ ſen. $2qa +$ ſen. $3qa \ldots\ldots$ ſen. xqa)

le quali ſi poſſono ſommare per le Prop. precedenti. Lo ſteſſo accaderà della ſerie (D), la quale potrà agevolmente ridurſi a ſerie ſommabili per le medeſime propoſizioni.

SCOLIO.

Non ſarebbe difficile coſa il ſommare con lo ſteſſo metodo le ſerie

ſen.$^m\,a +$ ſen.$^m\,2a +$ ſen.$^m\,3a \ldots\ldots$ ſen.$^m\,xa$

coſ.$^m\,a +$ coſ.$^m\,2a +$ coſ.$^m\,3a \ldots\ldots$ coſ.$^m\,xa$

mettendo ſucceſſivamente i numeri naturali in luogo di m, come appunto hanno fatto gli autori ſopraccitati. Ma avendo oſſervato che non traeva alcun vantaggio da' caſi particolari, onde poggiare alla ſoluzione generale, l' ho cercata direttamente.

Una felice ſoſtituzione non ha reſo inutili i miei sforzi, e in tal guiſa abbiamo per un' altra via la ſoluzione generale del Problema.

PROBLEMA XLVII.

Sommare generalmente la ſerie (I)

ſen.$^m\,a +$ ſen.$^m\,2a +$ ſen.$^m\,3a +$ ecc. $\ldots\ldots$ ſen.$^m\,xa \ldots\ldots (I)$

Risoluzione.

Poichè

$$\text{fen.}^m xa = \left(\frac{(\text{cof.}\, a + \sqrt{(-1)}\,\text{fen.}\, a)^x - (\text{cof.}\, a - \sqrt{(-1)}\,\text{fen.}\, a)^x}{2\sqrt{(-1)}} \right)^m$$

ed è $e^{xa\sqrt{(-1)}} = e^{nx} = (\text{cof.}\, a + \sqrt{(-1)}\,\text{fen.}\, a)^x$ (*VI Teorema*)

$e^{-xa\sqrt{(-1)}} = e^{-nx} = (\text{cof.}\, a - \sqrt{(-1)}\,\text{fen.}\, a)^x$ (*VII Teorema*)

il termine generale $\text{fen.}^m xa$ prende manifeſtamente la ſeguente forma

$$(e^{nx} - e^{-nx})^m : (2\sqrt{(-1)})^m \,\ldots\ldots (M)$$

Si alzi queſto binomio alla potenza m. Il termine generale della ſerie (I) diverrà l' eſpreſſione

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m} \left(e^{mnx} - \frac{m}{1} e^{(m-2)nx} + \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)nx} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} e^{(m-6)nx} + \text{ecc.} \right)$$

compoſta di $m+1$ termini generali ſempliciſſimi. Se dunque $S.A$ rappreſenti la ſomma generale di una ſerie, di cui A è il termine generale ſi troverà, ricorrendo alla Prop. IV del III Cap.,

$$S.\, e^{mnx} = \frac{e^{mn}}{e^{mn} - 1} (e^{mnx} - 1)$$

$$S.\, \frac{m}{1} e^{(m-2)nx} = \frac{m e^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n} - 1} (e^{(m-2)nx} - 1)$$

$$S.\, \frac{m(m-1)}{1.2} e^{(m-4)nx} = \frac{m(m-1) e^{(m-4)n}}{1.2 (e^{(m-4)n} - 1)} (e^{(m-4)nx} - 1)$$

ecc. e però generalmente, unendo inſieme tutte queſte ſomme particolari, ſarà l' eſpreſſione ſeguente

$$\frac{1}{(2\sqrt{(-1)})^m}\left(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}(e^{mnx}-1)-\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}(e^{(m-2)nx}-1)\right.$$

$$+\frac{m(m-1)\,e^{(m-4)n}}{1.2(e^{(m-4)n}-1)}(e^{(m-4)nx}-1)$$

$$\left.-\frac{m(m-1)(m-2)\,e^{(m-6)n}}{1.2.3\,(e^{(m-6)n}-1)}(e^{(m-6)nx}-1)+\text{ecc.}\right)$$

la somma generale della serie (I). Il che ecc.

COROLLARIO.

Essendo manifesta la legge di questa formula generale, non resta, che sostituire i valori convenienti ne' casi particolari, senza che il si faccia qui togliendo all' espressione la somma semplicità, ond' è dotata.

PROBLEMA XLVIII.

Sommare la serie (I)

$$\text{cos.}^m a+\text{cos.}^m 2a+\text{cos.}^m 3a+\text{ecc.}\ldots\ldots\text{cos.}^m xa\ldots\ldots(I)$$

RISOLUZIONE.

Essendo

$$\text{cos.}^m xa=\frac{1}{2^m}\left((\text{cos.}a+\sqrt{(-1)}\text{sen.}a)^x+(\text{cos.}a-\sqrt{(-1)}\text{sen.}a)^x\right)^m,$$

il termine generale della serie (I) prende la seguente forma

$$(e^{nx}+e^{-nx})^m:2^m$$

per le sostituzioni usate nella Prop. antecedente.

Dunque, alzata quest' espressione alla potestà m, e prese insieme le somme de' termini generali risultanti da quest' evoluzione, si perverrà, come precedentemente, alla formula che segue

$$\frac{1}{2^m}\Big(\frac{e^{mn}}{e^{mn}-1}(e^{mnx}-1)+\frac{me^{(m-2)n}}{e^{(m-2)n}-1}(e^{(m-2)nx}-1)$$

$$+\frac{m(m-1)e^{(m-4)n}}{1.2(e^{(m-4)n}-1)}(e^{(m-4)nx}-1)$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)e^{(m-6)n}}{1.2.3(e^{(m-6)n}-1)}(e^{(m-6)nx}-1)+\text{ecc.}\ldots\Big)$$

la quale sarà la somma generale della serie (I). Il che ecc.

COROLLARIO II.

Ma havvi ancora una generalità più grande, che può darsi a queste soluzioni, proponendosi di sommare le serie

(A)..sen.$^m(p+q)a$+sen.$^m(p+2q)a$+sen.$^m(p+3q)a$+ecc..sen.$^m(p+qx)a$
(B)..cos.$^m(p+q)a$+cos.$^m(p+2q)a$+cos.$^m(p+3q)a$+ecc..cos.$^m(p+qx)a$
Imperciocchè col mezzo delle sostituzioni praticate nelle due Prop. antecedenti i termini generali di queste due serie prendono le seguenti forme

$$\left(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+q)}\right)^m:\left(2\sqrt{(-1)}\right)^m,$$
$$\left(e^{n(p+qx)}-e^{-n(p+qx)}\right)^m:2^m$$

e però svolgendole, e sommando le serie parziali, come s' è fatto precedentemente, si può agevolmente definire cogli aggregati di queste somme particolari le somme generali delle proposte serie (A), (B).

PROBLEMA XLIX.

Sommare la ſerie (*A*)

tang. a + tang. $2a$ + tang. $3a$ + ecc.... tang. xa .... (*A*)

RISOLUZIONE.

E' dimoſtrato nel *XIX. Vol. de' nuovi Com. di S. Pietrob. pag.* 5. che nel caſo di $z = 1$ dopo l' integrazione

$$\int \frac{z^{p-x} - z^{p+x}}{1 - z^{2p}} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{\pi}{2p} \text{ tang. } \frac{\pi x}{2p}$$

eſſendo π la circonferenza di un cerchio che ha l' unità per diametro. Si faccia pertanto Arc. $a = \frac{\pi}{2p}$.

Sarà

$$\frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a-x-1} - z^{\pi:2a+x-1}}{1 - z^{\pi:a}} \cdot dz = \text{tang. } xa \; \ldots . (N)$$

il termine generale della ſerie (A). Si metta ora l' eſpreſſione integrale (N) ſotto la forma differenziale, che ſegue

$$(1) \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a-x-1} dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})} - (2) \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a-x-2} dz}{(1-\frac{1}{z})(1-z^{\pi:a})}$$

$$(3) - \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a+x-1} dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})} + (4) \frac{1}{a} \int \frac{z^{\pi:2a+x} dz}{(1-z)(1-z^{\pi:a})}$$

e ſi ſoſtituiſca l' unità in luogo di x ne' termini (1), (3), e dalle quantità riſultanti ſi ſottraggano riſpettivamente i termini (2), (4). Si avranno le due formule

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-2}dz\left(1-z^{-x}\right)}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz\left(1-z^{x}\right)}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

la quali si riducono facilmente alla seguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}dz\left(1-z^{x}\right)\left(z^{-x-1}-1\right)}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

che sarà la somma generale della serie (A) nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA L.

Sommare la serie (M)

cot. a + cot. $2a$ + cot. $3a$ + ecc.... cot. xa.... (M)

Risoluzione.

Essendo dimostrato nel luogo citato qui innanzi, che nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{x-1}-z^{\pi:a-x-1}}{1-z^{\pi:a}}.dz=\text{cot.}\,xa$$

sarà quest' espressione integrale il termine generale della serie (M). La si metta dunque sotto la seguente forma differenziale

$$(1)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{x-1}dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}-(2)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{x}dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

$$-(3)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-x-1}dz}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}+(4)\,\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:a-x-2}dz}{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

e, fatte le operazioni della Prop. antecedente, si avrà l' espressione ridotta di questa forma

$$\frac{1}{a}\int\frac{\left(1-z^{\pi:a-x-1}\right)\left(1-z^{x}\right)dz}{(1-z)\left(1-z^{\pi:a}\right)}$$

che sarà la somma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LI.

Sommare la serie (A)

$\text{tang.}(p+q)a+\text{tang.}(p+2q)a+\text{tang.}(p+3q)a\ldots\ldots\text{tang.}(p+qx)a$

$\ldots\ldots\ldots (A)$

RISOLUZIONE.

Si ponga $p+qx$ in luogo di x nell' espressione integrale (N) della Prop. XLIX. Diverrà ella

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}-z^{\pi:2a+p+qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\text{tang.}(p+qx)a$$

nel caso di $z=1$ dopo l'integrazione; e però sarà questo il termine generale della serie (A).

Il si metta sotto la forma differenziale

$$(1)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}-(2)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx-q}}{\left(1-z^{-q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

$$-(3)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}+(4)\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx+q}}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle Prop. antecedenti, si avrà l'espressione ridotta

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}-z^{p+q})}{(1-z^{q})(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione ſarà la ſomma generale della propoſta ſerie (A). Il che ecc.

COROLLARIO III.

Nello ſteſſo modo ſi ſommerà la ſerie
$\cot.(p+q)a+\cot.(p+2q)a+\cot.(p+3q)a+$ ecc..... $\cot.(p+qx)a$

PROBLEMA LII.

Sommare la ſerie reciproca de' ſeni

$$\frac{1}{\text{ſen.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{ſen.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{ſen.}(p+3q)a}\,.....+\frac{1}{\text{ſen.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Egli è dimoſtrato nel medeſimo Volume, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{m}+z^{n-m}}{1+z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{ſen.}\frac{m\pi}{n}}$$

Si faccia pertanto $\frac{\pi}{n}=a$, $m=p+qx$; l' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{ſen.}(p+qx)a}$$

ſarà il termine generale della ſerie. Gli ſi dia perciò la ſeguente forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}-z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e posta l' unità in luogo di x nel primo membro, si sottragga il secondo dalla quantità che risulta da quella sostituzione. Sarà la formula

$$\frac{1}{a}\int\frac{(1-z^{qx})(z^{p+q}+z^{\pi:a-p-qx})}{(1-z^q)(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

la somma generale ricercata, nel caso di $z=1$ dopo l' integrazione. Il che ecc.

PROBLEMA LIII.

Sommare la serie reciproca de' Co-Seni

$$\frac{1}{\text{cos.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{cos.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{cos.}(p+3q)a}\cdots\frac{1}{\text{cos.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Se nell' espressione

$$\int\frac{z^x+z^{n-x}}{1+z^n}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\text{ sen.}\frac{\pi x}{n}}$$

da cui abbiamo tratto poco fa il termine generale della serie reciproca de' seni, si faccia $n=2p$, e si metta $p-x$ in luogo di x, si ha

$$\int\frac{z^{p-x}+z^{p+x}}{1+z^{2p}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{2p\text{ sen.}\frac{\pi(p-x)}{2p}};$$

Ma $\frac{\pi}{2p\text{ sen.}\frac{\pi(p-x)}{2p}}=\frac{\pi}{2p\text{ cos.}\frac{\pi x}{2p}}$. Dunque facendo $\frac{\pi}{2p}=a$ e ponendo $p+qx$ in luogo di x, si avrà

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a-p-qx}+z^{\pi:2a+p+qx}}{1+z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{cof.}\,(p+qx)a}$$

pel termine generale della propoſta ſerie.

Il ſi metta pertanto ſotto la forma differenziale

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx}-z^{\pi:2a-p-qx+-q}}{(1-z^{q})(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a+p+qx+-q}-z^{\pi:2a-p-q}}{(1-z^{q})(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come s' è fatto nella Prop. antecedente, ſi troverà l' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}(1-z^{qx})(z^{-p-qx}+z^{p+q})}{(1-z^{q})(1+z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

che ſarà la ſomma generale dimandata. Il che ecc.

PROBLEMA LIV.

Sommare la ſerie reciproca delle Tangenti

$$\frac{1}{\text{tang.}(p+q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+2q)a}+\frac{1}{\text{tang.}(p+3q)a}\dots\frac{1}{\text{tang.}(p+qx)a}$$

RISOLUZIONE.

Eſſendo nel medeſimo luogo dimoſtrato, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione

$$\int\frac{z^{x}-z^{n-x}}{1-z^{n}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{n\,\text{tang.}\,\frac{\pi x}{n}}$$

ſe ſi ponga a in luogo di $\frac{\pi}{n}$, $p+qx$ in luogo di x, ſi avrà il termine generale della ſerie ſotto queſta forma

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}-z^{\pi:a-p-qx}}{1-z^{\pi:a}}\cdot\frac{dz}{z}=\frac{1}{\text{tang.}\,(p+qx)a}$$

Gli ſi dia la forma differenziale ſeguente

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx}+z^{\pi:a-p-qx+q}}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}-\frac{1}{a}\int\frac{z^{p+qx+q}+z^{\pi:a-p-qx}}{(1-z^q)(1-z^{\pi:a})}\cdot\frac{dz}{z}$$

e operando, come nelle *Prop.* precedenti, ſi perverrà all' eſpreſſione

$$\frac{1}{a}\int\frac{\left(1-z^{qx}\right)\left(z^{p+q}-z^{\pi:a-p-qx}\right)}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

che, nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione, ſarà la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

PROBLEMA LV.

Sommare la ſerie reciproca delle Cotangenti

$$\frac{1}{\cot.(p+q)a}+\frac{1}{\cot.(p+2q)a}+\frac{1}{\cot.(p+3q)a}\ldots\frac{1}{\cot.(p+qx)a}$$

Risoluzione.

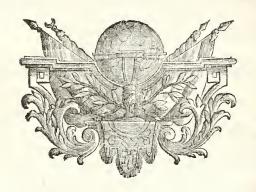
Eſſendo $\dfrac{\pi}{2p\cot.\dfrac{\pi x}{2p}}=\dfrac{\pi\,\text{tang.}\dfrac{\pi x}{2p}}{2p}$, è manifeſto, che

ſarà $\dfrac{1}{\cot.(p+qx)a}=\text{tang.}(p+qx)a$. Si ripigli pertanto la formula integrale della *Prop.* LI, che nel caſo di $z=1$ dopo l' integrazione eſprime la ſomma generale della ſerie, che ha per termine tang. $(p+qx)a$, cioè

$$\frac{1}{a}\int\frac{z^{\pi:2a}\left(1-z^{qx}\right)\left(z^{-p-qx}-z^{p+q}\right)}{\left(1-z^{q}\right)\left(1-z^{\pi:a}\right)}\cdot\frac{dz}{z}$$

Sarà ella la ſomma generale ricercata. Il che ecc.

S c o l i o.

Se i limiti di una Memoria il comportaſſero, non ſarebbe difficile coſa l' inoltrare queſta Teoria, e ſommare le ſerie de' prodotti, potenze, ed altre affezioni delle tangenti, e cotangenti d' archi procedenti ſecondo qualſivoglia aritmetica progreſſione. Ma ciò per ora baſti intorno alle ſerie in generale, non eſſendo impoſſibile, che cada in animo ad alcuno di ſtendere e compilare ſulle tracce di queſta Memoria non meno, che col fondamento de' Saggi moltiplici, che ſi trovano ſparſi nell' opere de' più illuſtri Geometri, un Trattato generale ſu queſt' ardua e importantiſſima Scienza delle Serie.

RICERCHE

Intorno al Calcolo Integrale dell' equazioni differenziali finite.

Del Sig. Anton-Mario Lorgna Direttore delle Scuole Militari di Verona.

SE una quantità variabile riceva una qualche variazione effettiva, è certo, che qualsivoglia funzione di quella variabile varia anch' essa nello stesso tempo. E siccome sottraendo dalla quantità variata la quantità primitiva, si ottiene l' incremento stesso o il decremento indotto nella quantità variabile; così dalla forma variata, qualunque ella siasi, sottraendo la funzione primitiva, si conseguisce la quantità della variazione incontrata dalla funzione variata. Le quantità pertanto, che risultano da queste sottrazioni, diconsi in generale differenze, e queste infinitamente piccole, se infinitamente piccolo è l' incremento o il decremento indotto nella variabile; e differenze finite, se di valore finito sia la variazione apportata alla variabile. Quindi i due rami elementari, uno di calcolo differenziale, onde trovare le differenze infinitesime, e le finite di qualsivoglia funzione d' una proposta variabile; e l'altro di calcolo integrale, ove si tratta dalle differenze infinitesime, e finite di rimontare alla funzione stessa, di cui elle sono le differenze. Ma come può avervi relazione tra due o più variabili espressa per equazioni, così può avervi del pari relazione tra le differenze di due o più variabili, ed equazioni differenziali esprimenti la ragione tra di sè delle varia-

zioni così infiniteſime come finite , indotte nelle funzioni per l' incremento o decremento ricevuto dalle variabili, delle quali ſono elle funzioni. Quindi di nuovo i due altri rami di calcolo differenziale per le variazioni infiniteſime e finite dell' equazioni finite ; e di calcolo integrale , onde trovare con la relazione data di queſte variazioni la relazione finita tra le variabili. Ancorchè nel Libro del Sig. *Moivre*, che ha per titolo (*Miſcellan. Analytica de Ser.*) , e più particolarmente nel Trattato delle Serie del Sig. *Stirling* , ſi trovino maneggiate equazioni a differenze finite , ben conſiderandone la natura , elle ſi riducono piuttoſto a differenziali ed integrali di ſemplici funzioni , di quello che al calcolo delle equazioni propriamente a due o più variabili, ch' è materia totalmente nuova. Lo ſteſſo può dirſi del calcolo intorno alle differenze finite , che ci ha dato l' immortale Sig. *Eulero* nelle ſue eccellenti Inſtituzioni, il quale tutto ſi aggira ſulle funzioni d' una variabile. L' epoca vera di queſto nuovo calcolo integrale dell' equazioni differenziali a differenze finite , e a più variabili è recentiſſima , dopo che il ſommo Geometra Sig. de la *Grange* pubblicò nel primo volume degli Atti della Società Reale di Torino un metodo nel 1759. di trattare la Teoria delle Serie ricorrenti dipendentemente dall' integrazione d' una ſorta di queſte equazioni a due variabili. Preſero in ſeguito diverſi illuſtri Geometri a coltivarlo ed eſtenderlo con dottiſſime ricerche , tra' quali ſi diſtinſero i Signori de la *Place*, de *Condorcet* , *Monge*, e di nuovo il Sig. de la *Grange* (*ſi veggano* il T. IV. delle Mem. della *Soc. R.* di Torino, li T. VI. VII. e IX. delle *Mem.* preſentate alla *Soc. R.* di Parigi , le Mem. della med. *Soc. R.* per gli anni 1769, 1770, 1771, e quelle della *R. Soc.* di Berlino per l' anno 1774) . Non è a mia cognizione che dopo queſti celebri uomini abbia fatto alcun altro progreſſi importanti in queſta materia . Al più il

Sig. Ab. *Paoli* di questa *Società* in un eccellente Opuscolo pubblicato in Livorno nel 1780. alla progressione aritmetica x, $x+a$, $x+2a$, ecc. degl' incrementi ha sostituito la geometrica ax, a^2x, a^3x, ecc.

Ma in un Paese di nuova scoperta è naturale cosa, che ci si offeriscano agli occhi oggetti sempre nuovi. Nel fare pertanto qualche studio su questo calcolo parvemi che il si potesse ampiare e promovere, battendo nuove vie nel maneggiarlo, e adoperando altri metodi dagli usati finora, coll' adattarlo non solamente alle differenze finite costanti, ma alle variabili eziandio. Non vi era poi fatto alcun passo intorno alle equazioni differenziali a coefficienti variabili; restavano da trattarvisi parecchi articoli così su le funzioni arbitrarie, come su' massimi e minimi, e molti altri da svolgere, onde ravvicinarlo più e più al calcolo integrale comune, e alla Teoria delle equazioni a differenze parziali. Desidero, che le indagini che ho fatto su tutti questi argomenti meritar possano l' attenzione de' Geometri. Le ripartirò in più Memorie seguendo l' ordine stesso con cui mi vi sono successivamente applicato.

MEMORIA I.

CAPITOLO PRIMO

DELLA DIFFERENZIAZIONE DELLE FUNZIONI ED INTEGRAZIONE DE' DIFFERENZIALI SEMPLICI.

DEFINIZIONI.

§. I. RItenendo i consueti segni (*Instituz. di Calc. Diff. del Sig. Eulero*) s' intenda generalmente per y' quello che diventa y, funzione qualunque della variabile x, se si ponga $x + X$ in luogo di x, essendo X qualsivoglia grandezza finita, sia ella costante o una funzione di x qualunque. Similmente s' intenda per y'' ciò che diventa y', se in luogo di x si ponga in y' di nuovo $x + X$, e così successivamente.

§. II. Stessamente conservando il segno caratteristico Δ per le differenze finite, sia generalmente

$$y' - y = \Delta y$$
$$y'' - y' = \Delta y'$$
$$y''' - y'' = \Delta y''$$
$$- - - - - - - - -$$
$$y^{n+1} - y^n = \Delta y^n$$

COROLLARI.

§. III. Prendendo dunque successivamente le differenze de' membri di queste equazioni, si avranno le differenze seconde, le terze ecc. come segue

$\Delta y' - \Delta y = \Delta^2 y$

- - - - - - - - - - - - -

$\Delta y^{n+1} - \Delta y^n = \Delta^2 y^n$

$\Delta^2 y' - \Delta^2 y = \Delta^3 y$

- - - - - - - - - - - - -

$\Delta^2 y^{n+1} - \Delta^2 y^n = \Delta^3 y^n$

e così all' infinito

§. IV. E se in queste equazioni si sostituiscano i valori successivamente di Δy, $\Delta y'$ ecc. tratti dal §. II. si avrà

$\Delta y = y' - y$

$\Delta^2 y = y'' - 2y' + y$

$\Delta^3 y = y''' - 3y'' + 3y' - y$

ecc., e così all' infinito

§. V. Non dipenderà pertanto, come prima, la natura delle quantità variate y', y'' ecc. dalla sola natura della funzione y, ma e da questa, e da quella insieme della grandezza X, che costituisce l' incremento o il decremento ricevuto dalla variabile.

DEFINIZIONE.

§. VI. Si chiami $x + X$ il modulo generale delle differenze finite.

SCOLIO.

§. VII. Poichè y' è ciò che diviene la funzione y ponendovi il modulo $x + X$ in luogo di x, e y'' ciò che diviene y' ponendo $x + X$ in luogo di x, e così successivamente (§. I.), se nel modulo $x + X$ si metta lo stesso modulo $x + X$ in luogo di x, sì che risulti $x + X + X'$, essendo X' ciò che diviene X mettendovi il modulo $x + X$ in luogo di x; e poi di nuovo si ponga nel secondo termine $x + X + X'$ il modulo $x + X$ in luogo di x, sì che risulti $x + X + X' + X''$, essen-

do X'' ciò che diventa X' sostituendovi il modulo in luogo di x, e così successivamente, sì che ne provenga la serie

$$x+X; x+X+X'; x+X+X'+X''; x+X+X'+X''+X'''; \text{ ecc.}$$

egli è manifesto, che risulta la stessa funzione y'', così se in luogo di x si ponga il modulo $x+X$ nella funzione y', come se per x si sostituisca nella funzione y il secondo termine di questa serie $x+X+X'$. Similmente risulta la funzione y''' tanto ponendo in y'' il modulo in luogo di x, quanto sostituendo per x nella funzione y il terzo termine di questa serie, e così sempre. In conseguenza questa serie, e quella delle funzioni si corrispondono in questo modo

$$y \quad \begin{cases} x+X; \; x+X+X'; \; x+X+X'+X''; \text{ecc.} \\ \quad y'; \qquad\quad y''; \qquad\qquad\quad y'''; \text{ecc.} \end{cases}$$

che se X sia la costante a, la serie diventa

$$x+a; \; x+a+a; \; x+a+a+a; \text{ ecc.}$$

che è il caso notissimo della variazione costante, a cui si sono comunemente limitati finora.

PROPOSIZIONE I.

§. VIII. *Essendo* y *una funzione qualsivoglia della variabile* x, *se* x *riceva un incremento o decremento finito* X, *la funzione* y *prende questa forma*, *in cui* dx *è costante*,

$$y \pm \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} \pm \frac{X^3 d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{ ecc. all' infinito}$$

Veggasi, per la dimostrazione, il Sig. *Taylor* (*Meth. increm. inv.*) che fu il primo a produrre quest' importantissima espressione, ed il Sig. *Eulero* nelle sue Instituzioni di Calcolo Diff. pag. 333. e seg., e pag. 353.

SCOLIO.

§. IX. L'espressione del valore di y, in cui sia stato posto $x \pm X$ in luogo di X, abbraccia, coll' ambiguità de' segni, così la variazione per incremento, come per decremento. Per facilità di calcolo si prenderà sempre la serie col segno permanente positivo, essendo facile di alternare i segni al caso che la variazione si faccia per decremento.

COROLLARIO.

§. X. Poichè dunque y'' è ciò che divien y ponendovi in luogo di x la quantità $x + X + X'$; e similmente y''' ciò che diviene la stessa funzione y sostituendovi per x la quantità $x + X + X' + X''$, e così successivamente (§. VII.); è facile da vedere, che torna lo stesso, come se successivamente ricevesse la variabile x nella funzione y la variazione X, $X + X'$, $X + X' + X''$, ecc.

Sarà pertanto (§. VIII.)

$$y' = y + \frac{xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (X + X')\frac{dy}{dx} + (X + X')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y''' = y + (X + X' + X'')\frac{dy}{dx} + (X + X' + X'')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y^{n+1} = y + (X + X' \ldots . X^n)\frac{dy}{dx} + (X + X' \ldots . X^n)^2 \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+ \quad (X + X' \ldots . X^n)^3 \frac{d^3y}{1.2.3.dx^3} + \text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE II.

§. XI. *Data una funzione qualunque* y *della variabile* x *trovare le differenze finite di* y *di tutti gli ordini, posta per modulo generale delle differenze l' espressione* x + X.

RISOLUZIONE.

Essendo $y' - y = \Delta y$ (§. IV), sostituendo in quest' equazione il valore di y' (§. X), sarà la differenza prima

$$\Delta y = X\frac{dy}{dx} + X^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + X^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Di nuovo essendo $y'' - 2y' + y = \Delta^2 y$, sostituendo i valori di y', y'', e facendo $X = (m')$, $X + X' = (m'')$, si avrà

$$\Delta^2 y = \left((m'') - 2(m')\right)\frac{dy}{dx} + \left((m'')^2 - 2(m')^2\right)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+ \left((m'')^3 - 2(m')^3\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

E parimenti sostituendo nell' equazione $y''' - 3y'' + 3y' - y = \Delta^3 y$ i valori di y', y'' ecc., e ponendo $X + X' + X'' = (m''')$, si otterrà la differenza terza della funzione y di questa forma.

$$\Delta^3 y = \left((m''') - 3(m'') + 3(m')\right)\frac{dy}{dx} + \left((m''')^2 - 3(m'')^2 + 3(m')^2\right)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+ \left((m''')^3 - 3(m'')^3 + 3(m')^3\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Similmente, essendo $\Delta^4 y = y'''' - 4y''' + 6y'' - 4y' + y$, sostituendo i valori corrispondenti, e ponendo $(m'''') = X + X' + X'' + X'''$, sarà

$$\Delta^4 y = \left((m'''') - 4(m''') + 6(m'') - 4(m')\right)\frac{dy}{dx} + \left((m'''')^2 - 4(m''')^2\right.$$

$$\left.+ 6(m'')^2 - 4(m')^2\right)\frac{ddy}{1.2dx^2} + \left((m'''')^3 - 4(m''')^3 + 6(m'')^3\right.$$

$$\left.- 4(m')^3\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Per determinare dunque la forma corrifpondente alla differenza $n.^{ma}$ di y non è difficile lo fcoprire, che tutto dipende dal determinare il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$, mentre prendendo a parte a parte le feconde potenze, poi le terze, quarte ecc. d' ogni termine (m^n), (m^{n-1}), (m^{n-2}) ecc. di quefto coefficiente, fi ottengono fucceffivamente i coefficienti di $\frac{ddy}{1.2dx^2}$, $\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$ ecc. Ora il coefficiente di $\frac{dy}{dx}$ è manifeftamente uguale alla potenza $n.^{ma}$ di $m-1$, da cui fia fempre tolto l' ultimo termine, ch' è l' unità, cioè di quefta forma

$$(m^n) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2}) - \frac{n..(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1$$

effendo l' unità pofitiva o negativa fecondo che n farà difpari o pari. In confeguenza farà generalmente la differenza $n.^{ma}$ di qualunque funzione y della variabile x della forma feguente.

$$\overset{n}{\Delta} y = \left((m^n) - \frac{n}{1}(m^{n-1}) + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2})\right.$$

$$\left.- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(m^{n-3}) + \text{ecc.} \pm 1\right)\frac{dy}{dx}$$

$$+ \left((m^n)^2 - \frac{n}{1}(m^{n-1})^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(m^{n-2})^2\right.$$

Bbb iij

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\overset{n-3}{m}\right)^2 + \text{ecc.} \pm 1\Big)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+\Big(\left(\overset{n}{m}\right)^3 - \frac{n}{1}\left(\overset{n-1}{m}\right)^3 + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(\overset{n-2}{m}\right)^3$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(\overset{n-3}{m}\right)^3 + \text{ecc.} \pm 1\Big)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

essendo $\left(\overset{n}{m}\right) = X + X' + X'' \ldots X^{n-1}$, e $\frac{dy}{dx}$, $\frac{ddy}{dx^2}$ ecc. quantità cognite e necessariamente finite. Il che ecc.

SCOLIO.

§. XII. Ancorchè l'uso di questa formula per ritrovare le differenze finite d'ogni grado di qualsivoglia funzione di x col modulo $x+X$ non possa avere alcuna difficoltà, ne faremo qualche applicazione a' casi particolari per rischiaramento.

I. ESEMPIO.

Sia proposto di trovare la differenza seconda di x^2, essendo il modulo $x+ax^2$. Sarà pertanto $X = ax^2$, $y = x^2$, $dy = 2xdx$, $ddy = 2dx^2$, e d^3y con tutti gli altri differenziali successivi $= 0$. E perciò si avrà dalla formula

$\Delta^2 x^2 = \left((m'') - 2(m')\right)2x + \left((m'')^2 - 2(m')^2\right)$

Ma $(m') = X = ax^2$, $(m'') = X + X' = ax^2 + a(x+ax^2)^2$;

Dunque $2x(m'') = 4ax^3 + 4a^2x^4 + 2a^3x^5$; $4x(m') = 4ax^3$,

$(m'')^2 = (2ax^2 + 2a^2x^3 + a^3x^4)^2$, $2(m')^2 = 2a^2x^4$, e però

$\Delta^2 x^2 = a^6x^8 + 4a^5x^7 + 8a^4x^6 + 10a^3x^5 + 6a^2x^4$.

II. ESEMPIO.

Si cerchi la differenza terza di x col modulo $x + l.x$. Essendo $X = l.x$, $n = 3$, $y = x$, $dy = dx$, e ddy, d^3y ecc. $= 0$, sarà
$\Delta^3 x = (m''') - 3(m'') + 3(m')$. Ma $(m') = X = l.x$,
$(m'') = X + X' = l.x + l.(x + l.x)$, $(m''') = X + X' + X''$
$= l.x + l.(x + l.x) + l.(x + l.x + l.(x + l.x))$. Dunque
$\Delta^3 x = l.x + l.(x + l.x) + l.(x + l.x + l.(x + l.x)) - 3l.x -$
$3l.(x + l.x) + 3l.x = l.x - 2l.(x + l.x) + l.(x + l.x + l.(x + l.x))$

III. ESEMPIO.

Sia da determinarsi la differenza prima di $bx + cx^2$ essendo $x - ax + bx^2$ il modulo delle differenze. Sarà pertanto $X = bx^2 - ax$, $n = 1$, $y = bx + cx^2$, $dy = bdx + 2cxdx$, $ddy = 2cdx^2$, d^3y, d^4y ecc. $= 0$. E però
$\Delta y = \Delta(bx + cx^2) = (m')(b + 2cx) + (m')^2 c$
Ma $(m') = X = bx^2 - ax$. Dunque $\Delta y = (b^2 + a^2 c - 2ac)x^2 + (2bc - 2abc)x^3 - abx + b^2 c x^4$.

COROLLARIO.

§. XIII. Dalla forma universale delle differenze finite d' una qualunque funzione di x, che abbiamo determinato, si può facilmente ricavare quella, che conviene alla differenza d' ogni ordine coll' incremento costante, cioè col modulo comune $x + a$. Egli è di molta utilità l' avere una sola forma generale, che esprima le differenze $n.^{me}$ di qualsivoglia funzione in questo caso particolare, ch' è il più comune, e più in uso presso i Geometri; tanto più, che non apparisce agevolmente, come si possa dedurre un' espressione generale dalle forme particolari date a queste differenze a parte a parte dal Sig. *Eulero* alla pag. 343. delle sue Instituzioni.

Basta pertanto riflettere, che nel caso dell' incremento costante a, si ha

$$X = a = (m')$$
$$X + X' = a + a = 2a = (m'')$$
$$X + X' + X'' = a + a + a = 3a = (m''')$$
- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
$$X + X' \ldots X^{n-1} = na = (m^n)$$

e però sostituendo questi multipli di a nella formula universale, si avrà generalmente per gl' incrementi costanti.

$$\Delta^n y = \left(na - \frac{n(n-1)a}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)a}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+\left(n^2a^2 - \frac{n(n-1)^2a^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2a^2}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{ddy}{1.2dx^2}$$
$$+\left(n^3a^3 - \frac{n(n-1)^2a^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3a^3}{1.2} - \text{ecc.}\right)\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$
$$+ \text{ecc.}$$

forma, in cui la legge è visibile. In fatti sia $n = 1$.

$$\Delta y = \frac{ady}{dx} + \frac{a^2ddy}{2dx^2} + \frac{a^3d^3y}{6dx^3} + \text{ecc.}$$

posto $n = 2$

$$\Delta^2 y = \frac{a^2ddy}{dx^2} + \frac{3a^3d^3y}{3dx^3} + \frac{7a^4d^4y}{3.4dx^4} + \text{ecc.}$$

e così successivamente come porta la Tavola del Sig. *Eulero*.

S C O L I O.

§. XIV. Veduto abbastanza della differenziazione delle funzioni finite, ci faremo a versare sopra l' integrazione delle funzioni differenziali. Siccome una funzione può essere considerata integrale d' una funzione ignota, la quale si determina colla differenziazione di quella stessa

ſteſſa quantità, che ſi ſuppone eſſere il ſuo Integrale; così ogni funzione può eſſere propoſta come differenziale d' una funzione incognita, la quale non può definirſi, che trovando l'Integrale della funzione propoſta. Ma quanto è agevole e ſoggetto a Canoni generali, come s'è veduto, il primo Calcolo, altrettanto quello dell'integrazione delle funzioni è difficile ſommamente, e forſe non fatto per ſottometterſi a regole univerſali. Appena può egli dirſi tocco da' Geometri, ſe qualche caſo ſi eccettui ſvolto ingegnoſamente dal Sig. *Eulero* nel I. Cap. di ſue Inſtituzioni. E tanto più fa meraviglia, che non ſe ne ſieno occupati prima d' ogn' altra coſa, che il Calcolo Integrale dell' Equazioni differenziali tutto ripoſa ſugl' Integrali delle funzioni differenziali, e non può un' equazione avere un Integrale finito, e ſviluppato, ſe non s' abbia quello delle funzioni, all' integrazione delle quali egli ſi riduce neceſſariamente. Ma penſando, che a poco avrebbero ſervito le mie ricerche, ſe mi foſſi intrattenuto ſu de' caſi particolari, mi poſi a tentare qualche coſa di generale, per quanto il permette l' arduità dell' aſſunto. E come è noto, che la parte più luminoſa, e più uſuale, cioè quella, in cui gl' incrementi o decrementi ſeguono la progreſſione de' numeri naturali 1, 2, 3, 4, ecc., ha relazione colle ſomme generali di ſerie aventi per termine generale le funzioni ſteſſe, di cui ſi cerca l' integrale; mi ſono dato anche a coltivare di propoſito la Teoria delle ſerie con un metodo, che ha il vantaggio di legarſi ſpontaneamente col Calcolo integrale delle funzioni differenziali finite, ond' è poi nata la Memoria precedente, di cui vedremo qui un' immediata applicazione.

DEFINIZIONE.

§. XV. La Caratteristica $\int$ denoti l' integrale d' una funzione qualunque, che n' è affetta, come nel Calcolo integrale a differenze infinitesime, a distinzione della Caratteristica S, che deve indicare la somma generale d' una serie, che abbia per termine generale la funzione affetta. In tal guisa sarà $\int M$ l' integrale della funzione M della variabile x, considerata come un differenziale finito, ed SM sarà la somma generale di una serie, che ha per termine generale la funzione M, e per indice la stessa variabile x.

PROPOSIZIONE III.

§. XVI. *Proposta qualsivoglia funzione differenziale* M *di* x *e costanti col modulo* x + X *delle differenze finite, trovare l' equazione, a cui si riduce generalmente l' integrazione della funzione* M.

RISOLUZIONE.

Sia y l' integrale ricercato. Dovrà essere $y = \int M +$ cost.; e differenziando $\Delta y = y' - y = M$. Ma abbiamo veduto essere

$$y' = y + \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Si avrà dunque l' equazione generale

$$(A) \ldots\ldots M = \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{X^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

E però se si trovi un solo valore t per y soddisfacente all' equazione (A), sarà $t +$ cost. l' integrale completo della funzione M. Il che ecc.

PROPOSIZIONE IV.

§. XVII. *Trovare tutte le funzioni* M, *che ammettono integrale completo algebraico razionale ed intiero, con qualsivoglia modulo* $x+X$.

RISOLUZIONE.

Sia primieramente $y=\int M=K+bx$. Sostituendo questo valore nell' equazione (A) della Proposizione precedente, sarà $M=bX$, e però qualunque funzione di x algebraica o trascendente, ch' esser possa l' incremento X, sarà $\int M=b\int X=K+bx$, e K sarà la costante arbitraria.

Sia in secondo luogo $y=\int M=K+bx+cx^2$. Sarà

$$M=(b+2cx)X+cX^2$$

e qualunque funzione di x sia X, sarà $K+bx+cx^2$ l' integrale completo di $(b+2cx)X+cX^2$. Dunque generalmente essendo

$$M=(b+2cx+3ex^2+4fx^3+\text{ecc.}\ldots\ldots)X$$

$$+(1.2c+2.3ex+3.4fx^2+4.5gx^3+\text{ecc.}\ldots\ldots)\frac{X^2}{1.2}$$

$$+(1.2.3e+2.3.4fx+3.4.5gx^2+\text{ecc.}\ldots\ldots)\frac{X^3}{1.2.3}$$

$$+\text{ecc.}$$

qualunque funzione di x sia X, sarà

$$\int M=K+bx+cx^2+ex^3+fx^4+gx^5+\text{ecc.}$$

Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XVIII. Si deduce quindi agevolmente, che può essere M qualunque funzione di x a piacere, purchè

ſia X un determinato incremento, o una funzione determinata dipendènte dal valore di M.

PROPOSIZIONE V.

§. XIX. *Di nuovo propoſta qualſivoglia funzione differenziale* y *di* x *e coſtanti, col modulo* x + X *delle differenze finite, trovare in funzioni di* y *ed* x *il ſuo integrale completo.*

RISOLUZIONE.

Sieno generalmente $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$ ecc. $M_{,}$, $M_{,,}$, $M_{,,,}$, ecc. le forme che prendono le funzioni y, M ponendovi ſucceſſivamente $x - X$ in luogo di X, come ſono le y', y'', y''' ecc. M', M'' ecc. le forme, che prendono y, M, ponendovi ſucceſſivamente $x + X$ in luogo di x (§. 11); e ſia $M = \int y$. Sarà $\Delta M = y$. Ma $\Delta M = M' - M$ (§. 11); dunque $y = M' - M$, e ponendo ſucceſſivamente ne' termini di queſt' equazione $x - X$ in luogo di X, ſarà

$$y_{,} = M - M_{,}$$
$$y_{,,} = M_{,} - M_{,,}$$
$$y_{,,,} = M_{,,} - M_{,,,}$$
$$y_{,,,,} = M_{,,,} - M_{,,,,}$$
ecc.

In conſeguenza, prendendo le ſomme all' infinito, ſarà

$$(B) \ldots\ldots M = \int y = K + y_{,} + y_{,,} + y_{,,,} + y_{,,,,} + \text{ecc.}$$

eſſendo K la coſtante arbitraria. Ma ponendo negative le variazioni nel §. X. ſi ha

$$y_{,} = y - \frac{Xdy}{dx} + \frac{X^2 ddy}{1.2dx^2} - \frac{X^3 d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

$$y_{,,} = y - (X + X')\frac{dy}{dx} + (X + X')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} - \text{ecc.}$$

ecc.

fostituendo pertanto questi valori nell' equazione (B), si avrà

$$(C)..y \int = K + Sy - (X + (X+X') + (X+X'+X'') + \text{ecc}...) \frac{dy}{dx}$$

$$+ (X^2 + (X+X')^2 + (X+X+X'')^2 + \text{ecc}...) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$- (X^3 + (X+X')^3 + (X+X'+X'')^3 + \text{ecc}....) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

$$+ \text{ecc.}$$

che è un' altra forma generale, che può avere l' integrale della funzione data y col modulo $x+X$, come s' era proposto di ritrovare.

PROPOSIZIONE VI.

§. XX. *Ritrovare l' integrale completo di qualsivoglia funzione differenziale* y *col modulo* x + 1 *delle differenze finite.*

RISOLUZIONE.

Essendo $X = 1$, e però $X + X' = 1 + 1 = 2$, $X + X' + X'' = 3$ ecc.
si fostituiscano questi valori nell' equazione (C) della Proposizione precedente. Sarà

$$\int y - K + Sy - (1 + 2 + 3 + 4 + \text{ecc}....) \frac{dy}{dx}$$

$$+ (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \text{ecc}.....) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$- (1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \text{ecc}.....) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

$$+ \text{ecc.}$$

e però col prendere i termini generali delle serie [illegible]

meriche, dando loro per indice o esponente, che voglia dirsi, la variabile x, si avrà

$$(D)\ldots \int y = K + Sy - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

integrale completo della funzione differenziale y. Il che ecc.

COROLLARIO.

§. XXI. E poichè $y = K + \frac{xdy}{dx} - \frac{x^2 ddy}{1.2dx^2} + \frac{x^3 d^3 y}{1.2.3dx^3}$ — ecc. (*Eulero Inst. pag.* 359), se si sostituisca questo valore nell' equazione (D) in luogo della serie infinita, sarà manifestamente

$$\int y = K + Sy - y$$

ch' è l' equazione nota di relazione tra l' integrale $\int y$ della funzione differenziale y, e la somma d' una serie Sy avente la stessa funzione y per termine generale.

SCOLIO.

§. XXII. Questo è il luogo di combinare la Teoria nostra delle serie coll' integrazione delle funzioni differenziali. Riflettendo al modo, che abbiamo adoperato per trovare i termini generali delle serie, si vede, che li abbiamo sempre ricavati dalla differenza di due funzioni di x colle stesse condizioni, con cui si trae la differenza finita, giacchè essendo M il termine generale, si sono sempre determinate due forme y, y' dalla differenza delle quali risulta la forma M, e però deve essere necessariamente $y = \int M$. Ci faremo pertanto a mettere qui alcune di queste integrazioni in via di Corollarj, perchè le si abbiano sotto forme generali, senz' altra fatica, che quella di adattarle a' casi particolari, e servano di norma per le altre.

COROLLARJ.

I.° E cominciando dalle funzioni Algebraiche razionali, ed intiere di x, se sia
$M = A + (B + 2Bx) + (C + 3Cx + 3Cx^2) + (D + 4Dx + 6Dx^2 + 4Dx^3) \ldots\ldots + \mathcal{Q}(x+1)^n - \mathcal{Q}x^n$
sarà
$\int M = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots \mathcal{Q}x^n +$ cost. arb.
(*Mem. preced. intorno alle serie Cap.* 1. *Probl.* 1.)
Esemp. Sia $M = f^2x + 3gx^2$. Identificando i termini omologhi si avrà $A + B + C = 0$, $2B + 3C = f^2$; $3C = 3g$, e però $A = \frac{g-f^2}{2}$, $B = \frac{f^2-3g}{2}$, $C = g$. In conseguenza $\int (f^2x + 3gx^2) = \left(\frac{g-f^2}{2}\right)x + \frac{(f^2-3g)x^2}{2} + gx^3$.

II.° Se sia $M = (\pm A \mp AK^b)K^{a+bx}$,
sarà $\int M = \pm AK^{a+b(x+1)} +$ cost. arb.
(*Cap.* 11. *Probl. IV*)

III.° Se sia generalmente
$M = \pm K^{a+bx}\left(A' - A'K^b + Ax - AK^b(x+1) + Bx^2 - BK^b(x+1) \ldots\ldots \mathcal{Q}x^n - \mathcal{Q}K^b(x+1)^n\right)$
sarà
$\int M = \pm\left(A' + A(x+1) + B(x+1)^2 \ldots\ldots \mathcal{Q}(x+1)^n\right)K^{a+b(x+1)} +$ cost. arb.
(*Cap.* II. *Probl. V.*

IV.° Se sia $M = \frac{A}{(m+nx)(p+qx)\ldots\ldots\ldots(\Delta+\varkappa x)}$
cioè una frazione di cui il numeratore è una quantità costante, e il denominatore il prodotto d' un numero qualunque di fattori semplici, sarà

$$\int M = \frac{A}{nqs\ldots\phi\omega}\int z^{\Delta:\nu-\mu:t-1}dz\ldots\int z^{r:s-p:q-1}dz\int z^{p:q-m:n-1}dz\int\frac{z^{m:n+x}dz}{1-z}$$

$+$ coſt. arb.

nella qual' eſpreſſione il ſecondo membro non è un integrale a differenze finite, ma sì bene un integrale a differenze infiniteſime, in cui dopo l' integrazione completa debbe eſſer fatto $z = 1$.

Vegganſi per la dimoſtrazione il Probl. X, Teor. I., Probl. XI. del Cap. V. Nello ſteſſo modo ſi troverebbero gl' integrali della funzione M, ſe ella foſſe una frazione con de' fattori ſemplici così al numeratore come al denominatore, dietro a quanto s' è dimoſtrato nel medeſimo Capitolo delle Serie. Ma non di queſta ſola natura di funzioni conſiderate come differenziali finiti ſi può avere l' integrale completo. Tutte quelle che nella noſtra teoria delle ſerie fanno uffizio di termini generali eſſendo ſtate, in forza del metodo ivi adoperato, riſolute in una forma equivalente di due membri colla legge delle differenze finite, ammettono immediatamente integrazione, come chiaramente ſi può comprenderlo dai caſi ſvolti in queſti Corollarj, ch' io tralaſcio di moltiplicare ſenza neceſſità, eſtendendoſi la coſa ſu tutte le parti del Trattato ſopraddetto.

S c o l i o.

§. XXIII. Che ſe la ſerie, di cui è termine generale la funzione y, onde ſi cerca l' integrale, foſſe ribelle a tutti i metodi, ſicchè la formula

$$\int y = K + Sy - y$$

del §. XXI. non foſſe di alcun ſuffragio, atteſa l' ineſplicabilità della forma Sy, non manca, come in tanti altri ardui caſi delle Scienze Matematiche, il ricorſo ad una ſerie, ch' eſprima la funzione Sy con un' infinità

nità di termini. In fatti essendo (*Eulero Inst. pag.* 438.)

$$Sy=(x+1)y-a-\frac{dy}{dx}Sx+\frac{ddy}{1.2dx^2}Sx^2-\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}Sx^3+\text{ecc.}$$

dove a è la quantità, che risulta ponendo $x=0$ nel termine generale y, e Sx, Sx^2 ecc. sono le somme delle successive potenze intere di x, funzioni ricavabili agevolmente dalla teoria delle serie, sarà generalmente

$$\int y=K+xy-a-\frac{dy}{dx}Sx+\frac{ddy}{1.2dx^2}Sx^2-\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}Sx^3+\text{ecc.}$$

PROPOSIZIONE VII.

§. XXIV. *Ritrovare l' integrale completo di qualunque funzione logaritmica di* x *col modulo generale delle differenze* x + X.

RISOLUZIONE.

Sia $y=l.P$, essendo P qualsivoglia funzione di x. Sarà

$y'-y=\Delta y=\Delta l.P$

$y''-y'=\Delta y'=\Delta l.P'$

$y'''-y''=\Delta y''=\Delta l.P''$

ecc.

$y-y_{,}=\Delta y_{,}=\Delta l.P_{,}$

$y_{,}-y_{,,}=\Delta y_{,,}=\Delta l.P_{,,}$

$y_{,,}-y_{,,,}=\Delta y_{,,,}=\Delta l.Py_{,,,}$

ecc.

Dunque prendendo le somme all' infinito, si avrà
$y=-\Delta l.P-\Delta l.P'-\Delta l.P''-\text{ecc.}=\Delta l.P_{,}+\Delta l.P_{,,}+\Delta l.P_{,,,}+\text{ecc.}$
e integrando coll' aggiunta della costante K, sarà

$$\int y=K-l.P-l.P'-l.P''-\text{ecc.}=K+l.P_{,}+l.P_{,,}+l.P_{,,,}+\text{ecc.}$$

Ma la somma de' logaritmi di molte quantità è uguale al logaritmo del prodotto continuo di quelle quantità. Dunque

$$\int y=K-l.P.P.P.P''\ \text{ecc.}=K+l.P_{,}.P.P_{,,}\ \text{ecc.}$$

Se pertanto $\pi'(P)$ sia la caratteristica del prodotto continuo de' valori successivi di P per incremento, $\pi_{,}(P)$ la caratteristica del prodotto continuo de' medesimi valori per decremento, sarà l' integrale completo di qualunque quantità logaritmica

$$\int l.P = K - l.\pi'(P) = K + l.\pi_{,}(P)$$

il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXV. E perchè $y = -l.\pi'(P) = l.\pi_{,}(P)$, sarà $e^{y} = e^{-l.\pi'(P)} = \frac{1}{e^{l.\pi'(P)}} = e^{l.\pi_{,}(P)}$, essendo e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico. Ma $e^{l.\pi'(P)} = \pi'(P)$, $e^{l.\pi_{,}(P)} = \pi_{,}(P)$. Dunque $\pi'(P) = \frac{1}{\pi_{,}(P)}$

COROLLARIO II.

§. XXVI. In consegueuza se si metta $\frac{1}{P}$ in luogo di P, sarà

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} = P.$$ Imperciocchè essendo

$\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{P_{,}P_{,,}P_{,,,} \text{ ecc.}}$, se vi si metta $x + X$ in luogo di x, sarà $\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right) = \frac{1}{P P_{,} P_{,,} \text{ecc.}}$

Dunque $\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} = P$; e sostituendo $\frac{1}{\pi'\left(\frac{1}{P}\right)}$ in luogo di

$\pi_{,}(P)$, sarà similmente $\frac{\pi'\left(\frac{1}{P'}\right)}{\pi'\left(\frac{1}{P}\right)} = P$.

COROLLARIO III.

§. XXVII. Dunque

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} \times \frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q'}\right)} = PQ$$

$$\frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{P}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{P'}\right)} \times \frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{Q'}\right)} \times \frac{\pi_{,}\left(\frac{1}{R}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{R'}\right)} = PQR$$

e così successivamente

CAPITOLO SECONDO

DELL' INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI FINITE A DUE VARIABILI.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XXVIII. *Proposta l' equazione differenziale* (M) *a differenze finite*

$(M) \ldots Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.} \ldots + Ny^n = 0$
di qualsivoglia grado n, *qualunque caso sieno i coefficienti* A, B, C ecc. *costanti o funzioni di* x, *determinare per qualsivoglia modulo* x + X *un' equazione generale in* y, X *e cofficienti dati, nella quale trovando* n *valori differenti per* y *soddisfacenti particolarmente all' equazione, si abbia l' integrale completo dell' equazione* (M).

RISOLUZIONE.

Sieno X', X'' ecc. li termini consecutivi ad X ponendo successivamente $x + X$ in luogo di x, e sia $(m') = X$, $(m'') = X + X'$ ecc.
$(m^n) = X + X' + X'' \ldots + X^{n-1}$.

Sarà (§. x.)

$$y = y$$

$$y' = y + (m')\frac{dy}{dx} + (m')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + (m')^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + (m'')\frac{dy}{dx} + (m'')^2 \frac{ddy}{1.2dx^2} + (m'')^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

- -

$$y^{n+1} = y + (m^{n+1})\frac{dy}{dx} + (m^{n+1})^2 + \frac{ddy}{1.2dx^2} + (m^{n+1})^3 \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Si sostituiscano questi valori per y, y', y'' ecc. nell' equazione (M), e ordinando i termini, si avrà

$$\begin{aligned} 0 &= y\,(A + B + C + D + \text{ecc.}) \\ &+ \frac{dy}{dx}\left(B\,(m') + C\,(m'') + D\,(m''') + \text{ecc.}\right) \\ &+ \frac{d^2y}{1.2dx^2}\left(B\,(m')^2 + C\,(m'')^1 + D\,(m''')^2 + \text{ecc.}\right) \\ &+ \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\left(B\,(m')^3 + C\,(m'')^3 + D\,(m''')^3 + \text{ecc.}\right) \end{aligned}$$

- -

$$+\frac{d^n y}{1.2\ldots n dx^n}\left(B(m')^n+C(m'')^n+D(m''')^n+\text{ecc.}\right)\ldots(H)$$

nella quale equazione (m'), (m'') ecc. ſono quantità coſtanti, o funzioni di x dipendenti dall' incremento X aſſunto. Se dunque ſi abbia n valori differenti per y colle riſpettive coſtanti arbitrarie, che ſoddisfacciano a queſt' equazione, eſſendo l' equazione (M) lineare, la ſomma di queſti valori dovrà ſoddisfare all' equazione (M). E perchè queſta ſomma contiene n coſtanti arbitrarie, ſarà ella neceſſariamente l' integrale completo dell' equazione (M). Il che ecc.

PROPOSIZIONE IX.

§. XXIX. *Propoſta l' equazione differenziale* (M)
$(M)\ldots. Ay+By'+Cy''+\text{ecc.}\ldots.+Ny^n=0$
in cui A, B, C ecc. *ſono quantità coſtanti, e* x + px *il modulo delle differenze, ritrovare il ſuo integrale completo, qualunque ſia il grado dell' equazione, e* p *qualunque coſtante.*

RISOLUZIONE.

Eſſendo $X=px$, ſarà $X'=(p+p^2)x$, $X''=(p+2p^2+p^3)x$, $X'''=(p+3p^2+3p^3+p^4)x$ ecc. Dunque $X+X'=(m'')=(2p+p^2)x$, $X+X'+X''=(m''')=(3p+3p^2+p^3)x$, $X+X'+X''+X'''=(m'''')=(4p+6p^2+4p^3+p^4)x$, cioè generalmente $X+X'+X''..+X^{n+1}=(m^n)=\left((p+1)^n-1\right)x$, ſiccome è manifeſto. Soſtituendo queſti valori per (m'), (m'') ecc. nell' equazione (H) (§. XXVIII) ella ſi ridurrà a queſta forma.

$$0=y(A+B+C+D+\text{ecc.})$$
$$+\frac{dy}{dx}\left(Bpx+C\left((p+1)^2-1\right)x+D\left((p+1)^3-1\right)x+\text{ecc.}\right)$$

$$+\frac{ddy}{1.2dx^2}\Big(Bp^2x^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2x^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2x^2+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\Big(Bp^3x^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3x^3+D\big((p+1)^3-1\big)^3x^3+\text{ecc.}\Big)$$

- -

$$+\frac{d^ny}{1.2..ndx^2}\Big(Bp^nx^n+C\big((p+1)^2-1\big)^nx^n+D\big((p+1)^3-1\big)^nx^n+\text{ecc.}\Big)$$

Si finga $y=Kx^a$, essendo K, a costanti indeterminate.

Sarà $dy=aKx^{a-1}dx$, $ddy=a(a-1)Kx^{a-2}dx^2 \ldots d^ny=a(a-1)\ldots(a-n+1)Kx^{a-n}dx^n$. E però sostituendo questi valori, e dividendo l' equazione per Kx^a, si avrà

$$(N)\ldots 0=A+B+C+\text{ecc.}+a\Big(Bp+C\big((p+1)^2-1\big)+D\big((p+1)^3-1\big)+\text{ecc.}\Big)$$

$$+\frac{a(a-1)}{1.2}\Big(Bp^2+C\big((p+1)^2-1\big)^2+D\big((p+1)^3-1\big)^2+\text{ecc.}\Big)\ldots\ldots$$

$$+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\Big(Bp^3+C\big((p+1)^2-1\big)^3+D\big((p+1)^3-\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$+$ ecc.

cioè l' equazione ordinata (N)

$$(N)\ldots 0=A+B+C+D+\text{ecc.}+B\Big(ap+\frac{a(a-1)}{1.2}p^2+\frac{a(a-1)(aa-2)}{1.2.3}p^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+C\Big(a\big((p+1)^2-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^2-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^2-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

$$+D\Big(a\big((p+1)^3-1\big)+\frac{a(a-1)}{1.2}\big((p+1)^3-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^3-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

- -

$$+N\Big(a\big((p+1)^n-1\big)+\frac{a(a\ 1)}{1.2}\big((p+1)^n-1\big)^2+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}\big((p+1)^n-1\big)^3+\text{ecc.}\Big)$$

Ora essendo $(1+Z)^a=1+aZ+\frac{a(a-1)}{1.2}Z^2$
$+\frac{a(a-1)(a-2)}{1.2.3}Z^3+$ ecc. se alle serie si sostituiscano i va-

lori finiti corrispondenti, si avrà
$$o = A + B + C + D + ecc. B((p+1)^a - 1) + C((p+1)^{2a} - 1) + D((p+1)^{3a} - 1) + ecc.$$
cioè
$$o = A + B(p+1)^a + C(p+1)^{2a} + D(p+1)^{3a} + ecc.$$
e posto $(p+1)^a = z$, risulterà l' equazione determinata (N')
$$(N') \ldots\ldots o = A + Bz + Cz^2 + Dx^3 + Ez^4 + \ldots\ldots Nz^n$$
la quale somministra n valori differenti per $a = \frac{l.z}{l.(p+1)}$, secondo il grado n dell' equazione da integrare. Se sieno pertanto c, c', c'' ecc. questi valori, prendendo per l' arbitraria K un numero n di valori diversi K, K', K'' ecc. poichè l' equazione (M) è lineare, sarà il suo integrale completo
$$y = Kx^c + K'x^{c'} + K''x^{c''} + K'''x^{c'''} + ecc.$$
Il che ecc.

Lemma.

§. XXX. Essendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l' unità, le seguenti equazioni debbono aver luogo, qualunque cosa sia m
$$e^m - 1 = m + \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^3}{1.2.3} + \frac{m^4}{1.2.3.4} + ecc.$$
$$e^{2m} - 1 = 2m + \frac{4m^2}{1.2} + \frac{8m^3}{1.2.3} + \frac{16m^4}{1.2.3.4} + ecc.$$
ecc. . . . . . -
$$e^{nm} - 1 = nm + \frac{n^2m^2}{1.2} + \frac{n^3m^3}{1.2.3} + \frac{n^4m^4}{1.2.3.4} + ecc.$$
Veggasene la dimostrazione nell' Introduz. all' An. degl' Infin. del Sig. *Eulero*.

PROPOSIZIONE X.

§. XXXI. *Trovare l' integrale completo dell' equazione differenziale* (A) *di qualsivoglia grado n*

$(A) \ldots . Ay + By' + Cy'' + Dy''' + \text{ecc.} \ldots \ldots + My^n = 0$

in cui A, B, C ecc. *sono quantità costanti, e il modulo delle differenze è* x + a.

RISOLUZIONE.

Essendo in questo caso (§. x.)

$$y' = y + \frac{ady}{dx} + \frac{a^2 d^2 y}{1.2 dx^2} + \text{ecc.}$$

$$y'' = y + \frac{2ady}{dx} + \frac{4a^2 d^2 y}{1.2 dx^2} + \text{ecc.}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$y^n = y + \frac{nady}{dx} + \frac{n^2 a^2 d^2 y}{1.2.dx^2} + \text{ecc.}$$

si sostituiscano questi valori per y, y'' ecc. nell' equazione (A). Si avrà dopo la conveniente ordinazione de' termini l' equazione (B)

$$(B) \ldots . o = (A + B + C + D + \text{ecc.})\, y$$

$$+ (aB + 2aC + 3aD + 4aE + \text{ecc.}) \frac{dy}{dx}$$

$$+ (a^2B + 4a^2C + 9a^2D + 16a^2E + \text{ecc.}) \frac{ddy}{1.2dx^2}$$

$$+ (a^3B + 8a^3C + 27a^3D + 64a^3E + \text{ecc.}) \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}$$

- -

$$+ (a^nB + 2^n a^n C + 3^n a^n D + 4^n a^n E + \text{ecc.}) \frac{d^ny}{1.2 \ldots ndx^n}$$

E posto $y = Ke^{bx}$, essendo K, b costanti indeterminate,

te, ed e il numero, che ha l' unità per logaritmo iperbolico, ſi avrà, ſoſtituendo i valori di y, dy, ecc. e togliendo il fattor comune Ke^{bx}, l' equazione (C)

$$(C) \ldots\ldots o = A + B + C + D + \text{ecc.}$$

$$+ B\left(ab + \frac{a^2b^2}{1.2} + \frac{a^3b^3}{1.2.3} + \ldots + \frac{a^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

$$+ C\left(2ab + \frac{4a^2b^2}{1.2} + \frac{8a^3b^3}{1.2.3} \cdots + \frac{2^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

- -

$$+ M\left(nab + \frac{n^2a^2b^2}{1.2} + \frac{n^3a^3b^3}{1.2.3.} \cdot\cdot + \frac{n^na^nb^n}{1.2\ldots n}\right)$$

cioè pel Lemma (§. XXX.) l' equazione (D)

$$(D) \ldots A + Be^{ab} + Ce^{2ab} + De^{3ab} + Ee^{4ab} + \text{ecc.} \ldots + Me^{nab} = o$$

oppure, poſto $e^{ab} = z$, l' equazione (E)

$$(E) \ldots A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ecc.} \ldots + Mz^n = o$$

Queſt' equazione eſſendo del grado n, è manifeſto, ch' ella ſomminiſtrerà n valori differenti di z, che chiameremo p, p', p'' ecc., e in conſeguenza n valori di b, i quali ſaranno $\frac{l.p}{a}$, $\frac{l.p'}{a}$, $\frac{l.p''}{a}$, ecc. E come il coefficiente K non entra in queſt' equazione, così reſta egli intieramente arbitrario, sì che prendendo per K un numero n di coefficienti diverſi K, K', K'', ecc. come nella Prop. IX., ſi avrà n valori diverſi di y, cioè $Ke^{\frac{x}{a}l.p}$, $K'e^{\frac{x}{a}l.p'}$ ecc. Eſſendo pertanto l' equazione (A) lineare, la ſomma di queſti valori dovrà ſoddisfare all' equazione, di modo che l' equazione $y = Ke^{\frac{x}{a}l.p} + K'e^{\frac{x}{a}l.p'} + K''e^{\frac{x}{a}l.p''} +$ ecc. oppure

$y = K(p)^{x:a} + K'(p')^{x:a} + K''(p'')^{x:a} +$ ecc., contenendo n costanti arbitrarie K, K' ecc., sarà l'integrale completo dell'equazione (A) del grado n. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XI.

§. XXXII. *Proposta l'equazione differenziale finita*
(A) . . . . $My + Ny' = 0$
essendo M, N *funzioni di* x *qualunque, e generalmente il modulo delle differenze* $x + X$, *ritrovare l'integrale completo dell'equazione* (A).

RISOLUZIONE.

Si finga essere $y = Ke^{A(x)}$, essendo K un'indeterminata costante, $A(x)$ funzione indeterminata di x, e il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità. Sarà $y' = Ke^{A(x+X)}$. Ma $A(x+X) - A(x) = \Delta A(x)$ (§. II.). Dunque
$y' = Ke^{A(x) + \Delta A(x)}$. Si sostituiscano questi valori nell'equazione (A), e si avrà
$MKe^{A(x)} + NKe^{A(x)+\Delta A(x)} = 0$, ove fatta la divisione si ottiene
$M + Ne^{\Delta A(x)} = 0$, in cui non entrando l'indeterminata K resta ella intieramente arbitraria. Dunque
$e^{\Delta A(x)} = 1 - \frac{M+N}{N}$, e $\Delta A(x) = l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

Integrando pertanto, sarà $A(x) = \int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)$.

E però
$y = Ke^{\int l.\left(1 - \frac{M+N}{N}\right)}$.

Ma $\int l.\left(1-\frac{M+N}{N}\right)=l.\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ (§. XXXIV).
Dunque

$y=K\,\pi_{,}\left(1-\frac{M+N}{N}\right)$ sarà l'integrale completo dell' equazione (A). Il che ecc.

PROPOSIZIONE XII.

§. XXXIII. *Proposta l' equazione differenziale precedente*
(A) . . . . $My+Ny'=0$
trovare i differenti moduli $x+X$, *a' quali corrisponde per* y *una funzione algebraica di* x *razionale ed intera.*

RISOLUZIONE.

Poichè si è dimostrato essere per qualsivoglia incremento X (§. VIII.)

$$y'=y+\frac{Xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2.dx^2}+\text{ecc.}$$

sostituendo questo valore nell' equazione proposta (A), sarà

$$(A')\ldots 0=(M+N)y+N\left(\frac{xdy}{dx}+\frac{X^2ddy}{1.2dx^2}+\text{ecc.}\right)$$

Ora, qualunque funzione algebraica razionale ed intera possa essere l' integrale dell' equazione (A), è certo che sostituita per y, e suoi differenziali nell' equazione (A'), se sia n l' esponente della massima potestà di x sarà $d^{n+1}y$ con tutti i differenziali successivi $=0$. L' equazione dunque (A') in x ed X diverrà finita, e considerando X come un' incognita, ascenderà ella al grado X^n, sì che si avrà per X un numero n di valori $=X, (X), ((X))$ ecc. in x e costanti che soddisfaranno

all' equazione, e però un numero n di moduli $x+X$, $x+(X)$, $x+((X))$ ecc. a' quali corrisponderà una stessa funzione per y algebraica razionale ed intera del grado n.

Posto ciò, se si faccia per ordine

$ddy=0$, si ha $y=a+bx$

$d^3y=0 \ldots\ldots y=a+bx+cx^2$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$d^{n+1}y=0 \ldots\ldots y=a+bx+cx^2+ \text{ecc}\ldots mx^n$

Sostituendo pertanto questi valori di y successivamente nell' equazione (A'), prende ella queste forme

$(1) \ldots 0=(M+N)(a+bx)+bNX$

$(2) \ldots 0=(M+N)(a+bx+cx^2)+(b+2cx)NX+cNX^2$

- -

$(m) \ldots 0=(M+N)(a+bx+cx^2 \ldots\ldots mx^n)+NX(b+2cx+3dx^2+4ex^3 \ldots\ldots nmx^{n-1})+NX^2(2c+2.3dx+3.4ex^2 \ldots\ldots n(n-1)mx^{n-2})+$ ecc.

le quali somministrano evidentemente i diversi valori di X ai quali corrisponde per y una stessa funzione algebraica di x razionale ed intiera della forma

$a+bx+cx^2+ex^3+fx^4$ ecc.

In fatti se si ponga nel modulo il valore di X tratto dall'equazione (1.) sarà $y=a+bx$. Similmente avendo X due valori X, (X) nell' equazione (2) è chiaro che per entrambi i moduli $x+X$, $x+(X)$ risulta $y=a+bx+cx^2$. E così successivamente traendo dall' equazione generale (M) un' equazione in X del grado n, da tutti li n valori di X risulterà un numero n di moduli, ai quali corrisponderà per y la stessa funzione algebraica razionale ed intiera $a+bx+cx^2+ex^3 \ldots +mx^n$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XXXIV. Non potrà pertanto essere y funzione algebraica razionale ed intera di x, coll'incremento X

costante, se sieno M N quantità costanti. E potrà esserlo solamente, in supposizione di M N costanti, sempre che sia variabile l' incremento.

COROLLARIO II.

§. XXXV. Ma qualunque cosa sieno M N, se sia $x\sqrt[n]{\left(-\frac{M}{N}\right)}$ il modulo delle differenze, sarà $y = Kx^n$ l' integrale completo dell' equazione $My + Ny' = 0$, essendo K una costante arbitraria, com' è facile cosa l' accertarsene col calcolo.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXXVI. *Proposta l' equazione differenziale* (A)
$(A) \ldots\ldots o = My + Ny' + Py'' + Qy''' + \text{ecc.}$
del grado n, *essendo* M, N, P, Q ecc. *costanti o variabili, come si vuole, trovare le equazioni degl' incrementi, ai quali corrisponde per* y *una data funzione di* x *algebraica razionale ed intiera.*

RISOLUZIONE.

Assunta generalmente per y l' equazione (B)
$(B) \ldots y = a + bx + cx^2 + ex^3 + \text{ecc.} \ldots\ldots + mx^n$
si metta in ogni termine successivamente per x il modulo $x + X$, indi $x + X + X'$, $x + X + X' + X'$ ecc. fino ad $x + X + X' \ldots + X^{n-1}$ corrispondentemente al grado n dell' equazione (A). Si avrà
$o = (a + bx + cx^2 + \text{ecc.} \ldots + mx^n) M$
$+ \left(a + b(x+X) + c(x+X)^2 + e(x+X)^3 + \text{ecc.} \ldots + m(x+X)^n\right) N$
$+ (a + b(x+X+X') + c(x+X+X')^2 + e(x+X+X')^3 + \text{ecc.} \ldots$
$+ m(x+X+X')^n) P + \text{ecc.}$
equazione generale, che abbraccia tutte le equazioni

degl' incrementi ricercate. Imperciocchè, ſe ſia l'equazione (A) del ſecondo grado, ſarà Q con tutti gli altri coefficienti $=o$. In conſeguenza l'equazione degl' incrementi, a' quali corriſponde per y la funzione ſemplice $a+bx$, ſarà (C)

$$(C)....o=(M+N+P)a+(M+N+P)bx+(N+P)bX+PbX'$$

Similmente l'equazione degl' incrementi, a' quali corriſponde per y la funzione biforme $a+bx+cx^2$, ſarà (D)

$$(D)..\ o=(M+N+P)a+(M+N+P)bx+(M+N+P)cx^2$$
$$+(Nb+2Ncx+Pb+2Pcx)X+(Nc+Pc)X^2$$
$$+(Pb+2Pcx)X'+PcX'^2+2PcXX'$$

e così ſucceſſivamente per tutte le altre. Nello ſteſſo modo ſi determineranno le Equazioni ſucceſſive degl' incrementi per un' equazione (A) del terzo grado, del quarto ecc. a' quali corriſponde per y una funzione di x razionale ed intiera ſemplice, biforme, triforme ecc., come dovea trovarſi.

COROLLARIO.

§. XXXVII. Si ſcorge quindi I. che le equazioni degl' incrementi ſono anch'eſſe differenziali finite, ma di grado n-1, cioè proſſimo inferiore al grado dell' equazione (A). II. che non può mai avere y valore algebraico razionale ed intiero con incremento coſtante, ſe tutti li coefficienti M, N, P. ecc. ſieno quantità coſtanti; ed eſſendo eſſi quantità coſtanti, l' incremento dovrà neceſſariamente eſſere variabile.

SCOLIO.

§. XXXVIII. L' introduzione de' moduli variabili $x+X$, e l' uſo fatto delle eſpreſſioni differenziali

$$y+A\frac{dy}{dx}+B\frac{ddy}{dx^2}+C\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ecc.}$$

procedenti all' infinito, ci portano naturalmente a ſcoprire una conneſſione non atteſa, che può avere un' infinità di queſte eſpreſſioni coll' equazioni differenziali a differenze finite, eſſendo anche A, B ecc. coefficienti variabili. Non ſenza ragione parlando il Sig. *Eulero*, nel II. Vol. del ſuo Calcolo Integrale pag. 459, dell' equazione differenziale

$$X=y+\frac{dy}{dx}+\frac{ddy}{dx^2}+\frac{d^3y}{dx^3}+\text{ecc. all' infinito},$$

e di un comodo modo di eſprimere il ſuo Integrale, aſſeriſce, ch' ella è coſa, *altioris indaginis*, *neque adhuc ad hunc ſcopum Analyſeos fines ſatis videntur promoti*. Riflettendo pertanto alla riduzione fattaſi in queſta Memoria dell' integrazione così di funzioni ſemplici, come di equazioni a differenze finite, all' integrazione di ſimili eſpreſſioni ſcorrenti all' infinito, e alla variabilità, onde poſſono eſſere affetti i coefficienti de' termini, che le compongono, atteſa la variabilità de' moduli delle differenze, non è difficile, che meritar poſſa l' attenzione de' Geometri un sì fatto legame, per cui l' integrazione di un' infinità di ſimili equazioni d' infiniti termini dipende da quella di equazioni differenziali finite incomparabilmente più trattabili, che quelle non ſono.

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXXIX. *Propoſta l' equazione differenziale*

$$(A)\ldots\ldots My+Ny'=Q$$

a differenze finite con qualſivoglia modulo y+X, *eſſendo* M, N, Q *funzioni qualunque di* x *o coſtanti*, *come ſi vuole*, *trovare il ſuo integrale completo*.

RISOLUZIONE.

Si finga $y = A(x)\,B(x)$, essendo $A(x)$, $B(x)$ funzioni di x indeterminate. Sarà differenziando $\Delta y = \Delta A(x)$ $B(x)$. Ma
$\Delta y = y' - y$, $\Delta A(x)\,B(x) = A(x+X)B(x+X) - A(x)B(x)$, e $A(x+X) = A(x) + \Delta A(x)$, $B(x+X) = B(x) + \Delta B(x)$ (§. II).
Dunque $y' - y = \big(A(x) + \Delta A(x)\big)\big(B(x) + \Delta B(x)\big) - A(x)$ $B(x)$, e però $y' = A(x)\Delta B(x) + B(x)\Delta A(x) + \Delta A(x)\Delta B(x)$.
Sostituendo pertanto nell' equazione (A) i valori di y, y', e posto $A(x) = R$, $B(x) = T$, si avrà
$MRT + NR\Delta T + MT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$;
e poichè due sono le funzioni indeterminate, si assumano le due equazioni

(I) $MRT + NR\Delta T = 0$

(II) $NT\Delta R + N\Delta R\Delta T = \mathfrak{Q}$.

Dalla prima risulta $MT + N\Delta T = MT + NT' - NT$
$= (M-N)T + NT' = 0$, $T = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)$ (§. XXXII),
$\Delta T = -\frac{MT}{N}$, e però $T + \Delta T = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right) - \frac{MT}{N}$.
Sostituendo questi valori nell' equazione (II) si avrà
$\Delta R = \frac{\mathfrak{Q}}{N(T+\Delta T)} = \frac{\mathfrak{Q}}{(M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)}$, e però integrando
$R = \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right)$. Dunque
$y = RT = \pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\left(K + \int\left(\mathfrak{Q} : (M-N)\pi_{,}\left(\frac{N-M}{N}\right)\right)\right)$
sarà l' integrale completo dell' equazione (A) essendo K la costante arbitraria. Il che ecc.

SCOLIO

SCOLIO.

§. XL. E' facile comprendere, che non può mai aversi il valore esplicito della funzione y, se non si assegni l' integrale della funzione $\frac{\mathfrak{Q}}{M-N}\pi,\left(\frac{N-M}{N}\right)$ essendo $x+X$ il modulo della differenza finita. E perchè avremo occasione di vedere in seguito, che di somiglianti parti integrali è composto l' integrale completo dell' equazioni differenziali di grado superiore al primo, sembra che non possa mai abbastanza coltivarsi il calcolo integrale delle funzioni semplici, su cui ci siamo trattenuti nel Cap. precedente, per quello che dall' estensione di questo, secondo differenti moduli, dipenderà sempre l' estensione e il progresso del Calcolo integrale dell' equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XV.

§. XLI. *Proposta generalmente l' equazione differenziale finita* (A)

$(A)\ldots\mathfrak{Q}=Ay+By'+Cy''+$ ecc.

nella quale A, B, C *ecc. e* Q *sono funzioni di* x, e x+X *è il modulo delle differenze, definire il suo Integrale completo, o la sua riduzione generale.*

RISOLUZIONE.

Si ponga I. $y'=zy+v$, essendo z ed v funzioni di x indeterminate.

Mettendo successivamente $x+X$ in luogo di x, sarà

II. $y''=z'y'+v'$

III. $y'''=z''y''+v''$

IV. $y''''=z'''y'''+v'''$

ecc.

Si sostituisca nella II. equazione il valore di y' tratto dalla I., e si avrà l'equazione (a)

$(a)\ y'' = z'zy + z'v + v'$

e sostituendo nella III. il valore di y'' tratto dall'equazione (a), si avrà l'equazione (b)

$(b)\ y''' = z''z'zy + z''z'v + z''v' + v''$

Continuando a fare queste successive sostituzioni per determinare i valori di y'''', y''''' ecc. si scuopre con facilità essere generalmente

$$y^n = yz.z\dots z^{n-1} + vz'.z''\dots z^{n-1} + v'z''.z'''\dots z^{n-1}$$
$$+ v''z'''.z''''\dots z^{n-1} + v'''z''''z'''''\dots z^{n-1} + \text{ecc.}$$

Adunque mettendo i valori successivamente di y', y'' ecc. nell'equazione (A), si avrà l'equazione (B)

$$(B)\dots\dots Q = Ay$$
$$+ Bzy + Bv$$
$$+ Cz'.zy + Cz'v + Cv'$$
$$+ Dz''.z'.zy + Dz''.z'v + Dz''v' + Dv''$$
$$+ Ez'''.z''.z'.zy + Ez'''.z''.z'v + Ez'''.z''v' + Ez'''v'' + Ev'''$$
$$+ Fz''''.z'''.z''.z'.zy + Fz''''.z'''.z''.zv + Fz''''.z'''.z''v'$$
$$+ Fz''''.z'''.v'' + Fz''''.v''' + Fv'''' + \text{ecc.}$$

Essendo pertanto due le funzioni indeterminate, si ponga $= o$ la prima serie verticale de' termini, cioè l'aggregato di tutti i termini, ne' quali entra la funzione y, e l'aggregato di tutti gli altri $= Q$. E però dividendo la prima equazione per y, si avrà

$$(C)\dots\dots o = A + Bz + Cz.z' + Dz.z'.z''.Ez.z'.z''.z''' + \text{ecc.}$$
$$(D)\dots\dots Q = (B + Cz' + Dz'.z'' + Ez'.z''.z''' + \text{ecc.})v$$
$$+ (C + Dz'' + Ez''.z'''. + Fz''.z'''.z'''' + \text{ecc.})v'$$
$$+ (D + Ez''' + Fz'''.z'''' + \text{ecc.}\dots\dots\dots)v''$$
$$+ (E + Fz'''' + \text{ecc.}\dots\dots\dots\dots)v'''$$
ecc.

Posto ciò, si supponga $z = \frac{r'}{r}$, essendo r una nuova funzione di x indeterminata. L'equazione (C) prende questa forma.

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r'}{r}.\frac{r''}{r'} + D\frac{r'}{r}.\frac{r''}{r'}.\frac{r'''}{r''} + \text{ecc.}$$

cioè questa

$$o = A + B\frac{r'}{r} + C\frac{r''}{r} + D\frac{r'''}{r} + E\frac{r''''}{r} + \text{ecc.}$$

la quale, fatta la moltiplicazione per r, diventa (E)

$$(E) \ldots\ldots o = Ar + Br' + Cr'' + Dr''' + \text{ecc.}$$

e se si faccia la stessa sostituzione nell'equazione (D), si ottiene l'equazione (F)

$$(F) \ldots\ldots \mathcal{Q} = \left(B + C\frac{r''}{r'} + D\frac{r'''}{r'} + E\frac{r''''}{r'} + \text{ecc.}\right)v$$

$$+ \left(C + D\frac{r'''}{r''} + E\frac{r''''}{r''} + F\frac{r'''''}{r''} + \text{ecc.}\ldots\right)v'$$

$$+ \left(D + E\frac{r''''}{r'''} + F\frac{r'''''}{r'''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v''$$

$$+ \left(E + F\frac{r'''''}{r''''} + G\frac{r''''''}{r''''} + \text{ecc.}\ldots\ldots\right)v'''$$

$$+ \text{ ecc.}$$

L'integrazione pertanto dell'equazione (A) dipende dall'integrazione delle equazioni (E), (F), la prima delle quali è dello stesso grado n dell'equazione (A), oppure lo stesso, che l'equazione (A) in supposizione di $\mathcal{Q} = o$, sol che si metta r in luogo di y, e la seconda del grado n-1, siccome è manifesto. Se dunque I. si abbia per r un valore, che soddisfaccia all'equazione (E), e il si sostituisca in (F), co' suoi valori successivi r', r'' ecc. ponendo cioè in r successivamente $x + X$, $x + X + X'$ ecc. in luogo di x, dipenderà l'integrazione dell'equazione (A) dall'integrazione dell'equazione (F) del grado prossimo inferiore n-1. II. Se si abbiano due valori differenti per r nell'equazione (E), e si sostituiscano successivamente in (F), risultandone due equazioni, si potrà eliminare la funzione

v^{n-1}, ſicchè l'integrazione dell'equazione (A) dipenderà da un'equazione del grado $n-2$, e così in ſeguito. Se dunque ſi abbia per r un numero n di valori differenti a, a', a'' ecc. nell'equazione (E), ſi potrà trovare l'integrale completo dell'equazione (A). Imperciocchè dalle ſoſtituzioni ſucceſſive di queſti valori nell'equazione (F) riſultando n equazioni differenti, ſi potranno eliminare ſucceſſivamente le funzioni v^{n-1}, v^{n-2} ecc. e determinare il valore finito di v. Ripigliando poi l'equazione $y' = zy + v$, e ſoſtituendovi ſucceſſivamente li n valori di $\frac{r'}{r}$ in luogo di z, e il valore di v, ſi avrà un numero n di equazioni di primo grado, le quali riſolute col metodo della Propoſizione XIV. daranno n valori differenti di y, sì che eſſendo l'equazione (A) lineare, queſti valori preſi inſieme coſtituiranno il ſuo integrale completo, contenendo di fatto n coſtanti arbitrarie. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLII. Se ſi abbia pertanto l'integrale completo dell'equazione (A) in ſuppoſizione di $\mathfrak{Q} = o$, con che ſi ha pure l'integrale completo dell'equazione (E), contenendo egli un numero n di coſtanti arbitrarie, baſterà fare ſucceſſivamente tutte queſte coſtanti, meno una, eguali a zero. Si avranno per queſto mezzo n valori particolari di r, ſoddisfacenti all'equazione (E), e di più compreſi nell'integrale generale, ſicchè operando come qui ſopra, ſenza aggiugnere nuove coſtanti arbitrarie, ſi avrà l'integrale completo dell'equazione (A).

COROLLARIO II.

§. XLIII. Reſta dunque pienamente dimoſtrato, che l'equazione (A)

$(A) \ldots . \mathfrak{Q} = Ay + By' + Cy'' + Dy''' +$ ecc.
farà completamente integrabile tutte le volte che si avranno n valori differenti di y, o l'integrale completo dell'equazione (A) in supposizione di $\mathfrak{Q} = o$.

SCOLIO.

§. XLIV. Questo è il Teorema del Sig. de la *Grange*, ch'egli dimostrò prima per le equazioni a differenze infinitesime nel III. Volume degli *Atti della Società Reale di Torino*. Dimostrarono in seguito aver egli luogo anche nell' equazioni a differenze finite cogl' incrementi costanti il Sig. Marchese de *Condorcet*, e il Sig. de la *Place*, e lo dimostrò pure ultimamente il Sig. de la *Grange* negli *Atti della Società Reale di Berlino* per l'anno 1775. Ora il si è dimostrato di bel nuovo per altra via, e per qualsivoglia modulo $x + X$ delle differenze, e l'ho fatto pure con questo stesso metodo per le equazioni lineari a differenze infinitesime. Ancorchè l'ultimo metodo immaginato dal Sig. de la *Grange* sia sommamente ingegnoso, sembra che in semplicità almeno non ceda il presente a qualunque altro nell' uno e nell'altro genere di equazioni differenziali.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XLV. *Proposta l'equazione differenziale finita* (A)
$(A) \ldots . . \mathfrak{Q} = Ay + By' + Cy'' + Dy''' +$ ecc.
in cui Q *è funzione di* x, A, B, C, ecc. *sono quantità costanti*, x + X *il modulo generale*, *ritrovare il suo integrale completo.*

RISOLUZIONE.

Posto come prima I. $y' = ay + v$, essendo v funzione indeterminata di x, a costante indeterminata; sarà variando

$y'' = ay' + v'$
$y''' = ay'' + v''$
ecc.

e facendo le successive sostituzioni, come nella preced. Propos. sarà

$y'' = a^2y + av + v'$
$y''' = a^3y + a^2v + av' + v''$
$y'''' = a^4y + a^3v + a^2v' + av'' + v'''$
ecc.

e però sostituendo questi valori nell' equazione (A), si avrà l' equazione seguente

$$\mathfrak{Q} = Ay$$
$$+ Bay + Bv$$
$$+ Ca^2y + Cav + Cv'$$
$$+ Da^3y + Da^2v + Dav' + Dv''$$
ecc.

e in seguito le due equazioni (B), (C)

$$(B) \ldots 0 = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + Ea^4 + \text{ecc.}$$
$$(C) \ldots \mathfrak{Q} = (B + Ca + Da^2 + Ea^3 + \text{ecc.})\, v$$
$$+ (C + Da + Ea^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v'$$
$$+ (D + Ea + Fa^2 + \text{ecc.} \ldots)\, v''$$
ecc.

delle quali la (C) è del grado $n - 1$, e può ridursi alla forma

$$(D) \ldots \mathfrak{Q} = A'v + B'v' + C'v'' + D'v''' + \text{ecc.}$$

essendo A', B', C' ecc. funzioni costanti di a, B, C ecc.. E' facile I. a vedersi, come nella Prop. precedente, che risolvendo l' equazione determinata (B) si conseguiscono n valori differenti per l' indeterminata a, la quale ascende al grado dell' equazione proposta (A); e però facendone successivamente la sostituzione nell' equazione (D), onde ottenere n equazioni, si può (§. XLI) pervenire ad un valore finito di v. Dato questo valore, che diremo P, si possono formare coll' equazione

$$y' = ay + P$$

n equazioni differenti, ponendovi successivamente li n

valori di a tratti dall' equazione (B), e trovando n valori differenti di y colle rispettive costanti arbitrarie, si può ottenere col loro aggregato l' integrale completo dell' equazione (A). II. Ma si può tenere ancora un' altra strada. Imperciocchè, essendo l' equazione (D) del grado $n-1$, la si tratti come l' equazione (A), facendo

$$\text{II. } v' = bv + q$$

essendo b una nuova costante indeterminata, q una nuova funzione di x. Si otterranno le due equazioni

$$(B') \ldots . \; 0 = A' + B'b + C'b^2 + D'b^3 + \text{ecc.}$$

$$(D') \ldots . \; \mathfrak{Q} = A''q + B''q' + C''q'' + D''q''' + \text{ecc.}$$

essendo A'', B'' ecc. funzioni costanti di A', B' ecc., e di b, e l' equazione (D') sarà del grado $n-2$. Di nuovo trattando l' equazione (D'), come l' equazione (A), ponendo

$$\text{III. } q' = cq + r$$

essendo c indeterminata costante, r funzione di x, si avranno le due equazioni

$$(B'') \ldots . \; 0 = A'' + B''c + C''c^2 + D''c^3 + \text{ecc.}$$

$$(D'') \ldots . \; \mathfrak{Q} = A''' + B'''r' + C'''r'' + D'''r''' + \text{ecc.}$$

delle quali la (D'') e del grado $n-3$, A''', B''' ecc. funzioni costanti di A'', B'' ecc. e di c; e così proseguendo si potrà pervenire ad un' equazione (D^n) del grado $n-n$. Sia per facile intelligenza (D'') quest' equazione finale. Si avrà un valore finito per r. Dunque si otterrà il valore di q dall' equazione III. con una costante arbitraria. Ma essendo data la funzione q si avrà dall' equazione II. un valore di v con una nuova costante arbitraria, cioè l' integrale completo dell' equazione (A), avendovi n costanti arbitrarie, sol che si determinino le costanti a, b, c. Basta pertanto trovare una radice unica per a dall' equazione (B), un' altra per b dall' equazione (B'), ed una terza per c dall' equazione (B''), cioè in generale una sola radice per ciascheduna delle equazioni determinate (B), (B'), (B'')

ecc.; e si avrà per questo mezzo l' integrale completo dell' equazione (A). Tutte le volte dunque, che queste equazioni determinate possono darci una sola radice reale per ciascheduna, il metodo ci esenta dalla considerazione così delle radici eguali, come dalle immaginarie, che potrebbero aver luogo nell' equazione determinata (B), attenendosi alla sua sola risoluzione, come s' è praticato sinora in casi simili. Il che ecc.

SCOLIO I.

§. XLVI. Il Metodo semplicissimo usato nelle Proposizioni XV, e XVI non è altramente ristretto al modulo comune $x + 1$, siccome quello che si estende su d' ogni sorta d' incremento, anche variabile. Il caso di avere riguardo alla natura del modulo si riduce al momento di assegnare valori espliciti agl' integrali delle funzioni semplici differenziali $\int M; \pi,\left(\frac{1}{M}\right)$ ecc., cosa che segnatamente appartiene al Cap. precedente, e di cui s' è fatto parola al §. XL.

SCOLIO II.

§. XLVII. Osservo, che nella Teoria dell' equazioni lineari a differenze infinitesime espresse generalmente dall' equazione (A)

$$(A) \ldots \mathfrak{Q} = y + \frac{Ady}{dx} + \frac{Bddy}{dx^2} + \frac{Cd^3y}{dx^3} + \text{ecc.}$$

tutti gli Analisti si sono limitati al caso de' coefficienti A, B, C ecc. costanti; e nella supposizione che A, B ecc. sieno funzioni della variabile x, si sono contentati di enunciare, che dato l' integrale generale dell' equazione (A) in supposizione di $\mathfrak{Q} = 0$, o dato un numero n, o $n - 1$ almeno, d' integrali particolari di quell'

quell'equazione in tale ipotesi. si conseguisce l'integrale completo dell' equazione (A). Ma non si è tentato ancora cosa alcuna di generale su questo proposito. Lo stesso è accaduto dell' equazione differenziale (A') a differenze finite.

$$(A) \ldots \mathfrak{Q} = y + Ay' + By'' + Cy''' + \text{ecc.}$$

E' vero, come dice il Sig. de la *Grange* (*Mem. dell' Accad. Reale di Berlino* 1775), che non è possibile il farlo *a priori* con alcun metodo cognito; ma si può bene non senza frutto mettere in opera più d'un artifizio indiretto. Mi accingo qui pertanto a fare qualche primo passo, che non sarà per avventura del tutto infruttuoso, non mai con intenzione di prevenire questo Illustre Geometra, se mai continuasse nel suo proposito di farne soggetto delle sue meditazioni, ma perchè l' occasione il richiede. Facendo considerazione, che l' equazione lineare del primo grado

$$My + Ny' = 0$$

ammette generalmente una risoluzione di questa forma (§. XXXII)

$$y = K\pi_{,}\left(-\frac{M}{N}\right)$$

qualunque funzione di x sieno M, N; e che per essere lineare l' equazione generale può il suo integrale generale essere composto dell' aggregato di un numero n d' integrali di questa forma, essendo ella forse, se non esclusiva, almeno la forma che affettano per lo più gl' integrali di queste equazioni ne' casi d' integrabilità, che ci sono in potere, mi parve che si potesse per questo mezzo aprire un campo vastissimo all' integrazione di tutte le equazioni, che fossero differenziali esatti di qualche integrale d' una tal forma generale.

Eccone un Saggio.

PROPOSIZIONE XVII.

§. XLVIII. *Trovare tutte le equazioni differenziali a differenze finite, e a coefficienti variabili, suscettibili d' Integrale completo d' una data forma generale.*

RISOLUZIONE.

Si assumano le equazioni differenziali (II), (III), (IV) ecc. di grado in grado, negletto il primo, comprese nell' equazione generale (A')

$(A')\ldots\ldots 0 = y + Ay' + By'' + Cy''' + Dy'''' + \text{ecc.}$

ma sotto una forma indeterminata

$(II)\ldots\ldots 0 = y + f(\phi,\mu)y' + f'(\phi,\mu)y''$

$(III)\ldots\ldots 0 = y + f(\phi,\mu,\omega)y' + f'(\phi,\mu,\omega)y'' + f''(\phi,\mu,\omega)y'''$

$(IV)\ldots\ldots 0 = y + f(\phi,\mu,\omega,\lambda)y' + f'(\phi,\mu,\omega,\lambda)y'' + f''(\phi,\mu,\omega,\lambda)y'''$
$+ f'''(\phi,\mu,\omega,\lambda)y''''$ ecc.

essendo ϕ, μ, ω, λ ecc. funzioni indeterminate di x, $f(\phi, \mu$ ecc.$)$, $f'(\phi, \mu$ ecc.$)$ ecc. funzioni indeterminate di ϕ, μ, ω, λ ecc.

Il numero delle funzioni ϕ, μ, ω ecc. introdotte in ogni equazione è uguale al grado dell' equazione da risolvere. Posto ciò, l' equazione (I) rappresenti l' integrale completo dell' equazione (A')

$$(I)\ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(K'' + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\left(K''' + \text{ecc.}\right.\right.\right.\right.$$

essendo K, K', K'' ecc. le costanti arbitrarie, di modo che richiedendosi l' integrale completo dell' equazione (II), sia egli

$$(II')\ldots\ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + K'\int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right),$$

l' integrale dell' equazione (III), sia

$$(III')\ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + K''\int \pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\right)\right)$$

l'integrale dell'equazione (IV), ſia

$$(IV')\ldots y = \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(K' + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)\left(K'' + K''' \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)\right)\right)$$

e così in ſeguito.

Si prendano per ordine le differenze di queſte equazioni, onde determinare le funzioni $f(\phi, \mu$ ecc.$)$, $f'(\phi, \mu$ ecc.$)$ ecc. nelle equazioni aſſunte (II), (III) ecc., e però cominciando dall' equazione (II'), la ſi divida per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, ſicchè ſia

$\dfrac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)} = K + K' \int \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Sarà differenziando

$\dfrac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)} - \dfrac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)} = K' \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)$, e però

$\dfrac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right) y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)} - y = K' \pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right) \pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)$. Ma $\dfrac{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)} = \phi$

(§. XXV.). Dunque $\dfrac{\phi y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)} - \dfrac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)} = K'$

e però, differenziando di nuovo, ſi avrà

$$\frac{\phi' y''}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)} - \frac{\phi y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)} - \frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)}$$

$$+\frac{y}{\pi_{,}(\frac{1}{\phi})\pi_{,}(\frac{1}{\mu})}=0$$

Si faccia la moltiplicazione per $\pi_{,}(\frac{1}{\phi})\pi_{,}(\frac{1}{\mu})$; e perchè $\frac{\pi_{,}(\frac{1}{\phi})\pi_{,}(\frac{1}{\mu})}{\pi_{,}(\frac{1}{\phi'})\pi_{,}(\frac{1}{\mu'})}=\phi\mu$ (§. XXVII.), si avrà l'equazione

$(II')\ldots y-\phi(1+\mu)y'+\phi\phi'\mu y''=0$.

Restano pertanto determinate le funzioni f, f', essendo $f(\phi,\mu)=-\phi(1+\mu)$; $f'(\phi,\mu)=\phi\phi'\mu$, e però l' equazione (II') è l' integrale completo dell' equazione differenziale (II'), qualunque funzione di x sieno μ, e ϕ, e qualunque il modulo delle differenze.

Di nuovo si divida l' equazione (III') per $\pi_{,}(\frac{1}{\phi})$, e si differenzj. Sarà

$$\frac{y'}{\pi_{,}(\frac{1}{\phi'})}-\frac{y}{\pi_{,}(\frac{1}{\phi})}=K'\pi_{,}(\frac{1}{\mu})+K''\pi_{,}(\frac{1}{\mu})\int\pi_{,}(\frac{1}{\omega})\ ;$$

e moltiplicando per $\pi_{,}(\frac{1}{\phi})$, sarà

$$\phi y'-y=K'\pi_{,}(\frac{1}{\phi})\pi_{,}(\frac{1}{\mu})+K''\pi_{,}(\frac{1}{\phi})\pi_{,}(\frac{1}{\mu})\int\pi_{,}(\frac{1}{\omega}).$$

Dunque

$$\frac{\phi y'-y}{\pi_{,}(\frac{1}{\phi})\pi_{,}(\frac{1}{\mu})}=K'+K''\int\pi_{,}(\frac{1}{\omega}).$$

Si differenzj la seconda volta. Sarà

$$\frac{\phi' y''}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}-\frac{\phi y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}-\frac{y'}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu'}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi'}\right)}$$

$+\dfrac{y}{\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)}=K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)$; e moltiplicando tutto per $\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)$, farà $\phi\phi'\mu y''-\phi y'-\phi\mu y'+y$ $=K''\pi_{,}\left(\frac{1}{\phi}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\mu}\right)\pi_{,}\left(\frac{1}{\omega}\right)$; e facendo il coefficiente di $K''=R$, fi divida l' equazione per R. Si avrà

$$\frac{\phi\phi'\mu y''}{R}-\frac{\phi(1+\mu)y'}{R}+\frac{y}{R}=K''.$$

Si differenzj la terza volta, e farà

$$\frac{\phi'\phi''\mu' y'''}{R'}-\frac{\phi\phi'\mu y''}{R}-\frac{\phi'(1+\mu')y''}{R'}+\frac{\phi(1+\mu)y'}{R}+\frac{y'}{R'}$$

$-\dfrac{y}{R}=0$ E poichè $\dfrac{R}{R'}=\phi\mu\omega$ (§. XXVII), fe fi moltiplichi queft' equazione per R, fi avrà l' equazione differenziale

$$(\text{III}'')\ldots.y-\phi(1+\mu+\mu\omega)y'+\phi\phi'(\mu+\mu\mu'\omega+\mu\omega)y''$$
$$-\phi\phi'\phi''\mu\mu'\omega y'''=0$$

di cui farà integrale completo l' equazione (III'), qualunque funzione di x fieno ϕ, μ, ω, e qualunque il modulo $x+X$.

Collo fteffo metodo differenziando quattro volte fucceffivamente l' equazione (IV'), fi perverrà all' equazione differenziale

$$(\text{IV}'')\ldots.y-\phi(1+\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda)y'+\phi\phi'(\mu+\mu\omega+\mu\omega\lambda$$
$$+\mu\mu'\omega+\mu\mu'\omega\lambda+\mu\mu'\omega\omega'\lambda)y''-\phi\phi'\phi''(\mu\mu'\omega+\mu\mu'\omega\lambda$$
$$+\mu\mu'\omega\omega'\lambda+\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda)y'''+\phi\phi'\phi''\phi'''\mu\mu'\mu''\omega\omega'\lambda y''''=0$$

e così all' infinito. Il che ecc.

COROLLARIO I.

§. XLIX. La differenziazione può continuarsi pe' gradi superiori senza necessità di cominciare da' primi, essendo la quarta norma per la quinta, questa per la sesta, e così successivamente. E poichè integrando l'equazione (A') in supposizione, che l' omogeneo di comparazione sia $= 0$, si può ella integrare anche in supposizione ch' egli sia $= \mathfrak{Q}$ funzione di x (§. XLIII); è manifesto, che s' integreranno le equazioni (II″), (III″) ecc. anche in supposizione, che s' abbia per omogeneo una funzione di x qualunque.

COROLLARIO II.

§. L. Proposta pertanto qualsivoglia equazione differenziale finita del grado n a coefficienti variabili

$$\mathfrak{Q} = y + Ay' + By'' + Cy''' + \text{ecc.}$$

ella avrà integrale completo della forma (I) (§. XLVIII) in supposizione di $\mathfrak{Q} = 0$, sempre che sia ella reducibile all' equazione differenziale corrispondente (II″), (III″) ecc. E perchè s' identifichino, converrà che i coefficienti delle funzioni y', y'' ecc. nelle equazioni (II″), (III″) ecc. sieno rispettivamente uguali ai coefficienti A, B ecc. dell' equazione proposta. Quindi essendo il numero delle funzioni indeterminate ϕ, μ ecc. uguale al grado dell' equazione; e uguale a questo grado essendo pure il numero de' coefficienti da paragonare rispettivamente, si avranno tante equazioni, quanto è il numero delle funzioni indeterminate. E ammettendo l' equazione proposta integrale completo in ipotesi di $\mathfrak{Q} = 0$, lo avrà pure in supposizione di $\mathfrak{Q}$ funzione di x, come si è osservato poc' anzi.

Corollario III.

§. LI. Non è difficile il riconoſcere anche a primo aſpetto, che non ha confini il numero delle equazioni differenziali finite a coefficienti variabili che ſi poſſono integrare con queſto metodo. Laſciando da parte l'aſſunzione libera di qualſivoglia funzione di x per le indeterminate ϕ, μ, ω ecc. col mezzo della quale ſi poſſono aſſegnare equazioni differenziali ſenza numero e di qualunque grado, ſuſcettibili tutte d' una completa integrazione, non è egli del tutto inefficace per un' infinità eziandio di equazioni differenziali a coefficienti variabili dati. Imperciocchè, eſaminando la natura delle equazioni di relazione, che ci riſultano dal paragone de' coefficienti dati cogli aſſunti, ſi vede patentemente, ch' elle ſono differenziali finite, e che ſi può ſempre pervenire prima ad una Ridotta del grado n in ϕ e coefficienti dati, indi ad altre ſucceſſivamente inferiori del grado $n-1$, $n-2$ ecc. in μ, ω ecc. In conſeguenza ſe ſi abbia un Integrale particolare per ciaſcheduna di queſte equazioni gradatamente inferiori, ſi ha immediatamente l' integrale completo dell' equazione propoſta, qualunque coſa ſieno i coefficienti dati, il che ci offeriſce una ſoluzione diretta del Problema. E ſe non ſi poſſono conſeguire *a priori* tutti queſti integrali particolari ſucceſſivi, ſi può ſempre tanti aſſumerne ad arbitrio, quanti poſſono occorrere per determinare le altre funzioni indeterminate, sì che reſti diſobbligato il maggior numero poſſibile di coefficienti dati. Facciamo di tutto ciò un qualche ſvolgimento a illuſtrazione del Metodo.

I.

Sia primieramente propoſta l' equazione (A)
$(A) \ldots . 0 = y + My' + Ny''$
a cui ſi riducono tutte le equazioni differenziali di ſecondo ordine. Paragonata coll' equazione (II''), ſarà d' uopo per l' identificazione, che abbiano luogo le due equazioni

$$-\phi - \phi \mu = M$$
$$\phi \phi' \mu = N$$

la ſeconda ſomminiſtra $\mu = \frac{N}{\phi \phi'}$, il qual valore ſoſtituito nella prima ci dà l' equazione in ϕ

$$-1 = \frac{M}{\phi} + \frac{N}{\phi \phi'}$$

cioè, poſto $\frac{1}{\phi} = \frac{z'}{z}$ l' equazione

$$z + Mz' + Nz'' = 0$$

che è lo ſteſſo che l' equazione (A) poſto z in luogo di y.

Se ſi abbia pertanto un ſolo valore particolare per $z = p$ ſoddisfacente a queſt' equazione, ſarà $\phi = \frac{p}{p'}$, $\mu = \frac{Np''}{p}$, e però $y = \pi_{,} \left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + K' \int \pi_{,} \left(\frac{p}{Np''}\right)\right)$ ſarà l' integrale completo dell' equazione generale (A), eſſendo M, N funzioni di x qualunque. Che ſe non foſſe per alcun modo poſſibile il ritrovare l' integrale particolare p, ſi prenda $\phi = p$ funzione qualſivoglia di x ad arbitrio. Si avrà $\mu = \frac{N}{pp'}$, e l' integrale completo

dell'

dell' equazione (A) sarà $y=\pi_{,}(\frac{1}{p})\left(K+K'\int\pi_{,}(\frac{pp'}{N})\right)$
purchè i due coefficienti M, N abbiano tra di sè la relazione seguente

$$Mp'+pp'+N=o$$

con che uno dei due resta determinato per l' altro, e per la funzione p assunta ad arbitrio. In conseguenza le due equazioni differenziali di secondo ordine

$$o=y+My'-p'(p+M)y''$$

$$o=y-\left(\frac{N+pp'}{p'}\right)y'+Ny''$$

saranno completamente integrabili, qualunque funzione di x sieno M, e p per la prima, ed N, e p per la seconda.

II.

Sia l' equazione (B)

$$(B)\ldots\ldots o=y+My'+Ny''+Py'''$$

a cui si riducono tutte le equazioni differenziali di terzo ordine.

Perchè ammetta ella l' integrale (III'), dovranno aver luogo le equazioni

$$1+\mu+\mu\omega=-\frac{M}{\phi}=A$$

$$\mu+\omega\mu\mu'+\mu\omega=\frac{N}{\phi\phi'}=B$$

$$\mu\mu'\omega=-\frac{P}{\phi\phi'\phi''}=C$$

Sottraendo la prima dalla seconda, e dal residuo sottraendo la terza, sarà

$$1+\frac{M}{\phi}+\frac{N}{\phi\phi'}+\frac{P}{\phi\phi'\phi''}=o$$

cioè, posto $\frac{1}{\phi}=\frac{z'}{z}$, sarà la ridotta del grado n

$(C) \ldots\ldots z + Mz' + Nz'' + Pz''' = o$

Per trovare la seconda Ridotta in μ del grado $n-1$, si dispongano le equazioni di relazione de' coefficienti in questo modo

$$\frac{A-1}{\mu} = 1 + \omega$$

$$\frac{C}{\mu\mu'} = \omega$$

Sottraendo la prima dalla seconda equazione, risulta immediatamente

$$\frac{C}{\mu\mu'} - \frac{A-1}{\mu} = -1$$

e però, posto $\frac{1}{\mu} = \frac{r'}{r}$, si avrà

$(D) \ldots\ldots o = r - (A-1) r' + C r''$

Tutte le volte pertanto, che si possa avere per z un valor particolare p dall'equazione (C), con che si avrà $\phi = \frac{p}{p'}$, e sostituito questo valore in A, e C, si abbia pure per r un valor particolare q dall'equazione (D), il quale darà $\mu = \frac{q}{q'}$, e $\omega = \frac{C}{\mu\mu'} = \frac{Cq''}{q}$, sarà

$$y = \pi_{,}\left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{q'}{q}\right)\left(K' + K'' \int \pi_{,}\left(\frac{q}{Cq''}\right)\right)\right)$$

l' integrale completo di tutte le equazioni differenziali di terzo ordine, qualunque funzione di x sieno M, N, P.

Ma se non possono aversi questi valori particolari per ϕ, e μ, si assumano in luogo loro funzioni di x di qualunque natura, cioè p per ϕ, q per μ. Sostituendo questi valori nelle due equazioni (C), (D), qual' ora pei coefficienti dell' equazione (B) abbiano luogo le seguenti equazioni,

$$pp'p'' + Mp'p'' + Np'' + P = 0$$
$$Mp'p''q' + pp'p''q' + pp'p''qq' - P = 0$$

farà

$$y = \pi_{,}\left(\frac{1}{p}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{1}{q}\right)\left(K' + K'' \int \pi_{,}\left(\frac{qq'}{c}\right)\right)\right)$$

l' integrale completo dell' equazione propoſta.

In conſeguenza generalmente le equazioni di terzo grado

$$0 = y - \left(\frac{N}{p'} + Nq' + p + pq' + pqq'\right)y' + Ny'' + (pp'p''qq' - Np''q' - Np'p''q'q' - pp'p''q'q' - pp'p''q'q')y'''$$

$$0 = y + My' - \left(\frac{p'M + pp' + pp'q' + pp'qq'}{1 + p'q'}\right)y'' + (Mp'p''q' + pp'p''q' + pp'p''qq')y'''$$

$$0 = y + \left(\frac{P - pp'p''q' - pp'p''qq'}{p'p''q'}\right)y' + \left(\frac{pp'p'p''qq' - Pp' - (pp'q' + pp'qq')pp'p''q'}{1 + p'q'}\right)y'' + Py'''$$

faranno completamente integrabili, qualunque funzione di x ſieno M, N, P, p, q

III.

Sia l' equazione (F)

$$(F) \ldots\ldots 0 = y + My' + Ny'' + Py''' + Qy''''$$

di quarto grado. Perchè poſſa ella ammettere integrale completo della forma (IV'), ſarà neceſſario che abbiano luogo le equazioni

$$(1) \ldots\ldots 1 + \mu + \mu\omega + \mu\omega\lambda = -\frac{M}{\phi} = A$$

$$(2) \ldots\ldots \mu(1 + \omega + \omega\lambda) + \mu\mu'(\omega + \omega\lambda + \omega\omega'\lambda) = \frac{N}{\phi\phi'} = B$$

$$(3)\ldots \mu\,\mu'(\omega + \omega\lambda + \omega\,\omega'\lambda) + \mu\,\mu'\,\mu''\,\omega\,\omega'\lambda = -\frac{P}{\phi\phi'\phi''} = C$$

$$(4)\ldots \mu\,\mu'\,\mu''\,\omega\,\omega'\lambda = \frac{Q}{\phi\,\phi'\,\phi''\,\phi'''} = D.$$

Sottraendo la prima dalla seconda equazione, e successivamente sottraendo il residuo dalla terza, e il nuovo residuo dalla quarta, si avrà la Ridotta in ϕ

$$-1 = \frac{M}{\phi} + \frac{N}{\phi\phi'} + \frac{P}{\phi\phi'\phi''} + \frac{Q}{\phi\phi'\phi''\phi'''}$$

cioè l' equazione seguente, posto $\frac{1}{\phi} = \frac{z'}{z}$,

$$(G)\ldots\ldots z + Mz' + Nz'' + Pz''' + Qz'''' = 0.$$

Di nuovo, disponendo le equazioni di relazione tra' coefficienti nel seguente modo

$$(5)\ldots \frac{A-1}{\mu} = 1 + \omega + \omega\lambda = A'$$

$$(6)\ldots\ldots \frac{B+1-A}{\mu\,\omega} = \omega + \omega\lambda + \omega\,\omega'\lambda = B'$$

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''} = \omega\,\omega'\lambda$$

si avrà immediatamente la Ridotta in μ

$$\frac{D}{\mu\mu'\mu''} - \frac{B+1-A}{\mu\mu'} + \frac{A-1}{\mu} - 1 = 0$$

cioè, posto $\frac{1}{\mu} = \frac{r'}{r}$, l'equazione seguente

$$(H)\ldots r - (A-1)\,r' + (B+1-A)\,r'' - Dr''' = 0$$

E di nuovo, ripigliando le equazioni (5) (6), si ha

$$\frac{A'-1}{\omega} = 1 + \lambda$$

$$\frac{B'+1-A'}{\omega\omega'} = \lambda$$

donde risulta la Ridotta in ω

$$\frac{A'-1}{\omega} - \frac{B'+1-A'}{\omega\omega'} - 1 = 0$$

cioè, posta $\frac{1}{\omega} = \frac{t'}{t}$, l' equazione

$$(J)\ldots t - (A'-1)t' + (B+1-A')t'' = 0$$

Se pertanto si abbia un valore p per z soddisfacente all' equazione (G), sicchè sia $\phi = \frac{p}{p'}$, e un valore q per r soddisfacente all' equazione (H), onde sia $\mu = \frac{q}{q'}$, e finalmente un valor particolare m per t, il quale soddisfaccia all' equazione (J), con che si abbia $\omega = \frac{m}{m'}$, e $\lambda = \frac{D}{\mu\mu'\mu''\omega\omega'} = \frac{Dm'q'''}{mq}$, sarà

$$y = \pi_{,}\left(\frac{p'}{p}\right)\left(K + \int \pi_{,}\left(\frac{q'}{q}\right)\left(K' + \int \pi_{,}\left(\frac{m'}{m}\right)\left(K'' + K''' \int \pi_{,}\left(\frac{mq}{Dm''q'''}\right)\right)\right)\right)$$

l' integrale completo dell' equazione (F), essendo M, N, P, Q funzioni di x qualunque. Che se non possano aversi sì fatti integrali particolari, sarà sempre possibile il conservare uno qualunque de' coefficienti M, N, ecc. non avendovi, come si è veduto qui innanzi, che un numero $n-1$ di equazioni di relazione tra essi da soddisfare, minore di un' unità del numero de' coefficienti. Imperciocchè, assunte ad arbitrio le funzioni p per ϕ, q per μ, m per ω, le equazioni necessarie tra coefficienti saranno quelle, che seguono

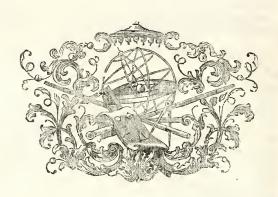
$$pp'p''p''' + Mp'p''p''' + Np''p' + Pp''' + Q = 0$$

$$pp'pp''qq'q'' + (M-p)p'p''p''q'q' + (N+pp' + Mp')p'p''q'' - Q = 0$$

$$pp'qq'mm' + N + pp' + Mp' + pp'qq' - (M-p)p'qq' - (M-2p)p'qq'm' = 0$$

E però non sarà, che un affare di calcolo, soddisfacendo a queste equazioni, il determinare le equazioni

integrabili generalmente, qualunque funzione di x sieno M, N ecc. p, q ecc., come si è fatto precedentemente.

Nello stesso modo potremo inoltrarci all' integrazione delle equazioni superiori, siccome è agevole da vedere. Ma questo per ora basti intorno al Calcolo Integrale delle equazioni differenziali finite a due variabili.

SPERIENZE

SOPRA IL PRECIPITATO PORPORA

Ottenuto dal Gaz ricavato dallo Stagno, e dalla ſua Calce.

Del Sig. CONTE MOROZZO.

1. NEL tempo, in cui l' eſame de' diverſi fluidi aeriformi forma la particolare occupazione de' Chimici, e Fiſici moderni, non credo di far coſa infruttuoſa, ſe verrò eſponendo alcune nuove ſperienze inſtituite ſopra il gaz ſuſcitato sì dallo ſtagno, che dalla ſua calce; e ſe prenderò motivo di deſcriverne alcune altre che da quelle hanno tratto origine, ed occaſione.

Non ha dubbio, che il ſodo progreſſo delle Scienze non eſigga, che ſi aduni una gran quantità di fatti ben eſaminati, e ſi moltiplichino le oſſervazioni prima di paſſare a ſtabilire teorie luminoſe; le quali alcune volte un ſolo fatto diſtrugge, ma che ſpeſſo la luſinghiera compiacenza dell' Autore, anche a coſto di ſconvolgere i primi elementi della natura, cerca ad ogni modo di produrre, e mettere nel lume che può migliore. Laonde in vece di aumentarſi il numero delle umane cognizioni ſempre più elle s' avvolgono ſotto un velo più denſo.

Spero che non incorreranno ſimil taccia le ſperienze, che mi fo a deſcrivere, poichè le conſeguenze, che ne deduco, ſono bensì ſemplici conghietture, ma coll' eſame e ravvicinamento di molti altri fatti poſſono

prendere quel grado di certezza che si richiede per ischiarire la verità in siffatte materie.

2. Prima di venire all'esposizione di queste sperienze parmi necessario di gettare un colpo d' occhio sull' apparecchio, di cui mi sono servito (veggasi la *fig. I.*). *A* è un matraccio; *B* una caraffa col tubo ricurvo perchè possa essere introdotto nel matraccio. Possono pure queste caraffe facilmente adattarsi l'una sull'altra, così che il tubo dell'una s'introduca nel collo dell'altra passando per un turacciolo di sughero; e le giunture si suggellano poi esattamente.

C è una vescica armata di chiave applicata all' ultima caraffa dell' apparecchio per raccogliere il gaz. *D* è il tubo che s' introduce nel matraccio, per cui col mezzo di un imbuto *E* si versa il liquore, e che, tolto l' imbuto, si chiude subitamente.

SPERIENZA I.

3. Riposi in un matraccio mezz' oncia di stagno d'Inghilterra ridotto in fogli, come pure un' oncia di spirito di Salmarino; indi aggiustato il matraccio ad una caraffa, la quale col suo tubo ricurvo avea con esso comunicazione, e conteneva una soluzione d' oro allungata nell'acqua distillata ch'era di color citrigno, vi versai due oncie circa di spirito di nitro, e tolto l'imbuto fu chiuso ben bene l' apparecchio.

Immediatamente cominciò l' effervescenza con calor grande, e il gaz sviluppatosi attraversò con rapidità la soluzione d' oro, e si gettò nella vescica.

La soluzione d'oro fu precipitata in color porpora dopo qualche tempo; ma ciò che mi sorprese alquanto, si è, che questo precipitato si radunò al fondo del vaso lasciando la soluzione limpida, e trasparente, come l' acqua distillata, di cui mi era servito per allungarla; ciò che non succede quando si fa la tintura porpora

di

di *Cassius*, ove tutta la soluzione prende un color intenso paonazzo, che a poco a poco si va depositando al fondo a guisa di mucilaggine, ed in cui l'acqua ritiene sovente un color rossiccio.

Esaminato il gaz raccolto nella vescica l'ho ritrovato alcune volte infiammabile con fiamma leggera, e cerulea (1); alcune volte pareva atto alla respirazione, ed a mantenere la fiamma; accidenti osservati pure da' Sigg. *Priestley*, de *Lassone*, e *Macquer* (2). Ma ho luogo di credere, che siffatte variazioni sieno prodotte dalla maniera di esaminarlo, poichè qualora è raccolto dentro ad una campana, od altro vaso, che prima sia riempiuto d'acqua, non è egli invero sempre infiammabile, ma sempre più o meno mefitico.

Avendo introdotto di questo gaz in una soluzione d'oro, e mescolato ben bene, non si è altramente ottenuto cangiamento nel suo colore, nè si formò precipitato veruno.

Sperienza II.

4. Il tutto disposto come nella precedente sperienza, salvo che aggiunsi una caraffa all'apparecchio, in modo che la prima, per cui passava il gaz, era ripiena d'acqua distillata, e la seconda conteneva la soluzione d'oro; riposi dello stagno nel matraccio con dello spirito di salmarino, eccitando indi per mezzo dello spirito di nitro l'effervescenza. Non ottenni in questo modo precipitato veruno nella soluzione d'oro. Nella caraffa poi, che conteneva l'acqua distillata, quantunque non apparisse l'acqua di color lattiginoso, e fosse quasi

(1) Ben inteso che il versava in un vase con aggregazione d'aria atmosferica.

(2) Veggasi il Dizionario Chimico di *Macquer pag.* 597. *tom.* 1. *ediz. in quarto.*

trasparente, avendovi versato della soluzione d' oro, ottenni dopo alcune ore un precipitato porporino.

Il gaz esaminato offerse gli stessi risultamenti della precedente sperienza.

SPERIENZA III.

5. Alcuni Chimici hanno creduto, che il precipitato porpora, che si ottiene dall' oro per mezzo della soluzione di stagno, non fosse ad altro dovuto, che all' acido intenso, che si carica del flogisto dello stagno; e che se si avesse mezzo di avere un acido flogisticato concentratissimo, si otterrebbe tale precipitato anche senza lo stagno. Feci perciò la sperienza seguente.

Riposi nel matraccio dello stagno, e tutto disposi come nella prima sperienza col solito apparecchio, salvo che adoperai quattro caraffe. La prima conteneva acqua distillata; la seconda la soluzione d' oro; la terza era ripiena di tintura di tornasole; e la quarta finalmente conteneva de' fiori di Ciano, ed alcune rose (delle quali aveva preso solamente i petali) rinserrate ben bene. La vescica era adattata all' ultima caraffa.

Non ebbi precipitato nella soluzione dell' oro.

Nell' acqua distillata avendo versato una soluzione d' oro, ebbi come nella sperienza antecedente, dopo alcune ore, il precipitato porporino.

La soluzione di tornasole divenne rossa. I fiori di Ciano presero il colore dello scarlatto; e le rose un color porporino intenso (3). Il gaz ottenuto offerse gli stessi fenomeni delle sopraccitate sperienze.

---

(3) E' cosa degna d' osservazione, che i fiori, ch' erano fuori della corrente del gaz, non venivano visibilmente colorati. Quelli all' opposto pe' quali passava il gaz prendevano un color carico di scarlatto, come ho detto. Si osserva lo stesso nelle soluzioni del tornasole, se vi si metta l' occhio nel momento stesso, che il gaz le attraversa; ma più o meno secondo la costruzione de' vasi.

Si osserva dunque, che ancorchè l' acido fosse assai intenso per colorare con vivacità sì i colori, che la tintura di tornasole, ciò non ostante non fu egli atto a precipitare in porpora la soluzione d' oro.

6. Debbo avvertire, che in siffatte sperienze, cessato lo sviluppamento del gaz, comincia a farsi l' assorbimento; così che conviene disfare l' apparecchio a tempo se non si vuol rischiare di veder mescolati i liquori nelle differenti caraffe; e quello della prima nel matraccio; il che alcune volte mi è accaduto.

Nè debbo tacere, che i precipitati porpora ottenuti si facevano in più o meno corto spazio di tempo, le cose essendo in circostanze uguali, senza che abbia riconosciuta la causa produttrice.

7. Queste sperienze fanno chiaramente vedere, che il color porpora che si è conseguito si deve alle particelle sottili dello stagno, che sono sollevate col gaz, sì che deposte nell' oro formano l' oro di *Cassius*, o sia il precipitato porpora. Un accidente sopraggiuntomi me ne confermò la verità. Queste sperienze parendomi di gran peso per accrescere le cognizioni Fisico-Chimiche nella teoria delle arie fattizie, cercai di ripeterle più volte.

Presi dunque un altro matraccio, e più volte replicai queste sperienze, senza però ottenere gli stessi risultamenti. Già diffidava di me stesso in questa diversità di apparenze; quando presi a riflettere, che il matraccio, di cui prima mi era servito, aveva il collo sette o otto pollici più corto dell' altro. In fatti tagliato il collo a quel matraccio, e messolo di nuovo in esperienza, ottenni di bel nuovo il precipitato porpora. La lunghezza del matraccio non eccedeva così due piedi parigini.

8. Confermato in tal guisa il risultamento delle precedenti sperienze, non senza fondata ragione potei conchiudere, che le sostanze aeriformi tengono in dis-

soluzione alcune particelle de' corpi componenti (4), e che queste vengono inalzate a certe determinate altezze dal movimento rapido dell' effervescenza; ma che poi, cessato questo impulso, la gravità specifica riprendendo la propria energia sopra di esse, precipitano di nuovo. Il che dà a conoscere quanto debba esser circospetto il Fisico Osservatore, poichè i risultamenti in siffatte sperienze variano secondo le differenti altezze, alle quali deve il gaz sollevarsi, o secondo le sostanze, ch' esso dee attraversare.

9. Ottenuto, come vedesi, il precipitato porpora per mezzo dell' emanazione gazosa dello stagno per via umida, cercai per mezzo del fuoco, se dal metallo medesimo, o dalla sua calce potessi ottenere lo stesso, e feci a tal fine le seguenti sperienze.

SPERIENZA IV.

10. In una canna da fucile, alla quale era ben saldata la vite, come pure il focone, riposi tre oncie di stagno d' Inghilterra ridotto in grani. Vi adattai un tubo di vetro, il quale metteva in un vase ripieno di soluzione d'oro allungata con acqua distillata; al qual vase era pure adattata una vescica a fiasco armata di chiave (veggasi la *fig. II.*).

Diedi a questa canna un fuoco violentissimo per lo spazio di sette e più ore; ma non si sprigionò giammai alcuna sostanza gazosa. Sul principio fu depressa la soluzione dentro al tubo, ma non passò mai veruna bolla d'aria; anzi dopo due ore di fuoco si fece assorbimento. Più volte tentai la stessa sperienza, ma invano; quantunque il Sig. de *Priestley* assicuri aver estrat-

(4) Sembra che di tal sentimento sieno pure i Sigg. *Baumè*, *Morveau*, e *Vallerius*, ed altri più antichi Autori.

to del gaz infiammabile ſenza intermezzo d' alcuna ſoſtanza da diverſi metalli, tanto col riporli in un cannone di fucile, quanto col mezzo d' uno ſpecchio uſtorio dentro a vaſi di vetro; i metalli da lui ſperimentati furono il ferro, lo zinco, lo ſtagno (5). Nè debbo incolpare l' azione del fuoco, poichè vetrificai in quel tempo alcune ſoſtanze nel fornello medeſimo, in cui era collocata la canna.

La ſoluzione d' oro non avendo ricevuto il menomo cangiamento, eſaminai lo ſtagno, e lo ritrovai nella ſuperficie calcinato (6), anzi in qualche punto vetrificato. Il ſuo peſo non fu ſenſibilmente cangiato, ma è coſa difficile in queſte ſperienze l' accertarſene, poichè per la violenza del fuoco ſi diſtaccano le ſcorie dal ferro, delle quali rieſce difficile il liberarne la ſoſtanza ſperimentata.

11. Queſta ſperienza, che fu inutile per le mie ricerche, mi fe paleſe per altro un fenomeno, che può intereſſare i Fiſici. Un' ora e mezza circa dappoichè la canna fu al fuoco, il calore era così intenſo in tutta la ſua lunghezza, che non poteva con la mano toccarſi francamente neppure in ſommità. Quando poi cominciò a farſi l' aſſorbimento, cioè un' ora dopo che il fuoco nel fornello era aſſai più intenſo, divenne la canna quaſi fredda, di modo che potea ſenza incomodo toccarla la mano in tutta la lunghezza, anche dove era lutata al fornello.

Non potrebbeſi congnietturare, che l' aria ſia il conduttore del calore? Che quando queſta venne aſſorta

(5) Il Sig. de *Lavoiſier* non ne ha ricavato dal piombo, e ſi ha luogo a credere, che nella ſperienza di *Hales* l' aria da eſſo ottenuta ſiaſi ſviluppata dall' apparecchio.

(6) Vegganſi le ſperienze del Sig. *Lavoiſier* le quali ſono analoghe ſopra tal fatto (*Opuſcules Phiſiques*, *&* *Chimiques pag.* 281).

dal metallo nel tempo della riduzione della ſua ſuperficie in calce ſia appunto ceſſato il calore? O forſe i vapori aſſorti dall' acqua, quando ſi fece il vuoto, hanno cagionato queſto fenomeno?

SPERIENZA V.

12. Miſi in una canna da fucile ben chiuſa tre oncie di calce di ſtagno, oſſia *potèe d' etain*, eſſendo l' apparecchio come nella precedente ſperienza. Le diedi un ſuoco il più violento, ma non mi riuſcì la riduzione.

Vi fu ſoltanto il liquore un po' depreſſo, ma non paſsò veruna bolla; e queſta depreſſione la giudico unicamente cagionata dalla dilatazione dell' aria contenuta nel vano.

Intrapreſi pertanto a far cimento coll' addizione di ſoſtanze flogiſtiche; il che feci con le ſeguenti ſperienze.

SPERIENZA VI.

13. Ripoſi un' oncia e mezza di calce di ſtagno, e un' egual porzione di reſina nella ſolita canna da fucile con lo ſteſſo apparecchio.

Quando il calore cominciò a penetrare la canna, immediatamente ſi ſviluppò una prodigioſa quantità di gaz, il quale attraverſando la ſoluzione dell' oro, gettoſſi nella veſcica anneſſa. La violenza con cui ſi ſviluppava mi fece diſgiungere l' apparecchio; ciò non oſtante oſſervai

Che la ſoluzione dell' oro fu leggermente precipitata in color porpora, quantunque l' acqua aveſſe preſo un color verde chiaro; il che deggio attribuire alla reſina.

Che la calce di ſtagno nella canna era ſtata quaſi tutta ridotta in metallo.

Che il gaz era infiammabile con fiamma azzurra, facendo una forte detonazione (7), e così nocivo alla refpirazione animale, che un pafſero introdotto vi morì in pochi fecondi, fenza che mi fia riufcito di richiamarlo a vita col foccorfo dell' alkali *fluor*.

Che una candela introdotta dopo averne infiammata la fuperficie fi fpegneva immediatamente, fe più oltre veniva abbaffata.

SPERIENZA VII.

14. In un apparecchio fimile a quello delle precedenti fperienze ripofi un' oncia di calce di ftagno, e parte uguale di carbon pefto. La foluzione dell' oro attraverfata dal gaz fu precipitata in color paonazzo circa un' ora dopo.

La calce è ftata intieramente ridotta: il gaz s' infiammava con forte detonazione: la fua fiamma era piuttofto ofcura.

Era egli più nocivo dell' altro, cioè mortale alla refpirazione animale, poichè in minor tempo ancora vi morì un paffero introdotto.

SPERIENZA VIII.

15. Ripofi di nuovo un' oncia di calce di ftagno, ed egual mifura di fal nitro nella canna da fucile collo fteffo apparecchio. Sviluppoffi una gran quantità di gaz; ed attraverfando effo la foluzione d' oro, quefta diventò da principio di color lattiginofo, ed opaca,

(7) In quefta fperienza, come nelle fuffeguenti, quando trattavafi d' infiammare il gaz, io lo verfava dentro ad un vafo di vetro con bocca ftretta. In tal guifa vi fi mefcolava dell' aria atmofferica, fenza la quale non fi ottiene nè infiammazione, nè detonazione.

ma poi prese una tinta porpora chiara, e precipitò in fondo del vaso una polvere di color lillà; la calce fu ridotta in metallo.

Il gaz raccolto mi sorprese per la sua natura; non era altramente infiammabile; non era gaz nitroso; non era aria deflogisticata, come potrebbe conghietturarsi, ma era gaz mefitico. Una candela che vi s' introdusse fu più volte spenta; un passero cadde in asfissia, ma non morì,

16. Non devo tacere, che in tutte queste sperienze, cessato lo sviluppamento del gaz, comincia l' assorbimento; che perciò quando si osserva il liquore del tubo ascendere, conviene disfare l' apparecchio, se non si vuole che il liquore in esperimento venga ad essere assorto nella canna; il che alcune volte m' è accaduto.

17. Provano siffatte sperienze, che la calce di stagno nella sua riduzione colle sostanze flogistiche lascia sfuggire le parti più volatili, le quali in un colla sostanza gazosa vengono sollevate, come le soluzioni d' oro precipitate in porpora ne fanno testimonianza.

18. Pensano generalmente i Chimici moderni essere dovuto all' aria il maggior peso, che acquistano i metalli quando vengono calcinati; ma la diminuzione del peso, che soffrono le calci metalliche nella riduzione, non è del solo eccedente acquistato, ma eziandio di una porzione del peso proprio (8). Quindi è che per ispiegare questo fenomeno si pretende che la perdita si faccia insieme con le materie flogistiche.

Ma

(8) La calce di piombo perde nella riduzione $\frac{1}{7}$ circa del suo peso; e quella dello stagno ne perde circa $\frac{1}{10}$; così che se molte volte si facesse la trasmutazione di calce in metallo, e di metallo in calce, verrebbe interamente a svanire la sostanza sperimentata. Tale almeno è il mio sospetto; ma le mie sperienze, che vo ad intraprendere sopra queste calcinazioni, e riduzioni, daranno luogo alla verità indubitatamente.

Ma le mie ſperienze provano chiaramente, che quel di più è la ſoſtanza metallica la più volatile, sfuggita con l' emanazione gazoſa.

19. Riflettendo ſopra i riſultamenti di queſte ſperienze, ſono entrato in penſiero, che la diſparità de' ſentimenti de' Chimici ſopra queſte arie fattizie poteſſe provenire dall' apparecchio adoperato ſinora, cioè da quello che ſi denomina apparecchio pneumato-chimico immaginato dal Sig. *Prieſtley*, indi perſezionato dal Sig. *Sigaud de la Fond*; poichè con tale apparecchio molte delle ſoſtanze gazoſe attraverſando l' acqua depongono in quella alcune quaſi inviſibili particelle, e forſe anche alcune altre ſi caricano di un principio umido, per il che più non ſono nello ſtato di purezza, o d' aggregazione, come emanano immediatamente dai corpi componenti. E per dare una convincente prova delle mie conghietture rapporterò, oltre alle già recate, due ſperienze, che pajono deciſive a queſto propoſito.

S p e r i e n z a IX.

20. L' apparecchio fu lo ſteſſo che quello adoperato nella Sperienza prima (veggaſi la *fig. I*). Ripoſi nel matraccio del ſale di tartaro, ſaturandolo con l' olio di vitriolo. Il gaz ſviluppatoſi paſſava per quattro caraffe prima di gettarſi nella veſcica adattata all' ultima caraffa. Conteneva la prima acqua diſtillata; la ſeconda acqua di calce; la terza era ripiena di fiori naturali di ciano, di roſe, e di viole gialle murali; l' ultima era ripiena di ſoluzione di tornaſole.

Oſſervai, che la tintura di tornaſole divenne roſſiccia; che l' acqua di calce precipitò; che i fiori alte-

rarono colore (9); e finalmente che il gaz mefitico diè luogo a tutti i fenomeni defcritti da' Chimici moderni.

La caraffa dell' acqua diftillata non offerfe variazione alcuna; ma feci ch' ella foffe fempre la prima nell' apparecchio in molte fperienze, che intraprefi, sì che per ben otto volte fu occupata dal gaz mefitico.

Decantata pertanto queft' acqua dopo di averla fatta alquanto fvaporare, e lafciatala quindi tranquilla, con grande mia foddisfazione vidi formarfi nel fondo del vafe che la conteneva un precipitato, che riconobbi effere un vero tartaro vitriolato.

Sperienza X.

21. Coll' apparecchio fimile al precedente ripofi nel matraccio due oncie di limatura di ferro, faturandola con l' olio di vitriolo. La prima caraffa, per cui paffava il gaz fviluppato, era ripiena d' acqua diftilla-

---

(9) L'alterazione de' colori ne' fiori, e fpecialmente nelle rofe offervata da *Prieftley* qualora vengono efpofte al vapore del gaz ottenuto dalla fermentazione della birra, è ugualmente fenfibile, fe fi facciano attraverfare dal gaz ottenuto sì dal fale di tartaro, che dalle pietre calcaree per mezzo dell' olio di vitriolo; ed ho offervato, che il calore delle rofe divien più intenfo fingolarmente alle eftremità de' petali; che i fiori violacei divengono roffeggianti, e che i gialli non foffrono cangiamento veruno. In fomma ho offervato que' cangiamenti fteffi, che il vapore del zolfo ha prodotto fopra di effi, e che ho defcritto nelle *Memorie della Real Soc. di Torino* (Tom. V. pag. 31), ove conchiufi che quefte mutazioni erano dovute all' acido fprigionato dal zolfo. Nè per altra ragione fuccede l' alterazione di colore ne' fiori fottopofti all' azione de' diverfi gaz. Ho fempre preferito nel far efperimento full' acidità de' diverfi gaz di mettere de' fiori di ciano, od altri fiori violacei invece della tintura di tornafole; avendo riconofciuto effer effi più di quefta fenfibili, e pronti ad alterare il loro colore.

In tutte le fperienze fatte fopra i fiori attraverfati dal gaz ho offervato il fenomeno defcritto nella nota n. 3. della Sperienza 3, cioè che il gaz forma una corrente nel vafe, e che i fiori, che non vi fono involti, non reftano vifibilmente colorati.

Fig. II

E
D
A

Fig. I

C

B

B

E

D

A

Fig. II

ta; la seconda, terza, e quarta contenevano se stesse sostanze della precedente sperienza.

Ho riconosciuto su tutte, e riscontrato le medesime azioni del gaz infiammabile, che ci vengono descritte dagli Autori.

La caraffa de' fiori, che non conteneva se non se rose, offerse un fatto molto curioso (10). Conservai, come nella precedente sperienza, la caraffa dell' acqua distillata, la quale mi servì costantemente in molte sperienze, valendomene anche col gaz infiammabile estratto dal ferro. Esaminata poscia quest' acqua, riconobbi distintamente esservisi formato nel fondo un precipitato, il quale era un vero vitriolo marziale; e alla superficie dell' acqua osservai una leggera intonacatura d' ocra alle pareti del vase.

Feci pure cimento di sostituire all' acqua distillata della prima caraffa una soluzione di galla, ed osservai che questa diventava paonazza, e nericcia se più d'una volta la faceva attraversare dal gaz infiammabile.

(10) Queste rose divennero d'un color paonazzo più intenso, che nella precedente sperienza, specialmente all' estremità de' petali, il che fa conghietturare, che questo gaz contenga una maggior quantità di acido; ciò però che mi riuscì sorprendente, si è, che queste rose non avendo più il loro odore naturale, presero un odore fragrantissimo, come quello dell' etere vitriolico, nel quale si sentiva per altro un odore sfumato di rose, che rendeva ancor più grato l' odore fatticcio, che avevano preso.

DELLE VIBRAZIONI SONORE

DEI CILINDRI.

Del Sig. Conte Giordano Riccati.

I. DI parecchi cilindri di metallo, o di creta si formano certi ſtrumenti, che rieſcono grati all' orecchio. Di tali corpi mia intenzione ſi è l' indagare le oſcillazioni, le quali, come vedremo, vengono regolate da leggi diverſiſſime da quelle delle corde cilindriche. Quantunque io abbia preſo l' eſſenzial di queſta ſoluzione dall' Appendice ſopra le curve elaſtiche aggiunta dal dottiſſimo Sig *Leonardo Eulero* alla ſua profonda Opera *Methodus inveniendi curvas maximi minimive proprietate gaudentes*; nulladimeno non iſdegnino di leggerla i Matematici, sì perchè ho procurato di riſchiarare la materia per sè ſteſſa oſcuriſſima, sì perchè m'è riuſcito di farci per entro qualche non diſpregevole ſcoperta, e di notare altresì alcun picciolo neo, che anderò opportunamente ſegnando, nelle ſpeculazioni per altro ſublimi del chiariſſimo Autore.

Se nulla diſtendendoſi le lunghezze inferiori di due cilindri, s' allungano ſolamente le ſuperiori, o a roveſcio, e ciò per opera di due forze minime uguali normali alle baſi dei cilindri, ed applicate a' punti analoghi de' loro diametri ſituati ne' piani, in cui giacciono le mentovate oppoſte lunghezze, gli allungamenti corriſpondenti a' punti analoghi de' diametri ſteſſi ſtanno in ragione compoſta, diretta delle lunghezze de' cilindri, ed inverſa della rigidità della materia, onde ſono formati, e delle loro baſi, o ſia dei quadrati de' loro diametri.

II. Ci ſieno (*fig.* 1.) due cilindri OV, ov, i quali ſi trovino in tali circoſtanze, che nulla dilatandoſi le lunghezze inferiori VM, vm, ſi diſtendano a grado a grado le ſuperiori, dimodochè gli allungamenti s' eguaglino alle ordinate dei triangoli MOL, mol. Si fingano totalmente infleſſibili le loro baſi $MGOI$, $mgoi$, e ſuppongaſi, che i mentovati allungamenti ſieno cagionati da due forze infiniteſime uguali applicate con direzione normale alle dette baſi, per eſempio all' eſtremità O, o dei diametri MO, mo collocati ne' piani VL, vl: dico che le diſtenſioni OL, ol corriſpondenti ai punti analoghi O, o ſerbano la proporzione compoſta, diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, e reciproca della rigidità della materia, onde conſtano, e dei quadrati dei loro diametri.

Si ſegnino prima le linee finite MP, mp, indi le infiniteſime PR, pr proporzionali ai diametri MO, mo, e ſi tirino parallele alle lunghezze VM, vm le linee KZ, NX; kz, nx. Per tali coppie di linee paſſino dei piani normali ai piani VL, vl, e queſti ſegneranno due parallelepipedi, le cui lunghezze KP, kp, e le baſi GH, gh. Eſſendo $MO : MP :: mo : mp$, $MO : MP :: OL : PZ$, $mo : mp :: ol : pz$, ſi verifica parimente l' analogia

OL:*PZ*::*ol*:*pz*, la quale c' insegna, che gli allungamenti dei due cilindri in siti analoghi abbracciano la medesima proporzione. Vengano le distensioni *PZ*, *pz* direttamente effettuate nei solidi *KR*, *kr* da due forze minime uguali. Ho dimostrato nella mia Opera *Delle Corde, ovvero Fibre elastiche* al numero IV. dello Schediasma I, che gli allungamenti prodotti da forze infinitesime pari in due corde elastiche, che non sien tese, stanno come le loro lunghezze divise pel prodotto della rigidità della materia, onde sono composte, nelle loro basi: e le dimostrazioni ivi addotte, che non ripeto presentemente, s'adattano interamente ai parallelepipedi *KR*, *kr*. Per la qual cosa le distensioni *PZ*, *pz* serberanno la nominata relazione: ma le basi *GH*, *gh*, che sono porzioni simili delle basi circolari dei cilindri, si riferiscono nella ragione dei quadrati de' diametri *MO*, *mo*; dunque le distensioni *PZ*, *pz* dei solidi *KR*, *kr*, ed altresì quelle di tutte l' altre coppie di solidi fondati su basi simili, e similmente situati, che in pari numero compongono i nostri cilindri, accettano la proporzione delle lunghezze *VM*, *vm* divise pel prodotto della rigidità della materia nel quadrato dei diametri de' cilindri. Si cavi la conseguenza, che in qualunque pajo di parallelepipedi collocati in siti analoghi gli allungamenti, che si riguardano nella mentovata ragione, sono cagionati da forze uguali.

Si restituiscano ora i cilindri per gli spazietti *LQ*, *lq* parti infinitesime simili degli spazj *OL*, *ol*, ed agevole riuscirà la riflessione, essere *OL*: *PZ*:: *QL*: *YZ*:: *ol*: *pz*:: *ql*: *yz*, e che perciò gli spazietti analoghi *QL*, *ql*; *YZ*, *yz* si riferiscono nella stabilita ragione, nella quale altresì si riguarderanno le reazioni menomissime delle forze a coppia a coppia eguali applicate ai punti analoghi *Z*, *z*; *L*, *l* ecc. Lo stesso rapporto parimente accetteranno gli aggregati di queste reazioni. Se tolte di mezzo tali forze infinite di numero, io

voglio collocare nei ſiti L, l due forze equipollenti per le direzioni OL, ol, egli è d'uopo, che alla ſomma delle reazioni delle forze levate s'eguagli l'unica reazione della forza ſoſtituita. Quindi le reazioni delle due forze ſurrogate dovranno ſtare come $QL : ql$; ma le dette forze reagiſcono per gli ſpazj QL, ql; dunque le reazioni ſono come gli ſpazj, per cui reſiſtono le due forze, il che non può verificarſi ſenon nel caſo, che ſieno uguali eſſe forze. Se due forze uguali pertanto normali alle baſi dei cilindri OV, ov, ed applicate ai punti analoghi O, o dei diametri MO, mo ſituati nei piani VL, vl fanno equilibrio colla forza elaſtica dei cilindri ſteſſi, le corriſpondenti diſtenſioni OL, ol devono ſerbare la ragione compoſta, diretta delle lunghezze SO, so dei cilindri, ed inverſa della rigidità della materia, di cui ſono formati, e dei quadrati de' loro diametri.

Determinare la forza, la quale, ſupponendoſi applicata per una data direzione in un ſito determinato, ſia equipollente alla forza elaſtica d'una menoma porzione di cilindro infinitamente poco incurvato.

III. Sia $AVMF$ (Fig. 2.) la curva di menoma piegatura, a cui vibrandoſi ſi ſia adattato un cilindro, ed AC, CM ſieno le coordinate l'una all'altra normali. La lunghezza pochiſſimo incurvata MV della porzione elementare LV del detto cilindro venga combaciata dal circolo MV deſcritto col raggio infinitamente lungo DM. Alla linea DVS pel punto M conduco parallela la retta MO. Potendoſi ſupporre, che nel ripiegarſi la lunghezza inferiore MV del mentovato cilindretto non abbia ricevuta alterazione, ſi farà egli ſuperiormente dilatato per OL.

Fingaſi collocata in A una forza equipollente a tutte quelle, che come vedremo ſono parallele alle ordi-

nate *MC*, le quali fanno equilibrio col cilindretto *LV*. S' io risolverò questa forza in due, una parallela, e l'altra normale alla direzione *MV* d'esso cilindro, troverò la prima minima rispettivamente alla seconda; perchè discostandosi infinitamente poco la curva *AVMF* dalla linea retta *AB*, la direzione della forza, che si risolve, è pressochè perpendicolare alla linea *MV*. La forza menomissima parallela ad *MV* allunga tutto il cilindretto *LV* egualmente, e la normale rispettivamente infinita ripiega il detto cilindro, e cagiona le distensioni espresse dalle ordinate del triangolo *MOL*. Ecco adunque, che trascurando l' allungamento comune a tutto il cilindro, siccome operato da una forza adequatamente uguale a nulla, mi è concesso il supporre, che la lunghezza inferiore *MV* ritenga la sua naturale misura.

Chiamo la lunghezza del cilindro $MV = ds$, il raggio osculatore $DM = R$, il diametro di esso cilindro $ML = D$, la rigidità della materia, che lo compone, $= r$. La similitudine dei triangoli *DMV*, *MLO* mi somministra l' analogia

$$DM : MV :: ML : LO$$

$$R : ds :: D : \frac{Dds}{R}$$, da cui si ricava $LO = Dds : R$.

Una forza costante $= 1$, che agisse per la direzione *OL*, allungherebbe il cilindro, come ho dimostrato al numero *II.* per lo spazio proporzionale a $ds : rD^2$, il quale sta in ragione composta, diretta della lunghezza del cilindro, ed inversa del quadrato del diametro, o sia della base del cilindro, e della rigidità della materia, della qual è formato. Essendo pertanto nello stesso cilindro le distensioni come le forze minime, che le cagionano; se l' allungamento come $ds : rD^2$ è prodotto dalla forza $= 1$, ne segue, che per ottenere la dilatazione $LO = Dds : R$ ci vorrà la forza proporzionale a $D^3 r : R$.

Si restituisca il nostro cilindro per lo spazio *LQ* porzione inassegnabile dello spazio *LO*, ed il raggio osculatore

latore MD s' allunghi, e divenga uguale ad $MG = R + dR$; troveremo la linea $QO = \frac{Dds.}{R + dR}$, la quale sottratta da $LO = Dds : R$, ci dà $LQ = DdRds : R^2$. Quindi la reazione della forza proporzionale a $D^3 r : R$, che per lo spazio LQ si conserva costante, starà come $D^4 rdRds : R^3$. Taglio $MT = 1 : R$, e pel punto T conduco TR parallela ad LQ. Dalla simiglianza dei triangoletti MLQ, MTR deduco l' analogia

$$ML : LQ :: MT : TR$$

$$D : \frac{DdRds}{R^2} :: \frac{1}{R} : \frac{dRds}{R^3}$$, che mi addita il valore di $TR = dRds : R^3$. Voglia collocarsi in T colla direzione RT una forza equipollente a quella, che s'è applicata in L, e che per conseguenza faccia equilibrio coll' elasticità del cilindro LV. Se le due forze in L, ed in T hanno ad essere equipollenti, le loro reazioni per gli spazj LQ, TR debbono essere uguali. S' inferisca, che divisa la reazione della prima forza, proporzionale a $D^4 rdRds : R^3$ per lo spazietto $TR = dRds : R^5$, per cui reagisce la seconda, ne proverrà la grandezza della forza stessa applicata nel sito T proporzionale a $D^4 r$, cioè a dire in ragione composta del quadrato-quadrato del diametro del cilindro, che si vibra, e della rigidità della materia, della qual è formato.

Sia M la massa di tutto il cilindro, L la sua lunghezza, g la sua gravità specifica, o densità, e la quantità $M : gL$ esprimerà la base del cilindro, la quale serba la ragione del quadrato D^2 del diametro. Sostituendo in vece di D^4 la grandezza proporzionale $M^2 : g^2 L^2$ troveremo stare come $M^2 r : g^2 L^2$ quella forza applicata alla distanza $MT = 1 : R$, che forma equilibrio coll' elasticità del cilindretto LV, la cui minima curvatura $= 1 : R$. Nominata E la detta forza, avremo $KrM^2 : g^2 L^2 = E$, ed il coefficiente K sarà costante in tutti i cilindri.

IV. Se col metodo da me tenuto rifpettivamente ai cilindri aveffi cercato il valore della forza E nelle lamine elaftiche, mi farebbe riufcito di trovarlo in ragione compofta della rigidità della materia, . della larghezza della lamina, e del cubo della fua groffezza. Alla forza E il Signor *Eulero* dà il titolo di elafticità affoluta della lamina, e fenza dimoftrarlo, l'afferifce proporzionale al prodotto della rigidità della materia, della larghezza della lamina, e del quadrato della groffezza. Quefto sbaglio influifce nella legge dei tempi delle vibrazioni delle lamine elaftiche determinata dal noftro Autore, la quale non corrifponde ai fenomeni, falvochè nella circoftanza, che le diverfe lamine fieno di pari groffezza.

Trovare col mezzo degli efperimenti il valore della forza E.

V. Alla muraglia perpendicolare BK fia immobilmente raccomandato il cilindro $AVMF$, il quale prima di effere incurvato teneva la pofitura HF a fquadra della linea FB. Avverto, che la retta HF tocca la curva $AVMF$ nel punto F. Una forza P applicata al punto eftremo A con direzione fempre parallela ad FB abbia ripiegato il cilindro nella curva $AVMF$, e formi con effo equilibrio, e con tutti i fuoi elementi. Pel punto A fi tiri AB parallela ad HF, e dal punto M fi lafci cadere l' ordinata MC normale ad AB. Si tagli $ME = AC$, e fi conduca la diagonale AM. Chiamo $AB = a$, $BF = b$, $AC = x$, $CM = y$; e giacchè il cilindretto LV fta in equilibrio colla forza P, fe fupporremo, che invariata rimanga la curvatura del refto del cilindro, e che folamente l' elafticità del cilindretto LV eferciti una menoma azione, a quefta dovrà effer uguale la reazione della forza P. In cambio dell' elafticità del cilindro LV io poffo foftituire la forza equivalente E applicata in T, ovvero in R, la quale

agisca per lo spazietto RT. Il punto R della linea MR descriverà l' archetto RT, ed i raggi $MI = ME$, ed MA segneranno gli archi IE, AZ simili all' RT. Dal punto Z si cali ZN normale ad AB. Essendo la direzione della forza P perpendicolare ad AB, reagisce per lo spazio NZ, mentre la forza E agisce per lo spazio RT. Avremo dunque per le leggi dell' equilibrio $P.NZ = E.RT$. I triangoli simili MAC, AZN m' insegnano essere $MA:AZ::AC:NZ$; ma per la simiglianza dei settori MAZ, MIE, $MA:AZ::MI:IE$; dunque $AC:NZ::MI:IE$; e giacchè per la costruzione $AC = MI = x$, sarà parimente $NZ = IE$. Avremo pertanto $P.IE = E.RT$, e surrogando in luogo degli archetti IE, RT i raggi proporzionali $MI = AC = x$, $MR = 1:R$, $Px = E:R$.

VI. Chiamano i Meccanici la quantità Px il momento della forza P rispettivamente al punto M, e dovendo questa far equilibrio coll' elasticità del cilindro, il cui momento $E:R$, stabiliscono l' equazione $Px = E:R$. Ho stimato opportuna cosa rischiarar la materia, deducendo la nostra formola dall' eguaglianza delle azioni menomissime, che mutuamente s' impediscono, nella quale consiste il vero fondamento dell' equilibrio. Fa vedere il progresso del mio raziocinio, che le grandezze Px, $E:R$ sono proporzionali alle azioni eguali, e contrarie, l' una delle quali serve all' altra d' impedimento, della forza P, e dell' elasticità del cilindro LV. Quindi siccome rettamente si nomina Px il momento della forza P, così $E:R$ si dee appellare il momento della forza elastica del cilindretto LV, la cui curvatura $1:R$, e per questa parola momento altro non si dee intendere, salvochè le mentovate virtuali infinitesime azioni uguali, e contrarie, o quantità ad esse proporzionali.

VII. Dopo questa forse non inutile digressione torno in sentiero, e ripigliata per mano l' equazione Px

$= E : R$, osservo che preso siccome costante l' elemento dx dell' assissa, abbiamo il raggio osculatore R
$= \frac{ds^3}{-dxddy} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{3:2}}{-dxddy}$. Ponendo in opera un tal valore, trovo $Px = \frac{-Edxddy}{(dx^2 + dy^2)^{3:2}}$, o sia $Pxdx$
$= \frac{-Edx^2ddy}{(dx^2 + dy^2)^{3:2}}$, formola, che riceve la seguente integrazione $P.(\frac{1}{2}x^2 + f) = \frac{-Edy}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}$, la quale maneggiata mi dà $dy = \frac{-Pdx.(\frac{1}{2}x^2 + f)}{\sqrt{(E^2 - P^2.(\frac{1}{2}x^2 + f)^2)}}$. Si determina la costante f riflettendo, che nel sito F la tangente HF è parallela all' assissa AB; laonde $dy : dx = 0$, e perciò $\frac{1}{2}x^2 + f = 0$, ovvero $f = -\frac{1}{2}x^2$: ma in questo caso $x = AB = a$; dunque $f = -\frac{1}{2}a^2$. Fatto uso di questo valore, ed adempiuti i necessarj calcoli, ci si presenterà $dy = \frac{(a^2 - x^2).dx}{\sqrt{(4E^2 : P^2 - a^4 + 2a^2x^2 - x^4)}}$.

S' adatti all' estremità A del cilindro $AVMF$ una forza, o peso P assai picciolo rispettivamente alla forza E, dimodochè il cilindro stesso si ripieghi per una saetta FB fisicamente menoma, ma che per altro possa accuratamente misurarsi. In sì fatta ipotesi la quantità $4E^2 : P^2$ sarà talmente grande, che si potrà in riguardo alla pratica trascurare la grandezza $-a^4 + 2a^2x^2 - x^4$. Avremo pertanto $dy = \frac{(a^2 - x^2)dx}{2E : P}$, ed integrando $y = \frac{P.(a^2x - \frac{1}{3}x^3)}{2E}$: ma quando $x = a$, $y = b$; dunque $b = Pa^3 : 3E$, e finalmente $E = Pa^3 : 3b$, valore della forza E, che non si discosterà dal vero sensi-

bilmente, purchè la curvatura del cilindro sia picciolissima.

VIII. Avendo dimostrato essere E come rD^4, starà per conseguenza rD^4 come $Pa^3 : 3b$, ed r come $Pa^3 : 3bD^4 = E : D^4$. Col mezzo adunque della premessa esperienza si può scoprire la proporzione fra le rigidità delle materie, onde sono composti i cilindri. Stabilirò in progresso al numero XXV un altro canone ugualmente semplice che serve a determinare la detta proporzione.

IX. Nella formola $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(4E^2 : P^2 - a^4 + 2a^2x - x^4)}}$ si faccia $2E : P = c^2 - a^2$, e conseguentemente $4E^2 : P^2 = c^4 - 2c^2a^2 + a^4$. Supponendosi $2E : P$ una quantità assai grande rispettivamente ad x, e ad a, sarà parimente tale la quantità c, come agevolmente raccogliesi dall' equazione assunta $2E : P = c^2 - a^2$. Sostituito in cambio di $2E : P$ il suo valore, troveremo $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2 + 2a^2x^2 - x^4)}}$. Se nel denominatore io trascuro i soli due termini $2a^2x^2 - x^4$, la cui somma è fisicamente nulla non solo in riguardo a c^4, ma ancora per rapporto a $- 2c^2a^2$, mi si presenta la formula $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{\sqrt{(c^4 - 2c^2a^2)}}$, che s'adegua alla seguente $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{c^2 - a^2} = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{2E : P}$, da cui ricavo $E = Pa^3 : 3b$.

Ma s' io trasando altresì il termine $- 2c^2a^2$, ho l' equazione $dy = \frac{(a^2 - x^2) . dx}{c^2}$, la quale integrata mi dà $y = \frac{a^2x - \frac{1}{3}x^3}{c^2}$. Corrispondendo $y = b$ ad $x = a$, troveremo $b = 2a^3 : 3c^2$, e ponendo in luogo di c^2 il suo

valore $2E:P+a^2$, $3b=\frac{2a^3}{2E:P+a^2}$. Dal maneggio di questa formola si ricava $E=\frac{Pa^2.(2a-3b)}{6b}$. Il Signor *Eulero* assegna alla forza E un tal valore, il quale è meno semplice, e meno esatto di quello, che da me è stato determinato.

Determinare l' equazione della curva, a cui s' adatta un cilindro, che si vibra.

X. Tenga il cilindro prima di vibrarsi la positura rettilinea ACB (*fig. 3*), e messo poscia in oscillazione s'adatti alla curva $aEcFb$, la quale si discosti dalla linea retta ACB per minimi spazj. Sia la lunghezza del cilindro acb, ovvero $ACB=L$, la sua massa $=M$, il raggio osculatore in $M=R$, il momento dell' elasticità del cilindro nel sito medesimo $=E:R$. Si chiami inoltre $Aa=b$, $AP=aM=x$, $PM=y$. Effettuando il nostro cilindro nel tempo stesso le sue menome vibrazioni più, o meno estese, dee necessariamente oscillare colla legge di un pendolo a cicloide. Sia f la lunghezza del pendolo semplice isocrono, e giacchè questo, mentre gli resta da scorrere lo spazio $MP=y$, viene animato dalla forza acceleratrice $y:f$, tale sarà altresì la forza acceleratrice del cilindro nel sito M. La massa d' un elemento d' esso cilindro, la cui lunghezza dx s' eguaglia ad $Mdx:L$, la quale moltiplicata per $y:f$, mi dà la forza sollecitante il detto elemento collocato in $M=Mydx:Lf$. Il cilindro dopo compiuta un' oscillazione si trovi nella positura $aEcFb$, e se in tale istante a tutti i punti d' esso cilindro s' applicheranno le convenienti forze $Mydx:Lf$ con direzioni contrarie, per esempio MH, mh, a quelle delle forze sollecitanti, non seguirà più moto, ed

il cilindro si fermerà in equilibrio. Le forze applicate alla curva aM stanno in equilibrio colla forza elastica del cilindro in M: ed in fatti se questa si minorasse, tutte le dette forze si porrebbero in azione. Quindi l' aggregato dei momenti delle mentovate forze dee pareggiare il momento $E:R$ della forza elastica nel sito M.

Nomino p la somma delle forze applicate alla curva am, e dp per conseguenza sarà la forza, che tira l' elemento mu per la direzione mb. Il momento di essa forza rispettivamente al punto M, mettendo $Ap = q$, s'eguaglia ad $(x - q) . dp$. Per trovare la somma desiderata dei momenti delle nostre forze in riguardo al punto M, si considerino per poco il detto punto, e l' assissa $AP = x$ come costanti, prendendo $Ap = q$ in qualità di variabile. Avremo pertanto l' aggregato dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate alla porzione di curva am $= xp - \int qdp$: ma $\int qdp = qp - Spdq$; dunque la mentovata somma $= xp - qp + \int pdq$. Giunga il punto m in M, e diverrà $q = x$, $dq = dx$. Sostituiti questi valori, troveremo la somma dei momenti per rapporto al punto M di tutte le forze applicate alla parte di cilindro $aM = Spdx$. Ora dovendosi un tale aggregato eguagliare al momento $E:R$ dell' elasticità del cilindro nel sito M, siam pervenuti all' equazione $E:R = Spdx$, e surrogando in vece di p l' eguale grandezza $\int \frac{Mydx}{Lf}$, $E:R = \int (dx \int \frac{Mydx}{Lf}$. Nel caso presente, in cui la flussione costante dx dell' assissa s' adegua all' elemento ds della curva, si verifica essere $R = dx^2 : ddy$, e perciò avremo $Eddy : dx^2 = \int (dx \int \frac{Mydx}{Lf})$. Prendo le differenze, e trovo $Ed^3y : dx^2 = dx \int Mydx : Lf$, e

nuovamente differenziando $Ed^4y = Mydx^4 : Lf$, equazione alla curva cercata $aEcFb$.

XI. La somma dei momenti rispettivamente al punto M delle forze applicate al rimanente del cilindro $MEcFb$ esser dee uguale, e contraria alla somma dei momenti delle forze applicate alla porzione aM, e l' una e l' altra di queste somme dee pareggiare il momento dell' elasticità $= \dot{E} : R$ del cilindro nel sito M. Così l' elemento di cilindro collocato in M sta in equilibrio, essendo preso in mezzo da due aggregati di momenti eguali, e contrarj. Se avessi considerati i momenti delle forze applicate alla parte $MEcFb$ del cilindro, fatta la riflessione essere $BP = L - x$, ed il suo incremento $= -dx$, avrei scoperto $Eddy : dx^2$

$$= \int \left(-dx \int - \frac{Mydx}{Lf} \right),$$ espressione, che ci guida alla formula testè trovata $Edy = Mydx^4 : Lf$.

La premessa avvertenza me ne suggerisce un' altra, cioè che la somma dei momenti rispettivamente ai punti estremi a, b delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$ deve uguagliarsi a nulla, siccome quella, che ha da formar equilibrio coll' aggregato dei momenti delle forze applicate al residuo del cilindro, che ne' due mentovati casi pareggia il nulla. Posta dunque $x = 0$, o pure $x = AB = L$, avremo $E : R = Dddy : dx^2$

$$= \int \left(\pm dx \int \pm \frac{Mydx}{Lf} \right) = 0.$$ Si cavi la conseguenza essere nulla la curvatura $1 : R$ del cilindro nei siti a, b, e nullo parimente il momento della sua elasticità.

XII. Le forze MH uguali, e contrarie a quelle, che tentano di far reciprocare il cilindro, e spingono i suoi punti, per esempio M, verso la linea retta AB, debbono trattenere il cilindro stesso nella positura $aEcFb$ totalmente immobile, senza che possa in esso seguire o moto progressivo per l' una, o l' altra direzione Cc,

cC,

cC, o moto di giramento intorno qualsivoglia punto. Quest' ultimo movimento non succederà, quando i momenti delle forze applicate a destra; e a sinistra di qualunque punto M sieno eguali, e contrarj, e che per conseguenza facciano equilibrio. Non accaderà nè pure il moto progressivo, qualora s' adempia la condizione, che l' aggregato delle forze traenti il cilindro per la direzione cC pareggi quello, che il tira per la direzione contraria Cc. Abbiamo veduto, che la somma delle forze applicate alla porzione aM s' eguaglia ad $M:LF \int ydx$: ma $\int ydx$ dinota l' aja $auMPA$; dunque la nominata somma delle forze applicate alla parte di cilindro aM scelta ad arbitrio è sempre proporzionale alla corrispondente aja $auMPA$. Dovendo il cilindro esser ugualmente tirato per le due direzioni opposte cC, Cc, egli è d' uopo che l' aja positiva $aEA + bFB$ pareggi la negativa $EFcE$, dimodochè facendo $x = AB = L$, si trovi $\int ydx = 0$.

Osserveremo in progresso, che il cilindro AB si può oscillando adattare ad infinite curve, la metà delle quali tagliano l' asse AB in un numero pari di punti, ed il rimanente in un numero impari. Le più semplici fra le dette curve si veggono espresse nelle figure 3, e 4. Pretende il Signor *Eulero*, che le curve del secondo genere non servano per le vibrazioni delle lamine elastiche; ma questa sua asserzione non è conforme alla verità, potendosi anco rispettivamente a tali curve determinare le costanti aggiunte nelle integrazioni, di maniera che sieno eguali i momenti delle forze a destra, e a sinistra d' un qualunque punto, e che di più ad $x = AB = L$ corrisponda $\int ydx = 0$. L' esperienza favorisce i miei pensamenti; imperciocchè sostenendo in bilico una lamina con un dito, ed indi percuotendola, si sente chiaro quel suono, che rende la lamina stessa, mentre s' uniforma alla curva della figura 4, che non viene punto disturbata dal dito, il quale tocca la la-

mina nel ſito immobile C. Il dito applicato in C ammortiſce la metà dei ſuoni della lamina, cioè a dire tutti quelli ch' eſſa produce, mentre s' adatta alle curve del primo genere, nelle quali tutte al punto C (*Fig.* 3, 5, 7 ecc.) ſi riferiſce la maſſima ordinata Cc.

Integrare l' equazione $\frac{ELfd^4y}{M} = ydx^4$, *e determinare i valori delle coſtanti aggiunte nelle integrazioni*.

XIII. Pongaſi $ELf : M = c^4$, onde s' abbia $c^4d^4y = ydx^4$. Il celebratiſſimo Sig. *Eulero nel Tomo VII. delle Miſcellanee di Berlino* ci ha inſegnata la generale integrazione di tali equazioni differenziali di alto grado. Col mezzo di queſto metodo ſi trova $y = Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ ſen. $x:c + D$ coſ. $x:c$ (1), in cui e dinota il numero, che ha per logaritmo l' unità nella logiſtica delle ſottotangente $= 1$. I logaritmi preſi nella ſuddetta logiſtica ſi chiamano naturali, o iperbolici; perchè ſi ſuole con eſſi eſprimere la quadratura dell' iperbola. Il lodato Autore nella ſua eccellente Introduzione all' Analiſi degl' infiniti ha computato il valore del numero e, che, preſa l' unità come protonumero, ſi ſuol nominare la baſe della logiſtica $= 2, 7182818$. Ci ha dato parimente nello ſteſſo luogo la ſerie dei logaritmi iperbolici dall' 1 ſino al 10. Per i computi, che ſiam per fare, baſta il ſapere, che il numero 10 nelle tavole ha per logaritmo 1, 0000000, e nella logiſtica iperbolica 2, 3025851, e che nella ſteſſa proporzione ſi deggiono riferire i logaritmi dell' una e dell' altra logiſtica, che corriſpondono allo ſteſſo numero. Coll' ajuto dunque dei logaritmi delle tavole ſi potrà trovare il logaritmo iperbolico di qualunque numero. Nella ſovrappoſta formola ſen. $x:c$, e coſ. $x:c$ dinotano il ſeno, ed il coſeno dell' arco $x:c$ preſo nel circolo, il cui raggio $= 1$. A, B, C, D ſono quattro

coſtanti introdotte nelle altrettante integrazioni, a cui è d' uopo aſſegnare i convenienti valori.

Si prendano nella noſtra equazione le prime, ed indi le ſeconde, le terze, e le quarte differenze, ed avvertendo eſſere diff. $e^{x:c} = 1:c\, e^{x:c}\, dx$, diff. ſen. $x:c = dx:c$ coſ. $x:c$, diff. coſ. $x:c = - dx:c$ ſen. $x:c$, troveremo

$$dy = \frac{A}{c} e^{x:c} dx - \frac{B}{c} e^{-x:c} dx + \frac{Cdx}{c} \text{coſ.} \frac{x}{c} - \frac{Ddx}{c} \text{ſen.} \frac{x}{c} \ (2)$$

$$ddy = \frac{A}{c^2} e^{x:c} dx^2 + \frac{B}{c^2} e^{-x:c} dx^2 - \frac{Cdx^2}{c^2} \text{ſen.} \frac{x}{c} - \frac{Ddx^2}{c^2} \text{coſ.} \frac{x}{c} \ (3)$$

$$d^3y = \frac{A}{c^3} e^{x:c} dx^3 - \frac{B}{c^3} e^{-x:c} dx^3 - \frac{Cdx^3}{c^3} \text{coſ.} \frac{x}{c} + \frac{Ddx^3}{c^3} \text{ſen.} \frac{x}{c} \ (4)$$

$$d^4y = \frac{A}{c^4} e^{x:c} dx^4 + \frac{B}{c^4} d^{-x:c} dx^4 + \frac{Cdx^4}{c^4} \text{ſen.} \frac{x}{c} + \frac{Ddx^4}{c^4} \text{coſ.} \frac{x}{c} \ (5)$$

Se nell' equazione (5) ſoſtituiremo y in cambio del ſuo valore $Ae^{x:c} + Be^{-x:c} + C$ ſen. $x:c + D$ coſ. $x:c$ ſomminiſtrato dall' equazione (1), torneremo a trovare la formola differenziale $d^4y = ydx^4 : c^4$.

Le cinque notate formule ci guidano alla determinazione delle coſtanti.

In primo luogo ad $x = 0$ dee corriſpondere $y = b$. Eſſendo in tal caſo $e^{x:c} = 1$, $e^{-x:c} = 1$, ſen. $x:c = 0$, coſ. $x:c = 1$, la prima equazione ſi trasforma così
$b = A + B + D$ (6).

In ſecondo luogo m' inſegna il numero XI, che poſta $x = 0$, o pure $x = L$, deve uguagliarſi a nulla riſpettivamente ai punti eſtremi a, b la ſomma dei momenti delle forze applicate a tutto il cilindro $aEcFb$, onde s' abbia $Eddy:dx^2 = \int(\pm dx \int \pm Mydx:Lf) = 0$, ovvero ſoſtituendo c^4 in luogo di $ELf:M$, $c^4ddy:dx^2 = \int(\pm dx \int \pm ydx) = 0$. Fatta pertanto nell' equazione (3) $ddy:dx^2 = 0$, e ponendo prima $x = 0$, indi $x = L$, troveremo
$0 = A + B - D$ (7)

$o = Ae^{L:c} + B^{-L:c} - C\,\text{fen.}\,L:c - D\,\text{cof.}\,L:c\ (8)$.

In terzo luogo posta $x = o$, è parimente nulla l'aja $APMa = \int ydx$: ma come s' è stabilito al numero X $ELf:M.\,d^3y:dx^3 = c^4 d^3y:dx^3 = \int ydx$; dunque uguagliata a nulla nell' equazione (4) la grandezza $d^3y:dx^3$, e mettendo $x = o$, si presenterà

$o = A - B - C\ (9)$.

Finalmente al numero XII abbiamo stabilito, che ancor nell' ipotesi di $x = L$ esser dee $\int ydx = o$. Quindi ponendo nell' equazione (4) $d^3y:dx^3 = o$, ed $x = L$, si scoprirà

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} - C\,\text{cof.}\,L:c + D\,\text{fen.}\,L:c\ (10)$.

Col mezzo delle cinque notate condizioni s' assegneranno i loro valori alle quantità costanti A, B, C, D, ed alla frazione $L:c$, la quale servirà poi per determinare la lunghezza f del pendolo semplice isocrono al cilindro AB.

Le formole (7), e (9) mi danno $D = A + B$, $C = A - B$, valori che surrogati nelle formole (8), e (10) fanno loro prendere il seguente aspetto

$o = Ae^{L:c} + Be^{-L:c} (-A+B).\,\text{fen.}\,L:c (-A-B).\,\text{cof.}\,L:c$,

$o = Ae^{L:c} - Be^{-L:c} (-A+B).\,\text{cof.}\,L:c (+A+B).\,\text{fen.}\,L:c$.

Si deduce da queste

$$\frac{A}{B} = \frac{-e^{-L:c} - \text{fen.}\,L:c + \text{cof.}\,L:c}{e^{L:c} - \text{fen.}\,L:c - \text{cof.}\,L:c} = \frac{e^{-L:c} - \text{cof.}\,L:c - \text{fen.}\,L:c}{e^{L:c} - \text{cof.}\,L:c + \text{fen.}\,L:c} (11),$$

e dall' equazione (11)

$o = 2 - e^{L:c}\,\text{cof.}\,L:c - e^{-L:c}\,\text{cof.}\,L:c$, o sia

$e^{2L:c} - \frac{2e^{L:c}}{\text{cof.}\,L.c} = -1$. Si supplisca il quadrato, ed

eſtratta poſcia la radice ſi troverà

$$e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} \quad (12).$$

Il primo dei due valori, che per la formola (11) competono alla frazione $A:B$, s'eguaglia a $\frac{\text{coſ.}\, L:c}{1-\text{ſen.}\, L:c}$, il ſecondo a $\frac{-\text{coſ.}\, L:c}{1+\text{ſen.}\, L:c}$.

Giacchè, come ho teſtè dimoſtrato $e^{L:c} = \frac{1-\text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c}$, ſarà, ſoſtituendo una tale grandezza in luogo di $e^{L:c}$ nel primo valore di $A:B$ contenuto nella formola

$$(11) = \frac{\frac{-\text{coſ.}\, L:c}{1-\text{ſen.}\, L:c} - \text{ſen.}\, L:c + \text{coſ.}\, L:c}{\frac{1-\text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} - \text{ſen.}\, L:c - \text{coſ.}\, L:c} =$$

$$\frac{\text{coſ.}\, L:c}{1-\text{ſen.}\, L:c} \left(\frac{-\text{ſen.}\, L:c + (\text{ſen.}\, L:c)^2 - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c}{1-\text{ſen.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c - (\text{coſ.}\, L:c)^2} \right):$$

ma $1 - (\text{coſ.}\, L:c)^2 = (\text{ſen.}\, L:c)^2$; dunque effettuata queſta ſoſtituzione nel denominatore,

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{coſ.}\, L:c}{1-\text{ſen.}\, L:c} \times \frac{-\text{ſen.}\, L:c + (\text{ſen.}\, L:c)^2 - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c}{-\text{ſen.}\, L:c + (\text{ſen.}\, L:c)^2 - \text{ſen.}\, L:c \,.\, \text{coſ.}\, L:c}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\, L:c}{1 - \text{ſen.}\, L:c}.$$

Con pari metodo proverò eſſere

$$\frac{A}{B} = \frac{e^{-L:c} - \text{coſ.}\, L:c - \text{ſen.}\, L:c}{e^{L:c} - \text{coſ.}\, L:c + \text{ſen.}\, L:c} = \frac{-\text{coſ.}\, L:c}{1+\text{ſen.}\, L:c},$$

e perciò avremo

$\frac{A}{B} = \frac{\pm \text{cos}.\, L:c}{1 \pm \text{sen}.\, L:c}$. Da questa formola io ricavo

$$B = A.\left(\frac{1 \mp \text{sen}.\, L:c}{\pm \text{cos}.\, L:c}\right) = A.\left(\frac{\pm 1 - \text{sen}.\, L:c}{\text{cos}.\, L:c}\right)$$

Essendo per la formola (9) $C = A - B$, scopriremo

$$C = A.\frac{(\text{cos}.\, L:c + \text{sen}.\, L:c \mp 1)}{\text{cos}.\, L:c}$$

L'equazione (7) determina $D = A + B$, e quindi troverassi

$$D = A.\frac{(\text{cos}.\, L:c - \text{sen}.\, L:c \pm 1)}{\text{cos}.\, L:c}$$

Dandoci inoltre la formola (6) $b = A + B + D$, e la (7) $D = A + B$, ne risulta

$$D = b:2 = A.\frac{(\text{cos}.\, L:c - \text{sen}.\, L:c \pm 2)}{\text{cos}.\, L:c}.$$

I due valori di D mi somministrano quello di

$$A = \frac{b\, \text{cos}.\, L:c}{2.(\text{cos}.\, L:c - \text{sen}.\, L:c \pm 1)}$$

Or ecco i valori delle quattro costanti, i quali si renderanno noti, ridotta che sia a computo la frazione $L:c$ coll'mezzo dell'equazione (12.)

$$A = \frac{b.\, \text{cos}.\, L:c}{2.(\text{cos}.\, L:c - \text{sen}.\, L:c \mp 1)} = \frac{b.(\pm 1 + \text{sen}.L:c - \text{cos}.L:c)}{4.\, \text{sen}.\, L:c} \quad (13.)$$

$$B = \frac{b.(\pm 1 - \text{sen}.\, L:c)}{2.(\text{cos}.L:c - \text{sen}.L:c \pm 1)} = \frac{b.(\mp 1 + \text{sen}.L:c + \text{cos}.L:c)}{4\, \text{sen}.\, L:c} \quad (14.)$$

$$C = \frac{b.(\mp 1 + \text{sen}.\, L:c + \text{cos}.\, L:c)}{2.(\text{cos}.\, L:c - \text{sen}.\, L:c \pm 1)} = \frac{b.(\pm 1. - \text{cos}.\, L:c)}{2.\, \text{sen}.\, L:c} \quad (15.)$$

$$D = b:2. = \frac{b\, \text{sen}.\, L:c}{2.\, \text{sen}.\, L:c} \quad (16.)$$

Le seconde espressioni delle costanti A, B, C si provano eguali alle prime con un breve giro di computo, ch'io lascio all'industria di chi legge.

Sostituiti questi valori nell'equazione (1), troveremo

$$\frac{y}{b} = \frac{e^{x:c} \text{cos. } L:c + e^{-x:c} . (\pm 1 - \text{sen. } L:c)}{2 . (\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

$$\frac{(\pm 1 - \text{cos. } L:c) . \text{sen. } x:c + \text{sen. } L:c . \text{cos. } x:c}{2 \text{ sen. } L:c} \quad (17).$$

Ridurre a forma più semplice la formola (17).

XIV. Prendano le assisse l' origine dal punto medio C (*fig.* 3 e 4), e posta $CP = z$, sarà $\frac{1}{2} L - z = x$. Avremo pertanto $e^{x:c} = e^{L:2c - z:c}$, e giacchè per l'equazione (12) $e^{L:2c} = \sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} \right.}$, scopriremo

$$e^{x:c} = e^{-z:c} . \sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} \right)}, e^{-x:c} = e^{z:c} \sqrt{\left(\frac{\text{cos. } L:c}{1 \mp \text{sen. } L:c} \right)}.$$

Quindi sarà

$$\frac{Ae^{x:c} + Be^{-x:c}}{b} = \frac{e^{x:c} \text{cos. } L:c + e^{-x:c} . (\pm 1 - \text{sen. } L:c)}{2 . (\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

$$= \frac{(\pm e^{z:c} + e^{-z:c}) \sqrt{(\text{cos. } L:c . (1 \mp \text{sen. } L:c))}}{2 . (\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1)}$$

$$= \frac{\pm e^{z:c} + e^{-z:c}}{2 . (\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c})}.$$ Quest' ultimo valore dipende da ciò, che per la formola (12) $\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}$

$$= \pm \sqrt{\left(\frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c} \right)} + \sqrt{\left(\frac{\text{cos. } L:c}{1 \mp \text{sen. } L:c} \right)}$$

$$= \frac{\text{cos. } L:c - \text{sen. } L:c \pm 1}{\sqrt{(\text{cos. } L:c . (1 \pm \text{sen. } L:c))}}.$$

La Trigonometria c' istruisce essere $(\pm 1 - \text{cos. } L:c)$. $\text{sen. } x:c + \text{sen. } L:c . \text{cos. } x:c = \pm \text{sen. } x:c + \text{sen. } \left(\frac{L - x}{c} \right)$, e

sostituendo nell' omogeneo di comparazione in cambio di x il suo valore $\frac{1}{2}L - z$, $(\pm 1 - \text{cos.}\, L:c)$. sen. $x:c$ + sen. $L:c$ cos. $x:c = \pm$ sen. $(L:2c - z:c)$ + sen. $(L:2c + z:c)$.
Nella formola (17) alle grandezze espresse per x si sostituiscano le uguali espresse per z or ora determinate, e s' avrà

$$\frac{2y}{b} = \frac{\pm e^{z:c} + e^{-z:c}}{\pm e^{L:2c} + e^{-L:2c}} \pm \frac{\text{sen.}(L:2c - z:c) + \text{sen.}(L:2c + z:c)}{\text{sen.}\, L:c} \quad (18).$$

Abbiamo inoltre $e^{L:2c} + e^{-L:2c}$

$$= \frac{\text{cos.}\, L:c - \text{sen.}\, L:c + 1}{\sqrt{(\text{cos.}\, L:c \,.\, (1 - \text{sen.}\, L:c))}} = \frac{\mp 2\, \text{cos.}\, L:2c}{\sqrt{\text{cos.}\, L:c}} \quad (a),$$

$-e^{L:2c}$

(*a*) L' accennata riduzione si può dimostrare così. Il secondo membro dell' equazione, lasciato da parte il divisore $\sqrt{\text{cos.}\, L:c}$, s' eguaglia, alzandolo al quadrato, alla quantità

$$\frac{(\text{cos.}\, L:c)^2 - 2\,\text{sen.}\, L:c\; \text{cos.}\, L:c + (\text{sen.}\, L:c)^2 + 2\,\text{cos.}\, L:c - 2\,\text{sen.}\, L:c + 1}{1 - \text{sen.}\, L:c}$$

$$= \frac{2 - 2\,\text{sen.}\, L:c + 2\,\text{cos.}\, L:c - 2\,\text{sen.}\, L:c\; \text{cos.}\, L:c}{1 - \text{sen.}\, L:c} = 2 + 2\,\text{cos.}\, L:c.$$

Il noto Teorema trigonometrico ci suggerisce l'equazione cos. $L:c = (\text{cos.}\, L:2c)^2 - (\text{sen.}\, L:2c)^2$: ma $(\text{sen.}\, L:2c)^2 = 1 - (\text{cos.}\, L:2c)^2$; dunque $1 + \text{cos.}\, L:c = 2\,(\text{cos.}\, L:2c)^2$, o sia $2 + 2\,\text{cos.}\, L:c = 4\,(\text{cos.}\, L:2c)^2$. Il perchè sostituito in cambio di $2 + 2\,\text{cos.}\, L:c$ lo scoperto valore, estratta la radice, e restituito il divisore $\sqrt{\text{cos.}\, L:c}$, troveremo $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\text{cos.}\, L:c - \text{sen.}\, L:c + 1}{\sqrt{(\text{cos.}\, L:c\,.\,(1 - \text{sen.}\, L:c))}}$

$$= \frac{\mp 2\,\text{cos.}\, L:2c}{\sqrt{\text{cos.}\, L:c}}.$$

$$-e^{L:2c}+e^{-L:2c}=\frac{\text{cof. }L:c-\text{fen. }L:c-1}{\sqrt{(\text{cof.}L:c.(1+\text{fen.}L:c))}}=\frac{\pm 2\,\text{fen.}L:2c}{\sqrt{\text{cof. }L:c}}\ (b),$$

$$\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. }L:c}=\frac{\text{cof. }L:2c}{\text{cof.}L:2c}\ (c),$$

$$-\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. }L:c}=\frac{\text{fen. }z:c}{\text{fen. }L:2c}\ (d).$$

Nnn

(b) Questa riduzione si prova con un metodo simile al precedente. Imperciocchè il quadrato del secondo membro senza il divisore $\sqrt{\text{cof. }L:c}$ è

$$=\frac{(\text{cof.}L:c)^2-2\,\text{fen.}L:c\ \text{cof.}L:c+(\text{fen.}L:c)^2-2\,\text{cof.}L:c+2\ \text{fen.}L:c+1}{1+\text{fen. }L:c}$$

$$=\frac{2+2\ \text{fen. }L:c-2\ \text{cof. }L:c-2\ \text{fen. }L:c\ \text{cof. }L:c}{1+\text{fen. }L:c}=2-2\ \text{cof.}$$

$L:c$. Ora $2-2\ \text{cof. }L:c=4\,(\text{fen. }L:c)^2$; dunque cavando la radice, e restituito il divisore $\sqrt{\text{cof. }L:c}$, $-e^{L:2c}$
$+e^{-L:2c}=\frac{\text{cof.}L:c-\text{fen. }L:c-1}{\sqrt{(\text{cof. }L:c\,.\,(1+\text{fen. }L:c)}}=\frac{\pm 2\ \text{fen. }L:c}{\sqrt{\text{cof. }L:c}}$.

(c) (d) E' noto essere $\pm\,\text{fen.}(L:2c-z:c)=\pm\,\text{fen. }L:2c$ $\text{cof. }z:c\mp\text{cof. }L:2c\ \text{fen. }z:c$, seno $(L:2c+z:c)=\text{fen. }L:2c$ $\text{cof. }z:c+\text{cof. }L:2c\ \text{fen. }z:c$, e perciò $\text{fen. }(L:2c-z:c)$ $+\text{fen. }(L:2c+z:c)=2\ \text{fen. }L:2c\ \text{cof. }z:c$, $-\text{fen. }(L:2c$ $-z:c)+\text{fen. }(L:2c+z:c)=2\,\text{cof. }L:2c\ \text{fen. }z:c$: ma come parimente si sa, $\text{fen. }L:c=2\ \text{fen. }L:2c\ \text{cof. }L:2c$; dunque $\frac{\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen. }(L:2c+z:c)}{\text{fen. }L:c}=\frac{\text{cof. }z:c}{\text{cof. }L:2c}$,

$$\frac{-\text{fen.}(L:2c-z:c)+\text{fen.}(L:2c+z:c)}{\text{fen. }L:c}=\frac{\text{fen. }z:c}{\text{fen. }L:2c}.$$

Nella formola (*a*) i segni del meno, e del più antepofti a 2 cof. $L:2c$ sono adattati alle due circoftanze, quello che cof. $L:2c$ sia quantità negativa, questo che cof. $L:2c$ sia quantità positiva. I segni più e meno nella formola (*b*), che precedono 2 sen. $L:2c$, servono ai due casi, che sen. $L:2c$ sia negativo, o positivo.

La surrogazione dei nuovi valori ci somministra le due seguenti equazioni, che nella più semplice forma esprimono le curve dei due diversi generi analoghe a quelle, che sono nelle figure 3, e 4 delineate

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ cof. } L:2c} + \frac{\text{cof. } z:c}{\text{cof. } L:2c} \quad (19)$$

$$\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ sen. } L:2c} + \frac{\text{sen. } z:c}{\text{sen. } L:2c} \quad (20).$$

Secondo ciò, che poco fa ho notato, i segni superiori nell' equazioni (19), e (20) suppongono cof. $L:2c$, sen. $L:2c$ grandezze negative, gl' inferiori le suppongono positive.

XV. Le cose, che sono per dire, richiedono, che rispettivamente alla formola (19) si dimostri essere

$$-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{-1 + \text{sen. } L:c + \text{cof. } L:c}{\sqrt{(\text{cof.} L:c.(1 - \text{sen.} L:c))}} = \frac{\mp 2 \text{sen.} L:2c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}.$$

E primieramente la formola (12) ci dà per riguardo all' equazione (19) $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = -\sqrt{\left(\frac{1 - \text{sen.} L:c}{\text{cof. } L:c}\right)}$

$+\sqrt{\left(\frac{\text{cof. } L:c}{1 - \text{sen. } L:c}\right)} = \frac{-1 + \text{sen. } L:c + \text{cof.} L:c}{\sqrt{(\text{cof.} L:c.(1 - \text{sen.} L:c))}}$. Provo in secondo luogo, che s' avvera l' equazione

$\frac{-1 + \text{sen.} L:c + \text{cof.} L:c}{\sqrt{(1 - \text{sen. } L:c)}} = \mp 2 \text{ sen. } L:2c$. Abbiamo dalla Trigonometria 2 sen. $L:c = 4$ sen. $L:2c$ cof. $L:2c$, e moltiplicando, e dividendo per $1 -$ sen. $L:c$,

$\frac{2\text{sen.} L:c - 2(\text{sen.} L:c)^2}{1 - \text{sen. } L:c} = 4$ sen. $L:2c$ cof. $L:2c$. Pongo in

cambio d' uno de' due quadrati $-(\text{sen.}\,L:c)^2$ il suo valore $-1+(\text{cos.}\,L:c)^2$, e mi si presenta

$$\frac{-1+2\,\text{sen.}\,L:c-(\text{sen.}\,L:c)^2+(\text{cos.}\,L:c)^2}{1-\text{sen.}\,L:c} = 4\,\text{sen.}\,L:2c\,\text{cos.}\,L:2c\,.$$

Dall' annotazione (*a*) ricavasi $\mp 2\,\text{cos.}\,L:2c$

$$= \frac{1-\text{sen.}\,L:c+\text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(1-\text{sen.}\,L:c)}}.$$ Sostituiscasi questo valore, e dividendo poscia per lo stesso, ritroverassi

$$\frac{-1+\text{sen.}\,L:c+\text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(1-\text{sen.}\,L:c)}} = \mp 2\,\text{sen.}\,L:2c,$$ e perciò $-e^{L:2c}$

$$+e^{-L:2c} = \frac{-1+\text{sen.}\,L:c+\text{cos.}\,L:c}{\sqrt{(\text{cos.}\,L:c.(1-\text{sen.}\,L:c))}} = \frac{\mp 2\,\text{sen.}\,L:2c}{\sqrt{\text{cos.}\,L:c}}\,.$$

Corollarj, che si deducono dalla formola (19.)

XVI. Dalla formola (19.) si deducono i seguenti corollarj.

1. Ponendo nella detta formola l' assissa $z=0$, ne risulterà il valore dell' applicata $y=Cc$ in tutte le curve analoghe alla figura (3.), dalle quali viene l' asse *AB* tagliato in un numero pari di punti. Avremo pertanto $Cc:Aa=y:b=\mp\frac{\sqrt{(\text{cos.}\,L:c)}+1}{2\,\text{cos.}\,L:2c}=1:2\,\text{sec.}\,L:2c\mp$ $\text{sec.}\,L:c\sqrt{\text{cos.}\,L:c}$ (*e*).

Dal ridurre a computo rispettivamente a ciascuna curva del genere di quella della figura (3.) la frazione $L:c$ dipende la determinazione del valore della linea *Cc*.

(*e*) Stando come il seno tutto al coseno, così la secante al seno tutto, si verifica l' equazione $\text{sec.}\,L:2c = \frac{1}{\text{cos.}\,L:2c}$, o sia $\frac{1}{2}\,\text{sec.}\,L:2c = \frac{1}{2\,\text{cos.}\,L:2c}$.

Mi riſervo d'inſegnare il metodo d'un tal calcolo al numero XIX, e ſeguenti.

2. Si prendano le differenze nella formola (19.), e ſcopriraſſi $2cdy:bdz \text{ coſ. } L:2c = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \sqrt{(\text{coſ. } L:c)}}{2}$ $-\text{ ſen. } z:c$ (21.). Facciaſi $dy:dz = 0$, e le radici dell'equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}).\sqrt{(\text{coſ. } L:c)} - 2 \text{ ſen. } z:c = 0$ determineranno i valori delle aſſiſſe z, alle quali corriſpondono le maſſime ordinate y nelle curve analoghe a quella nella figura (3) delineata. Secondo che queſte curve tagliano l'aſſe AB in 2, 4, 6, 8 punti ecc., i numeri delle predette radici ſaranno 1, 3, 5, 7 ecc. Una delle radici della noſtra equazione ſi è $z = 0$, e perciò nelle curve, di cui parliamo, aſcende al maſſimo l'ordinata Cc corriſpondente al punto medio C del cilindro AB.

3. Fatte $y = 0$, ſi troveranno i punti 2, 4, 6, 8 ecc., nei quali l'aſſe AB vien tagliato dalle curve compreſe nell'equazione (19.). Avremo pertanto $\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c} + \frac{2 \text{ coſ. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 0$. Mentre il cilindro oſcilla, queſti punti reſtano immobili, e quindi ſotto ponendo ai punti per eſempio E, F (*fig.* 3.) due appoggi, non ſono da eſſi ſraſtornate le vibrazioni del cilindro. La mentovata figura eſprime il modo principale, onde ſi vibra il cilindro, rendendo il ſuono fra tutti il più grave. I punti ſtabili E, F diſtano dalle eſtremità A, B del cilindro per le linee EA, FB, che come vedremo al numero XXX. poco calano dalla quarta parte della lunghezza AB. Negli ſtrumenti formati di cilindri i punti E, F ripoſano ſu due ſcannelli, eſſendo riuſcito alla pratica col mezzo di replicati tentativi di accorgerſi d'una proprietà, ſenza della quale non potrebbe la Muſica valerſi dei noſtri corpi ſonori.

4. Differenzio nuovamente la formola (21.), e ſcopro

$4c^2 ddy:bdz^2 . \text{cof.}\, L:2c = (\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}).\sqrt{}(\text{cof.}\, L:c) - 2\, \text{cof.}$ $z:c$ (22.). Abbiamo veduto al numero XI, che quando $ddy:dx^2 = ddy:dz^2 = 0$, è parimente nulla in quel tal ſito la curvatura del cilindro, il momento della ſua elaſticità, ed altresì la ſomma dei momenti delle forze applicate al cilindro ſteſſo o da un canto, o dall' altro. Si è pure fatta la rifleſſione, che ciò interviene nei punti eſtremi a, b del cilindro. Pongo nell' equazione (22) $ddy:dz^2 = 0$, e mi ſi affaccia $\pm e^{z:c} \pm {}^{-z:c} - \frac{2\, \text{cof.}\, z:c}{\sqrt{\text{cof.}\, L:c}} = 0$. Riſpettivamente ai punti eſtremi a, b è $z = \pm L:2$, e queſte debbono eſſere due radici della noſtra equazione. In fatti ſoſtituendo in cambio di z i detti valori, e fatta la rifleſſione eſſere $\text{cof.} - L:2c = \text{cof.}\, L:2c$, troveremo in tutti e due i caſi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2\, \text{cof.}\, L:2c}{\sqrt{\text{cof.}\, L:c}}$, equazione, che ho dimoſtrato eſſer vera al numero XIV nell' annotazione (*a.*)

Il numero delle radici dell' equazione, di cui trattiamo, s' eguaglia a quello de' punti 2, 4, 6, 8 ecc., ne' quali le curve tagliano l' aſſe AB. Detratte le due radici $z = \pm L:2$ le rimanenti 0, 2, 4, 6 ecc. ſervono a determinare nelle curve altrettanti fleſſi contrarj, ed in tali ſiti parimente s' eguaglia a nulla la curvatura del cilindro, e la ſomma dei momenti delle forze applicate a deſtra, o a ſiniſtra.

Le due metà per eſempio cEa, cFb (*fig.* 3.) delle noſtre curve ſono uguali, ſimili, e collocate in maniera, che ſegnate due aſſiſſe uguali CP, CQ, una poſitiva, e l' altra negativa, s' eguagliano le corriſpondenti ordinate PM, QN, e ſono amendue o poſitive, o negative. In prova di ciò faccia chi legge la rifleſſione, ch' eſſendo $\text{cof.}\, z:c = \text{cof.} - z:c$, nulla s' altera la formola (19.), mentre ſi cangia il ſegno all' incognita z; e quindi ad aſſiſſe uguali una poſitiva, e l' altra nega-

tiva ſi riferiſcono ordinate uguali, e ſimilmente ſituate.

Se dee pareggiare il nulla la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto eſtremo b delle forze applicate al cilindro $aEcFb$, egli è neceſſario, che le forze, ovvero le ordinate dalla noſtra curva ad eſſe proporzionali ſieno parte poſitive, e parte negative. Il perchè paſſando fra i due rami cEa, cFb la ſomiglianza teſtè deſcritta, ſi richiede indiſpenſabilmente, che ciaſcuno tagli l'aſſe AB almeno in un punto, come nella figura (3.) ſuccede.

La ſomma dei momenti in riguardo al punto M delle forze applicate alla porzione di cilindro aM è proporzionale a $ddy:dz^2 = ddy:dz^2$, o ſia alla quantità $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) — 2 coſ. $z:c$. Taglio $CQ = CP$, e ſcopro l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto N delle forze applicate alla parte $aEcN$ del cilindro come $(\mp e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) — 2 coſ. — $z:c$. L'eguaglianza delle ritrovate grandezze moſtra, che ſono eguali le ſomme dei nominati momenti: ma l'aggregato dei momenti riſpettivamente al punto N delle forze applicate al cilindro $aEcN$ pareggia quello in relazione al punto M delle forze applicate al cilindro $bFcM$; dunque s'eguagliano le ſomme dei momenti a deſtra, e a ſiniſtra del punto M preſo ad arbitrio, i quali perciò fanno equilibrio e coll'elaſticità del cilindro nel ſito M, e tra loro, dimodochè non può ſeguire verun moto di rotazione.

5. Preſe le differenze nella formola (22.) avremo $4c^3d^3y:bdz^3$. coſ. $L:2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) + 2 ſen. $z:c$ (23.). Dal numero X. raccoglieſi eſſere $ELf:M. d^3y:dx^3 = c^4d^3y:dx^3 = \int ydx$. Nel numero XII. ho notato, che la ſomma delle forze applicate al cilindro aM è proporzionale all'aja $aMPA = \int ydx = \int -ydz$ S'inferiſca, che queſta ſomma ſerba la ragione di $c^4d^3y:dx^3 = c^4d^3y:-dz^3$, o ſia per l'equazione (23.) della quantità $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}$ (coſ. $L:c$) — 2 ſen $z:c$. Qualora

s' abbia $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{cof.}\, L:c)} - 2\, \text{fen.}\, z:c = 0$, s' eguaglierà a nulla l' aggregato delle forze applicate al cilindro *aM*. L' ultima formola ha fempre le tre radici $z = 0$, $z = L:2$, $z = -L:2$. Pofta $z = 0$, chiaramente fi fcopre effere $e^{0:c} \mp e^{-0:c} = \pm 1 \mp 1 = 0$, $2\, \text{fen.}\, 0:c = 0$. Quefta radice mi addita eguagliarfi a nulla l' aggregato delle forze applicate alla metà *aEc* del cilindro, e che per confeguenza l' aja pofitiva *aEA* pareggia la negativa *CEc*. L' altre due radici $z = L:2$, $z = -L:2$ mi danno quella $(\pm e^{L:2c} \mp e^{-L:2c}) \sqrt{(\text{cof.}\, L:c)} - 2\, \text{fen.}\, L:2c = 0$, quefta $(\pm e^{-L:2c} \mp e^{L:2c}) \sqrt{(\text{cof.}\, L:c)} - 2\, \text{fen.} - L:c = 0$; e giacchè $-2\, \text{fen.} - L:2c = 2\, \text{fen.}\, L:2c$, trovo in tutti e due i cafi $-e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\pm 2\, \text{fen.}\, L:2c}{\sqrt{\text{cof.}\, L:c}}$, equazione, che al numero XV. ho dimoftrato verificarfi. Dalla radice $z = L:2 = CA$ fi ricava, che una fomma di forze uguali a nulla s' applica alla porzione *aM* del cilindro, quando effa pareggia il nulla. Finalmente, e quefto è quel che più importa, la radice $z = -L:2 = CB$ ci manifefta effer nullo l' aggregato delle forze applicate a tutto il cilindro *AB*, cioè a dire che le forze negative s' eguagliano alle pofitive. In sì fatta guifa non potendo il cilindro girarfi intorno qualfivoglia punto *M*, ed effendo egualmente tirato per le direzioni oppofte *Cc*, *cC*, viene trattenuto immobile nella pofitura *aEcFb* dalle forze *MH* uguali, e contrarie a quelle, che tentano di farlo reciprocare, e rimoffe effe forze *MH*, non concepifce altro moto, che di fola vibrazione.

XVII. Incontreremo nel corollario 5. dedotto dalla formola (20) l' equazione $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp \text{cof.}\, L:2c}{\sqrt{\text{cof.}\, L:c}}$, la di cui verità prefentemente dimoftro. L' equazione

(12) ci somministra rispettivamente alla formola (20)
$$e^{L:2c}+e^{-L:2c}=\sqrt{\left(\frac{1+\text{sen. }L:c}{\text{cos. }L:c}\right)}+\sqrt{\left(\frac{\text{cos. }L:c}{1+\text{sen. }L:c}\right)}$$
$$=\frac{1+\text{sen. }L:c+\text{cos. }L:c}{\sqrt{(\text{cos.}L:c.(1+\text{sen.}L:c))}}$$. Egli è d' uopo adunque provare adempiersi l' equazione $\frac{1+\text{sen.}L:c+\text{cos.}L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. }L:c)}}$
$=\mp 2\text{ cos. }L:2c$.

Moltiplico, e divido per $1+\text{sen. }L:c$ il primo membro dell' equazione $-2\text{ sen. }L:c=-4\text{ cos. }L:2c$, onde s' abbia $\frac{-2\text{sen.}L:c-2(\text{sen.}L:c)^2}{1+\text{sen. }L:c}=-4\text{ cos. }L:2c\text{ . sen. }L:2c$.
Il luogo d' uno de' due quadrati $-(\text{sen. }L:c)^2$ colloco il suo valore $-1+(\text{cos. }L:c)^2$, e trovo
$$\frac{-1-2\text{sen.}L:c-(\text{sen.}L:c)^2+(\text{cos.}L:c)^2}{1+\text{sen. }L:c}=-4\text{ cos. }L:2c\text{. sen.}L:2c:$$
ma per l' annotazione $(b)\pm 2\text{ sen. }L:2c=$
$\frac{-1-\text{sen.}L:c+\text{cos.}L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. }L:c}}$; dunque surrogando un tal valore, e dividendo poscia per lo stesso, scopriremo
$\frac{1+\text{sen.}L:c+\text{cos.}L:c}{\sqrt{(1+\text{sen. }L:c)}}=\mp 2\text{ cos. }L:2c$, e conseguentemente
sarà $e^{L:2c}+e^{-L:2c}=\frac{1+\text{sen.}L:c+\text{cos.}L:c}{\sqrt{(\text{cos.}L:c.(1+\text{sen.}L:c))}}$
$$=\frac{\mp 2\text{ cos. }L:2c}{\sqrt{\text{cos. }L:c}}.$$

Corollarj, che si deducono dalla formola (20).

XVIII. Dalla formola (20) ne nascono i corollarj seguenti.

1. La mentovata formola comprende tutte le curve analoghe

analoghe alla figura (4), che tagliano l' asse AB nel punto medio C. In fatti posta $z = CP = 0$, si trova $y = 0$. Le nostre curve hanno la comune proprietà, che a due assisse uguali CP, CQ, una positiva, e l' altra negativa corrispondono due ordinate uguali una positiva, e l' altra negativa, o a rovescio PM, QN. Se nell' equazione (20) $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos}.L:c)}}{2 \text{ sen}. L:2c}$ $+ \frac{\text{sen}. z:c}{\text{sen}. L:2c}$ cangeremo il segno all' incognita z, scopriremo $\frac{2y}{b} = \frac{(\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos}.L:c)}}{2 \text{ sen}. L:2c} + \frac{\text{sen}. -z:c}{\text{sen}. L:2c}$. Il paragone delle due espressioni dimostra, ch' essendo sen. $-z:c = -$ sen. $z:c$, a pari assisse CP, CQ quella positiva, e questa negativa si riferiscono ordinate uguali PM, QN, ma affette da segni contrarj. Quindi le due metà di curva $CgEa$, $CkFb$ sono eguali, e simili, ma inversamente collocate e in riguardo all' assisse, e in riguardo all' ordinate. Lo stesso dicasi delle due porzioni di curva $aEgCkN$, $bFkCgM$. Si osservi, che a punti analoghi per esempio g, k di queste porzioni ci vanno applicate forze uguali e contrarie, e che per conseguenza la somma dei momenti rispettivamente ai punti N, M delle forze applicate ad esse porzioni sono fra loro eguali, ma una positiva, e l' altra negativa.

2. Col mettere $y = 0$, si determinano i punti 3, 5, 7, 9 ecc., nei quali le curve contenute nell' equazione (20) tagliano l' asse AB. Una tal ipotesi mi somministra la formola $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) \cdot \sqrt{(\text{cos}. L:c)} + 2$ sen. $z:c = 0$, che va sempre fornita della radice $z = 0$, Mentre adunque il cilindro riposa equilibrato sopra un sostegno sottoposto al punto medio C, può ripiegarsi in tutte le curve espresse dall' equazione (20), e rendere i suoni ad esse curve confaccenti, fra' quali il più gra-

ve ſi è quello, che produce il cilindro, quando ſi conforma alla curva della figura (4). Se gli appoggi cadono ſotto gli altri punti immobili E, F, ſi ſente lo ſteſſo ſuono. Chi vuol udire un ſuono chiaro e ſorte, avverta di non battere il cilindro ne' punti ſtabili E, C, F. I ſiti più rimoti dai punti fiſſi ſono i più opportuni per batterlo, e ſpecialmente i due G, K, ai quali corriſpondono le maſſime ordinate Gg, Kk. Non rieſce molto utile il percuotere il cilindro in vicinanza dei punti eſtremi A, B; perchè parte della forza s' impiega a far girare il cilindro intorno al più vicino ſoſtegno.

3. Differenzio la formola (20), onde s' abbia $4cdy : -bdz.$ ſen. $L{:}2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L : c)} - 2\ \text{coſ.}\, z{:}c$ (24). Le radici dell' equazione $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L{:}c)} - 2\ \text{coſ.}\, z{:}c = 0$ determinano i punti per eſempio G, K, ai quali corriſpondono le maſſime ordinate Gg, Kk. I numeri di tali ordinate ſaranno 2, 4, 6, 8 ecc., ſecondo che le curve taglieranno l' aſſe AB in punti 3, 5, 7, 9 ecc.

4. Prendo di bel nuovo le differenze nell' equazione (24), e trovo $4c^2ddy : bdz^2$. ſen. $L : 2c = (\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L{:}c)} - 2$ ſen. $z{:}c$ (25). Eſſendo la ſomma dei momenti in relazione al punto M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro proporzionale a $ddy{:}dz^2$, ſerberà altresì la ragione della grandezza $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L{:}c)} - 2$ ſen. $z{:}c$. In que' ſiti, dove la predetta ſomma s' eguaglia a nulla, egli è d' uopo che s' adempia l' equazione $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.}\, L{:}c)} - 2$ ſen. $z{:}c = 0$. Ha ſempre queſta le tre radici $z = \pm L{:}2$, $z = 0$. Poſta $z = \pm L{:}2$, ſi trova $-e^{L:2c} + e^{-L:2c}$ $= \dfrac{\pm 2\ \text{ſen.}\ L{:}2c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}}$, ſecondo a ciò che ho dimoſtrato nell' annotazione (b). La prima radice determina il punto A, e m' inſegna, che quando la parte aM del cilindro

pareggia il nulla, ed il punto *M* coincide col punto *a*, è parimente nulla la somma dei momenti rispettivamente al punto *M*, ovvero *a* delle forze ad essa parte applicate. Dalla seconda radice, che ci dà il punto *B*, si raccoglie uguagliarsi a nulla l'aggregato dei momenti in riguardo al punto *b* delle forze applicate a tutto il cilindro *agCkb*. La terza radice segna il punto *C*, e fa palese, che al nulla equivale la somma dei momenti per rapporto al punto *C* delle forze applicate alla metà del cilindro *aEgC*. Noto, che nel sito *C* interviene un flesso contrario, e che il numero di tali flessi s'eguaglia a quello dei punti, nei quali le curve tagliano l'asse *AB*, detratto il binario.

Essendo le forze applicate a' punti analoghi delle due metà *aEgC*, *bFkC* del cilindro sempre uguali e contrarie, egli è manifesto, che tali pure sono le somme dei momenti delle forze applicate ed esse metà rispettivamente al punto medio *C*. Le dette somme frattanto debbono essere amendue o positive, o negative; perchè hanno da stare in equilibrio e tra loro, e colla forza elastica del cilindro nel sito *C*. Le due condizioni, che sembrano assolutamente ripugnanti, si conciliano insieme, quando le mentovate somme s'eguagliano a nulla, come effettivamente succede.

E quindi cade in acconcio la riflessione, essere necessario che le nostre curve taglino l'asse almeno in tre punti. Se le forze applicate alla metà *aEgC* del cilindro hanno da formar equilibrio rispettivamente al punto *C*, fa di mestieri che siano parte positive e parte negative, e questa circostanza indispensabilmente richiede, che la curva *aEgC* sia parte al disotto, e parte al disopra dell'asse *AB*, e che per conseguenza l'intersechi almeno in un punto *E*. Lo stesso dicasi della curva *bFkC*, la quale dee tagliare l'asse *AB* almeno in un punto *F*. S'aggiunga il punto *C*, e si troveranno tre per lo meno i punti d'intersezione.

Segno $CQ = CP$, e cangiato il ſegno all' incognita z nella formola (25) $4c^2ddy : bdz^2$ ſen. $L : 2c =$ $(\mp e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{}(\text{coſ.}\, L : c) - 2$ ſen. $z : c$, trovo $4c^2ddy : bdz^2$. ſen. $L : 2c = (\mp e^{-z:c} \pm e^{z:c}) . \sqrt{}(\text{coſ.}\, L : c)$ $- 2$ ſen. $z{:}c$, o ſia ponendo in cambio di $- 2$ ſen. $z{:}c$ la quantità eguale 2 ſen. $z{:}c$ $4c^2ddy : bdz^2$, ſen. $L : 2c =$ $(\pm e^{z:c} \mp e^{-z:c}) . \sqrt{}(\text{coſ.}\, L : c) + 2$ ſen. $z : c$. Paragonati inſieme gli omogenei di comparazione della formola (25), e dell' ultima, ſi ſcoprono eguali, ma uno negativo in riguardo all' altro. Eſprime il primo la ſomma dei momenti riſpettivamente al punto qualunque M delle forze applicate alla porzione aM del cilindro, e dal ſecondo vien dinotata la ſomma dei momenti in riguardo al punto N delle forze applicate alla parte di cilindro $aEgCkN$. I predetti aggregati adunque ſono eguali, e contrarj: ma altresì eguali e contrarj, come ho notato nel Corollario 1, ſono gli aggregati di momenti riſpettivamente ai punti N, M delle forze applicate alle porzioni di cilindro $aEgCkN$, $bFkCgM$; dunque paſſa una perfetta uguaglianza fra le ſomme dei momenti riferiti al punto M delle forze applicate alle parti di cilindro da eſſo punto M diviſe; ed eſſendo le nominate ſomme amendue coſpiranti, s' equilibrano mutuamente, dimodo che il cilindro non può far moto alcuno di giramento intorno qualſivoglia punto M ſcelto ad arbitrio.

5. Si differenzj la formola (25), onde s' abbia $4c^3d^3y : -bdz^3$. ſen. $L{:}2c = (\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{}(\text{coſ.}\, L{:}c) + 2$ coſ. $z{:}c$ (26). La ſomma delle forze applicate alla porzione di cilindro aM, che ha da eſſere proporzionale a $d^3y : -dz^3$, dee ſerbare altresì la ragione della quantità $(\pm e^{z:c} \pm e^{-z:c}) . \sqrt{}(\text{coſ.}\, L{:}c) + 2$ coſ. $z{:}c$. S' eguaglierà a nulla la detta ſomma, quando ſi verifichi l' equazione $e^{z:c} + e^{-z:c} = \dfrac{\mp 2 \text{ coſ. } z{:}c}{\sqrt{\text{coſ. } L{:}c}}$, a cui apparten-

gono le due radici $z = \pm L:2$. In fatti sostituito in luogo di z prima l' uno, indi l' altro valore, trovo in tutti e due i casi $e^{L:2c} + e^{-L:2c} = \frac{\mp 2 \text{ cos. } L:2c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}$, formola, che al numero XVII. ho provato esser vera. La radice $z = L:2$ m' istruisce, che quando la porzione aM del cilindro eguaglia il nulla, s' applica ad essa un aggregato nullo di forze. Dalla radice $z = -L:2$ ci viene additato, equivalere al nulla la somma delle forze applicate all' intero cilindro AB, il che interviene, qualora le forze negative pareggiano le positive.

Si cavi l' importantissima conseguenza, che ancora quando il cilindro AB s' adatta alle curve del secondo genere, dalle quali l' asse AB viene tagliato in un numero impari di punti, si adempiono le due proprietà, ch' esso non possa rivolgersi intorno qualsivoglia punto M, e che sia del pari tirato da due somme di forze uguali, e contrarie. Quindi le forze MH eguali ed opposte a quelle, che tentano di farlo reciprocare, lo tengono immobile nel sito $aEgCkFb$, e tolte di mezzo esse forze, altro movimento, salvochè quello di vibrazione, non gli è permesso di poter acquistare.

Ridurre a computo la grandezza, o sia l' angolo L:c.

XIX. Prendo nuovamente per mano la formola (12) $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{sen. } L:c}{\text{cos. } L:c}$, e fatta la riflessione, che tanto $e^{L:c}$, quanto $1 \mp \text{sen. } L:c$ sono sempre quantità positive, ne inferisco, che sotto tal classe dee parimente riporsi cos. $L:c$. Fatto centro in C, col raggio $CA = 1$ (*fig.* 9) descrivasi il circolo $ABab$, il quale dalle linee Aa, Bb venga partito in quattro quadranti. Se il coseno CG dell' angolo ACF, o pure il coseno Cg dell' an-

golo *ACf* hanno da essere positivi, il che succede, quando la loro direzione è da *C* verso *A*, si rende necessario che i lati *CF*, *Cf* cadano dentro i quadranti *ACB*, *ACb*. Per la qual cosa l' angolo *L:c* potrà ricevere infiniti valori, i quali staranno o fra l' angolo nulla e l' angolo retto, o fra i tre e i quattro retti, o fra i quattro e i cinque, o fra i sette e gli otto, o fra gli otto e i nove, o fra gli undici e i dodici, o fra i dodici e i tredici ecc. S' esprima colla lettera *q* l' angolo retto, o sia il quadrante di circolo, il cui raggio $= 1$, e chiamato ϕ quell' angolo minor del retto, per cui l' angolo *L:c* differisce da un determinato numero di retti, ci si presenteranno le seguenti equazioni

1. $L:c = q - \phi$
2. $L:c = 3q + \phi$
3. $L:c - 5q - \phi$
4. $L:c = 7q + \phi$
5. $L:c = 9q - \phi$
6. $L:c = 11q + \phi$
7. $L:c = 13q - \phi$

ecc.

Le formole, cui stanno a lato i numeri impari, assegnano all' angolo $L:c = ACF$ valori tali, che il lato *CF* cade sempre dentro il quadrante *ACB*. Al contrario le formole segnate coi numeri pari attribuiscono all' angolo $L:c = ACf$ quelle grandezze, mercè le quali il lato *Cf* è costantemente compreso dentro il quadrante *ACb*.

Al punto *A* del circolo *ABab* conduco la tangente indefinita *HAh*, e divisi per metà ne' punti *I*, *i* i due angoli *ACF*, *bCf*, ciascun de' quali vien dinotato dalla specie ϕ, delineo le secanti *CIH*, *Cih*. Descritte le linee *FG*, *fg* parallele a *Bb*, *FN*, *fn* parallele ad *Aa*, si tirino le rette *FB*, *Fb*, *fb*, *fB*.

Insistendo sopra lo stesso arco *FB* i due angoli *FbB*

alla circonferenza, FCB al centro, ſi corriſpondono nella ragione 1 : 2; ma per la coſtruzione l' angolo FCB è doppio dell' HCB; dunque paſſa eguaglianza fra gli angoli FbA, HCB. Si oſſervi eguagliarſi gli angoli alterni HCB, CHA, e ſi deduca l' egualità degli angoli FbM, CHA nei triangoli rettangoli FbM, CHA, i quali perciò ſono ſimili, e ci ſomminiſtrano l'analogia $bM : MF :: HA : AC$. Giacchè $FG = MC$ è il ſeno dell' angolo $ACF = L{:}c$, ſcopriremo $bM = 1 + \text{ſen.}\, L{:}c$. Abbiamo inoltre $MF = \text{coſ.}\, L{:}c$, ed altresì $HA = \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\phi$, cioè a dire la linea HA eguale alla cotangente dell' angolo BCI metà del $BCF = \phi$. Ecco adunque l' eſpreſſione analitica della ſovrappoſta analogia $1 + \text{ſen.}\, L{:}c : \text{coſ.}\, L{:}c :: \text{coſ.}\, \frac{1}{2}\phi : 1$, da cui deriva l' equazione
$$\frac{1 + \text{ſen.}\, L{:}c}{\text{coſ.}\, L{:}c} = \text{coſ.}\, \tfrac{1}{2}\phi.$$
Abbiamo ſuperiormente notato, che la formola $e^{L:c} = \frac{1 + \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c}$ ci guida all'equazione (20) propria delle curve del ſecondo genere, che tagliano l' aſſe AB (*fig.* 4) in un numero impari di punti. S' inferiſca pertanto, che a tali curve ſervono gli angoli ACF (*fig.* 9), il cui lato CF cade dentro il quadrante ACB, e che s' eguagliano ad angoli retti 1, 5, 9, 13 ecc. meno l' angolo ϕ.

Collo ſteſſo progreſſo dimoſtrerò verificarſi l'analogia $Bm : mf :: hA : AC$. Noto ch' eſſendo negativo il ſeno $gf = Cm$ dell'angolo $ACf = L{:}c$, la linea Bm s' eguaglia ad $1 - \text{ſen.}\, L{:}c$; e quindi la premeſſa analogia s' eſprimerà così
$1 - \text{ſen.}\, L{:}c : \text{coſ.}\, L{:}c :: \text{cot.}\, \frac{1}{2}\phi : 1$, e ne riſulterà l' equazione $\frac{1 - \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c} = \text{cot.}\, \frac{1}{2}\phi$. Fatta l' avvertenza, che dall' equazione $e^{L:c} = \frac{1 - \text{ſen.}\, L:c}{\text{coſ.}\, L:c}$ deriva la formola (19)

ſpettante alle curve del primo genere, che interſecano l'aſſe *AB* (*fig.* 3.) in un numero pari di punti; ſi deduca ſervire a sì fatte curve gli angoli *ACf* (*fig*: 9), il cui lato *Cf* ſta dentro il quadrante *ACb*, e che pareggiano angoli retti 3, 7, 11 ecc. più l'angolo ϕ.

Le coſe dette ci moſtrano a dito adempierſi l'equazione $e^{L:c} = \frac{1 \mp \text{ſen.} L:c}{\text{coſ.} L:c} = \text{cot.} \frac{1}{2}\phi$, la quale comprende le curve del primo, e del ſecondo genere. Facendo tranſito dai numeri ai logaritmi, e richiamando a memoria eſſere log. $e = 1$, troveremo $L:c = \text{log. cot.} \frac{1}{2}\phi$.

XX. Prima di paſſar oltre, egli è d'uopo provare, che il valore $L:c = q - \phi$ non può convenire a veruna curva del ſecondo genere, alla quale ad un cilindro, che oſcilla, ſia conceſſo adattarſi. Eſſendo l'angolo $L:c = q - \phi$ minore del retto, ſcopreſi poſitivo il ſeno dell' angolo $L:2c$. Qualmente ho avvertito al numero XIV. i ſegni inferiori della formola (20.) ſuppongono ſen. $L:2c$ grandezza poſitiva. Nel caſo adunque, che preſentemente ſi eſamina, avremo $\frac{2y}{b} = \frac{(e^{z:c} - e^{-z:c}) . \sqrt{(\text{coſ.} L:c)}}{2 \text{ ſen.} L:2c} + \frac{\text{ſen.} z:c}{\text{ſen.} L:2c}$. Poſto $L:c = q - \phi$, non può l'ordinata y pareggiare il nulla, ſalvochè nella circoſtanza, che ſia $z = 0$. Quindi non s'adempirebbe quello, che nel Corollario 4. del numero XVIII. ho dimoſtrato dover ſuccedere, che la curva (*fig.* 4.) *aEgCkFb* interſechi l'aſſe *AB* almeno in tre punti. Sia primieramente z maggiore del nulla; e giacchè il maſſimo valore, che poſſa attribuirſi a z, ſi è $L:2$, ci accorgeremo eſſere ſempre poſitivo ſen. $z:c$, ed altresì il termine $\frac{\text{ſen.} z:c}{\text{ſen.} L:2c}$. Conciofſiachè $e = 2,718281 8$, ſcopriremo le due quantità $e^{z:c}$, $e^{-z:c}$ l'una maggiore, e l'altra minore dell'unità, ed

ed inferiremo, che il termine $\frac{(e^{z:c}-e^{-z:c}).\sqrt{\text{cof. } L:c}}{2 \text{ fen. } L:2c}$

fi mantiene pofitivo coftantemente. Conchiudafi, che all' affiffa z pofitiva corrifponderebbe l'ordinata y affermativa; effendo $2y:b$ uguale alla fomma di due termini fempre pofitivi, e che contro la natura della noftra equazione la curva $CgEa$ caderebbe tutta al difotto del femiaffe CA, nè lo taglierebbe in alcun punto medio fra C ed A.

In fimil guifa dimoftrerò, che fupponendo z minore del nulla, vale a dire negativa, farebbe fempre negativa l'ordinata y, e ftando tutta la curva $CkFb$ al difopra del femiaffe CB, non l' interfecherebbe in verun punto medio fra C e B.

XXI. Efclufo il valore $L:c = q - \phi = \text{log. cof. } \frac{1}{2}\phi$, regiftro nella feguente tavola quelli, che fono confacenti all'equazioni (19) e (20), o fia alle curve del primo, e del fecondo genere.

1. $L:c = 3q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
2. $L:c = 5q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
3. $L:c = 7q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
4. $L:c = 9q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
5. $L:c = 11q + \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$
6. $L:c = 13q - \phi = \text{log. cot. } \frac{1}{2}\phi$

ecc.

Si trova il logaritmo iperbolico della cotangente d'un qualunque angolo, prendendo il lagaritmo delle tavole, fottraendo il logaritmo del feno tutto, e moltiplicando il refiduo per 2, 3025851 (*f*). Per alleg-

(*f*) I logaritmi dei feni, e delle tangenti, e quelli dei numeri appartengono alla fteffa logiftica, e differifcono folo nel protonumero, a cui fi affegna il logarit-

gerire una tal fatica, torna in acconcio il nuovamente ricorrere ai logaritmi. Sia u il logaritmo iperbolico della cotangente dell'angolo $\frac{1}{2}\phi$. Prendasi dalle tavole il logaritmo d'essa cotangente, e fatta la detrazione

---

mo nulla. I primi logaritmi hanno per protonumero $\frac{1}{100000}$, cioè a dire l'unità divisa pel seno tutto: e quindi all'unità tocca il logaritmo 5, 0000000. I secondi logaritmi accettano siccome protonumero l'unità. Si cavi la conseguenza, che si fa transito da quei logaritmi a questi, scemando per 5, 0000000 i logaritmi delle tavole dei seni.

Si chiamino T, t le cotangenti, l'una presa dalle tavole, e l'altra relativa ad un circolo di raggio $= 1$, ambe corrispondenti allo stesso angolo $\frac{1}{2}\phi$, le quali debbono stare come i raggi 100000, 1. Avremo pertanto $\frac{T}{100000} = t$, e giacchè $1 : \frac{1}{100000} :: T : t$, sarà passando ai logaritmi $\log. \frac{1}{100000} + \log. T - \log. 1 = \log t$: ma nelle tavole dei seni $\log. \frac{1}{100000} = 0$, $\log. 1 = 5,0000000$; dunque $\log. T - 5,0000000 = \log. t$. Ho fatta l'osservazione, che si fa passaggio dai logaritmi delle tavole de' seni a quelli dei numeri, minorando i primi per 5,0000000. Il perchè se log. T si seguiti a prendere nelle tavole dei seni, e log. t si prenda nelle tavole dei numeri, avremo $\log. T - 10,0000000 = \log. 1$.

Tramuteremo i logaritmi comuni in iperbolici premessa la riflessione, che riconoscendo entrambi per protonumero l'unità, i logaritmi d'un qualunque numero serbano la proporzione dei logaritmi d'un numero da-

del logaritmo del seno tutto, quello che avanza si chiami v. Essendo adunque $u = 2, 3025851 . v$, avremo prendendo nelle tavole i logaritmi dei numeri, $\log. u = \log. v + 0, 36221571$, e giacchè $u = nq \pm \phi$, sarà altresì $\log. u = \log. (uq \pm \phi)$. Per determinare quest' ultimo logaritmo, l' angolo ϕ deve esprimersi in parti del raggio nella stessa guisa, che parimente in parti del raggio si dinota l' angolo retto $q = 1, 5707963$. Otterremo l'intento, se ridurremo l'angolo ϕ in minuti secondi, e dal logaritmo di cotal numero sottrerremo costantemente 5, 3144251 (g). Così ne risulterà log. ϕ, il quale facendo ritorno ai numeri, ci somministrerà il valore dell' angolo ϕ, da cui dipende quello dell' angolo $L{:}c = u = nq \pm \phi$. Ho detto, che dal logaritmo del numero dei secondi componenti l' angolo ϕ

Ppp ij

---

to. Ora i logaritmi comune, ed iperbolico del numero 10 sono 1 ; 2, 3025851 ; dunque facendo
$1 : 2, 3025851 :: \log. T - 10, 0000000 :$
$(\log. T - 10, 0000000) . 2, 3025851$, il quarto termine esprimerà il logaritmo iperbolico cercato conforme alla regola da me data.

(g) Abbiamo notato essere l' angolo retto
$q = 1, 5707963$ parti del raggio $= 1$. Lo stesso angolo s' eguaglia a secondi 324000. Sia N il numero dei minuti secondi, ond' è composto l' angolo ϕ, e dall' analogia $324000 : 1, 5707963 :: N{:}\phi$ ricaveremo il valore dell' angolo ϕ espresso in parti del raggio, cioè a dire
$\frac{N. 1, 5707963}{324000} = \phi$, o facendo transito ai logaritmi
$\log. N + \log. 1, 5707963 - \log. 324000 = \log. \phi$: ma
$\log. 324000 = 5, 5105450$, $\log. 1, 5707963 =$
$0, 1961199$, e $5, 5105450 - 0, 1961199 =$
$5, 3144251$; dunque $\log N - 5, 3144251 = \log \phi$, come dovea dimostrarsi.

dee ſottrarſi 5, 3144251. Concioſſiachè nei computi, che ſono per fare, troveremo ſempre il primo logaritmo minore del ſecondo, s' accreſca la caratteriſtica di quello per 10, e fatta poſcia la ſottrazione, ne proverrà un logaritmo, la cui caratteriſtica ſupererà la vera per 10. Queſt' aumentazione ci addita, che in cambio di ſcrivere il numero corriſpondente al noſtro logaritmo nella ſede, che richiede la caratteriſtica riſultante dalla ſottrazione, lo dobbiamo traſportare dieci ſedi all' indietro.

XXII. Fatte queſte neceſſarie avvertenze per agevolare, e dedurre i calcoli rettamente, non ſarà difficile l' aſſegnare col mezzo delle approſſimazioni il valore dell' angolo ϕ riſpettivamente a qualſivoglia ſpecie di oſcillazioni. Imperciocchè attribuendo a ϕ alquanti valori ad arbitrio, e determinando col computo $nq \pm \phi$, e log. coſ. $\frac{1}{2}\phi$, ſi ſcopriranno i limiti, dentro de' quali ſta il vero valore dell' angolo ϕ; e ſe tali limiti ſono troppo rimoti, ſe ne troveranno de' più vicini, e da queſti finalmente ſi dedurrà il giuſto valore dell' angolo mentovato. Pongo ſotto gli occhi di chi legge i calcoli fino al numero 6, e noto eſſer inutile il continuarli più avanti; atteſochè l' angolo ϕ diviene così menomiſſimo, che ſi può fiſicamente ſupporre $L:c = nq$.

Computo pel numero I.	$L:c = 3q + \phi = \log. \cot. \frac{1}{2} \phi$.
$\phi = 1^\circ, 0, 40''$	$\phi = 1^\circ, 0, 41''$
in min. ſec. = 3 640	in min. ſec. = 3 641
log. = 3 , 5611014	log. = 3 , 5612207
ſottra 5 , 3144251	ſottra 5 , 3144251
log. ϕ = 8 , 2466763	log. ϕ = 8 , 2467956
ϕ = 0 , 0176472	ϕ = 0 , 0176521
$3q$ = 4 , 7123890	$3q$ = 4 , 7123890
$L:c = 3q + \phi$ = 4 , 7300262	$L:c = 3q + \phi$ = 4 , 7300411

$\frac{1}{2}\phi = 30', 20''$	$\frac{1}{2}\phi = 30', 20''\frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi$ = 12 , 0543425	log. cot. $\frac{1}{2}\phi$ = 12 , 0542232
v = 2 , 0543425	v = 2 , 0542232
log. v = 0 , 3126728	log. v = 0 , 3126476
aggiungi 0 , 3622157	aggiungi 0 , 3622157
log. u = 0 , 6748885	log. u = 0 , 6748633
$L:c = u$ = 4 , 7302984	$L:c = u$ = 4 , 7300240
errore = + 2622	errore = − 171
altro errore = − 171	
differenza = 2793 .	

Differenza = 1'' fra i due valori dell' angolo ϕ . Facciaſi $2793 : 2622 :: 1'' : \frac{2622''}{.2793} = 0, 9388''$, ed il quarto termine s'eguaglierà a quella quantità, che aggiunta a $1^\circ, 0, 40''$ mi dà il vero valore dell' angolo

$\phi = 1^\circ, 0', 40, 9388''$
in min. ſec. = 3640 , 9388''
log. = 3 , 5612132
ſottra 5 , 3144251
log. ϕ = 8 , 2467881
ϕ = 0 , 0176518
$3q$ = 4 , 7123890
$L:c = 3q + \phi$ = 4 , 7300408 grandezza adequatamente giuſta dell' angolo $L:c$ eſpreſſo in parti del raggio = 1 .

Computo pel numero 2.	$L:c = 5q - \phi \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$.
$\phi = 0, 2', 40''$	$\phi = 0, 2', 41''$
in min. sec. $= 1\ 60$	in min. sec. $= 1\ 61$
log. $= 2,2041200$	log. $= 2,2068259$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
log. $\phi = 6,8896949$	log. $\phi = 6,8924008$
$\phi = 0,0007757$	$\phi = 0,0007806$
$5q = 7,8539816$	$5q = 7,8539816$
$L:c = 5q - \phi = 7,8532059$	$L:c = 5q - \phi = 7,8532010$
$\frac{1}{2}\phi = 0, 1', 20''$	$\frac{1}{2}\phi = 0, 1', 20''\frac{1}{2}$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 13,4113351$	log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 13,4086292$
$v = 3,4113351$	$v = 3,4086292$
log. $v = 0,5329244$	log. $v = 0,5325798$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $0,3622157$
log. $u = 0,8951401$	log. $u = 0,8947955$
$L:c = u = 7,8548897$	$L:c = u = 7,8486600$
errore $= +\ 16838$	errore $= -\ 45410$
altro errore $= -\ 45410$	
differenza $= 62248$	

Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $62248 : 16838 :: 1'' : \frac{16838''}{62248}$ $= 0, 27050''$ quantità da aggiugnersi a $0, 2', 40''$ onde s' abbia il giusto valore dell' angolo

$\phi = 0,2',40,27050''$
in min. sec. $= 160,27050$
log. $= 2,2048536$
sottra $5,3144251$
log. $\phi = 6,8904285$
$\phi = 0,0007770$
$5q = 7,8539816$
$L:c = 5q - \phi = 7,8532046$ misura fisicamente esatta dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio.

Computo pel numero 3.	$L:c = 7q + \phi = \log. \cot. \frac{1}{2}\phi$
$\phi = 0,\ 0,\ 6''$	$\phi = 0,\ 0,\ 7''$
$\log. = 0,7781512$	$\log. = 0,8450980$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$\log. \phi = 5,4637261$	$\log. \phi = 5,5306729$
$\phi = 0,0000291$	$\phi = 0,0000339$
$7q = 10,9955743$	$7q = 10,9955743$
$L:c = 7q + \phi = 10,9956034$	$L:c = 7q + \phi = 10,9956082$

$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ 3''$	$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ 3\frac{1}{2}''$
$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 14,8373039$	$\log. \cot. \frac{1}{2}\phi = 14,7703571$
$v = 4,8373039$	$v = 4,7703571$
$\log. v = 0,6846034$	$\log. v = 0,6785509$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $= 0,3622157$
$\log. u = 1,0468191$	$\log. u = 1,0407666$
$L:c = u = 11,1383051$	$L:c = u = 10,9841553$
errore $= + 1427017$	errore $= - 113529$
altro errore $= - 113529$	

differenza $=$ 1540546 Differenza $= 1''$ fra i due valori dell' angolo ϕ. Facciasi $1540546 : 1427017 :: 1'' : \frac{1427017''}{1540546} = 0,\ 9263060''$ porzione di secondo, che aggiunta a $0,\ 0,\ 6''$, mi somministra la misura quanto basta dell' angolo

$\phi = 0, 0', 6, 9263060''$

$\log. = 0,8405017$

sottra $5,3144251$

$\log. \phi = 5,5260766$

$\phi = 0,0000336$

$7q = 10,9955743$

$L:c = 7q + \phi = 10,9956079$ grandezza fisicamente esatta dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio. Si troverebbe con maggior precisione il valore dell' angolo

$\phi = 6,9202852''$, supponendo $L:c = u = 10,9956079$; ed indi retrocedendo con metodo contrario a quello da me tenuto, fino a tanto che ci si presenta il valore di $\frac{1}{2}\phi$ espresso in secondi. Nei numeri seguenti a cagione della somma picciolezza dell' angolo ϕ, mi servirò di un tale artificio.

Computo pel numero 4.	$L:c = 9q - \phi = \text{log. cot.}\ \frac{1}{2}\phi$.
$\phi = 0,\ 0,\ \frac{2}{7}''$	$\phi = 0,\ 0,\ \frac{1}{3}''$
log. $= -0,5440680$	log. $= -0,4771212$
sottra $5,3144251$	sottra $5,3144251$
$-5,8584931$	$-5,7915463$
aggiungi $10,0000000$	$10,0000000$
log. $\phi = 4,1415069$	log. $\phi = 4,2084537$
$\phi = 0,000001385$	$\phi = 0,000001616$
$9q = 14,137166941$	$9q = 14,137166941$
$L:c = 9q - \phi = 14,137165556$	$L:c = 9q - \phi = 14,137165325$

$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ \frac{1}{2}''$	$\frac{1}{2}\phi = 0,\ 0,\ \frac{1}{6}''$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 16,1595232$	log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 16,0925764$
$v = 6,1595232$	$v = 6,0925764$
log. $v = 0,7895471$	log. $v = 0,7848010$
aggiungi $0,3622157$	aggiungi $0,3622157$
log. $u = 1,1517628$	log. $u = 1,1470167$
$L:c = u = 14,182828217$	$L:c = u = 14,028676138$
errore $= +\ 45662661$	errore $= -\ 108489187$
altro errore $= -\ 108489187$	
differenza $= 154151848$	

Differenza $= 231$ fra i due valori del angolo ϕ espresso in parti del raggio. Facciasi $154151848 : 45662661 :: 231 : 68$ quantità che aggiunta a 1385 mi dà l' aggiustato valore dell' angolo

$\phi = 0,000001453$

$\phi = 0,000001453$ Sottraendo questo da $9q$, resta
$L:c = 9q - \phi = 14,137165488$. Pongasi adunque

$L:c = u = 14,137165488$
log. $u = 1,1503623$
sottra $0,3622157$
log. $v = 0,7881466$
$v = 6,1396921$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 16,1396921$
$\frac{1}{2}\phi = 0,1495316''$
$\phi = 0,2990633''$ grandezza esattissima dell' angolo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 5. $L:c = 11q + \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$.
Riducendo a calcolo nel presente, e nel seguente numero il valore dell' angolo $L:c$, trascuro siccome rispettivamente minimo l' angolo ϕ.

$L:c = u = 17,2787596$
log. $u = 1,2375125$
sottra $0,3622157$
log. $v = 0,8752968$
$v = 7,5046691$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 17,5046691$
$\frac{1}{2}\phi - 0,006461837''$
$\phi = 0,012923673''$ misura adequatamente giusta dell' angolo picciolissimo ϕ espresso in secondi.

Computo pel numero 6. $L:c = 13q - \phi =$ log. cot. $\frac{1}{2}\phi$.

$L:c = u = 20,4203522$
log. $u = 1,3100632$
sottra $0,3622157$
log. $v = 0,9478475$
$v = 8,8684449$
log. cot. $\frac{1}{2}\phi = 18,8684449$
$\frac{1}{2}\phi = 0,000279242''$
$\phi = 0,000558483''$ valore fisicamente esatto dell' angolo ϕ espresso in parti di minuto secondo.

Dispongo ordinatamente nella tavola, che segue, le sei determinate grandezze dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio.

Valori dell' angolo $L:c$ espresso in parti del raggio $= 1$.

(1) $L:c = 3q + \phi =$	4, 7300408	log. $=$ 0, 6748648
(2) $L:c = 5q - \phi =$	7, 8532046	log. $=$ 0, 8950469
(3) $L:c = 7q + \phi =$	10, 9956079	log. $=$ 1, 0412192
(4) $L:c = 9q - \phi =$	14, 1371655	log. $=$ 1, 1503623
(5) $L:c = 11q + \phi =$	17, 2787596	log. $=$ 1, 2375125
(6) $L:c = 13q - \phi =$	20, 4203522	log. $=$ 1, 3100632
ecc.		ecc.

Determinare il numero di vibrazioni fatte da un Cilindro nel tempo d' un minuto secondo rispettivamente a ciascun modo, in cui può oscillare.

XXIII. Si chiami m il numero, a cui s' eguaglia l' angolo $L:c$, onde s' abbia $L:c = m$, e conseguentemente $L = mc$. E conciossiachè al numero XIII. s' è posto $c^4 = ELf:M$, si scoprirà $L^4 = m^4 ELf:M$, e perciò $f = ML^3 : m^4 E$. Abbiamo stabilito al fine del numero III. $E = KrM^2 : g^2 L^2$. Fatta la surrogazione d' un tal valore, troveremo $f = L^5 g^2 : Km^4 Mr$. Dalla prima equazione esprimente la lunghezza f del pendolo semplice isocrono impareremo serbar essa lunghezza la proporzione composta, diretta delle masse, e del cubo delle lunghezze dei cilindri, ed inversa del quadrato — quadrato del numero m, e della forza E, il cui valore si determina col mezzo degli esperimenti, qualmente ho insegnato nei numeri V. VI. e VII. La seconda espressione ci addita, che la lunghezza f del pendolo semplice isocrono sta in ragione composta, diretta della quinta potestà delle lunghezze L dei cilindri, e del quadrato della loro gravità specifica g, ed inversa del quadrato — quadrato del numero m, della massa M, e della ri-

gidità r della materia, onde ſono formati. Non ho fatta menzione del coefficiente K, perchè ho già notato al numero III. mantenerſi ſempre coſtante in tutti i cilindri.

Eſſendo la gravità ſpecifica eguale alla maſſa diviſa pel volume, ed eſſendo la baſe d'un cilindro proporzionale al quadrato del ſuo diametro, avremo g come $M:LD^2$, e per conſeguenza M come gLD^2. Soſtituiti nella noſtra ſeconda eſpreſſione della lunghezza f del pendolo ſemplice iſocrono prima in cambio di g, poſcia in cambio di M, i valori proporzionali, troveremo f come $L^3M:m^4D^4r$, f come $L^4g:m^4D^2r$.

Dalle quattro eſpreſſioni generali ſi dedurranno agevolmente le particolari. Se per eſempio due cilindri ſieno compoſti della ſteſſa materia, e ſi vibrino ſimilmente, ripiegandoſi in curve, che taglino l'aſſe in numero eguale di punti; ſaranno coſtanti i valori delle ſpecie g, r, m, e ſi ſcoprirà f come $L^4:D^2$, cioè a dire le lunghezze dei pendoli ſemplici iſocroni in ragione compoſta, diretta quadruplicata delle lunghezze dei cilindri, ed inverſa duplicata dei loro diametri.

XXIV. Sia b la lunghezza del pendolo ſemplice, che nel fare una vibrazione c'impiega un minuto ſecondo, dimodochè ſia $b = 3, 16625$ piedi del Reno, o pure $b =$ piedi 3 linee 8, 57 del piede Reale di Parigi: e giacchè le durate delle oſcillazioni ſerbano la ragione ſudduplicata delle lunghezze dei pendoli, il tempo d'una vibrazione d'un cilindro s'eguaglierà a ſecondi

$\sqrt{f}:\sqrt{b} = \frac{1}{m^2}\sqrt{(ML^3:bE)} = \frac{1}{m^2}\sqrt{(L^5g^2:KbMr)}$. Conſeguentemente avremo il numero delle vibrazioni fatte dal cilindro in un minuto ſecondo, o ſia il ſuono d'eſſo cilindro, ch'io chiamo $S = m^2\sqrt{(bE:ML^3)} = m^2\sqrt{(KbrM:L^5g^2)}$.

Se nell'eſpreſſione ſeconda in vece di g, o di M ſo-

ſtituiremo i valori proporzionali $M{:}LD^2$, gLD^2, ci ſi preſenterà S come $m^2\sqrt{(rD^4{:}ML^3)}$, come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$.

La formola $S = m^2\sqrt{(hE{:}ML^3)}$ ſerve per iſcoprire il preciſo numero di vibrazioni, che fa un cilindro nel tempo d'un minuto ſecondo, potendoſi determinare il valore della forza E col mezzo degli eſperimenti, la grandezza della maſſa M col mezzo del peſo, la lunghezza L con diligente miſura, ed eſſendo cogniti la lunghezza h del pendolo a ſecondi, ed il numero m, qualmente che il cilindro ſi vibra piuttoſto in un modo, che nell'altro.

L'ultima maniera, colla quale ſi dinotano i ſuoni dei cilindri, cioè S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$, ci mette ſotto degli occhi nel ſuo più ſemplice aſpetto la legge, che dà regola ai ſuoni ſteſſi, i quali ſtanno in proporzione compoſta, diretta duplicata del numero m, ſemplice de' diametri D dei cilindri, dimezzata della rigidità r della materia che li compone, e reciproca duplicata delle loro lunghezze L, e dimezzata delle loro gravità ſpecifiche g.

Corollarj, che ſi deducono dalla formola S come $\frac{m^2D}{L^2}\sqrt{(r{:}g)}$.

XXV. Dal predetto ultimo modo d'eſprimere i ſuoni dei cilindri s'inferiſcono parecchi corollarj.

1. Cavo ſubito quella conſeguenza, che ha l'aria di paradoſſo, e che da qualcuno non ſi crederebbe, ſe non veniſſe confermata dall'eſperienza, ed è ch' eſſendo il reſto pari, i cilindri ſono tanto più acuti, quanto il diametro loro è maggiore. Si dileguerà per altro l'apparente ripugnanza qualora ſi rifletta, che la forza elaſtica E creſce all'aumentarſi del diametro D, avendola dimoſtrata proporzionale a D^4r nel numero III. e creſce a proporzione più di quello s'ingrandiſca la maſſa M, laonde nell'ipoteſi, che preſentemente ſi conſidera, abbiamo $S = m^2\sqrt{(hE{:}ML^3)}$ proporzionale a D.

2. Poſtochè due cilindri oſcillino ſimilmente adattandoſi a curve, che interſecano l'aſſe in numero eguale di punti, ſarà coſtante la ſpecie m, e ne riſulterà S come $\frac{D}{L^2}\sqrt{(r:g)}$.

3. Nella ſteſſa ſuppoſizione troveremo la rigidità r come $S^2L^4g:D^2$. Col mezzo dei ſuoni adunque ſi può ſcoprire la proporzione fra le rigidità di varie materie, le quali rigidità, quando i cilindri ſieno egualmente lunghi e groſſi, accetteranno la ragione S^2g, che ſi compone della duplicata dei ſuoni, e della ſemplice delle gravità ſpecifiche. Queſte mie determinazioni ſi accordano con ciò, che ha dimoſtrato il Co: *Jacopo Riccati* mio Padre nella ſua Diſſertazione intorno le leggi delle forze elaſtiche inſerita nel *Tomo I. dei Comentarj dell' Accademia di Bologna*, e riſtampata nel Tomo III. delle ſue Opere.

4. Se due cilindri, che ſi vibrano ſimilmente, ſaranno formati della ſteſſa materia, onde ſieno egualmente rigidi, ed egualmente gravi in iſpezie, o pure ſe in eſſi le rigidità ſtaranno come le gravità ſpecifiche, ſcopriraſſi S come $D:L^2$, cioè a dire i ſuoni in ragione compoſta, diretta dei diametri dei cilindri, ed inverſa duplicata delle loro lunghezze.

5. Se inoltre i due cilindri ſaranno ſimili, avremo S come $1:L$, o pure S come $1:D$, vale a dire i ſuoni dei cilindri ſimili ſi riguarderanno nella ragione reciproca dei lati omologhi. Queſta legge abbraccia tutti i corpi ſimili della ſteſſa materia formati, non eccettuate le corde, per l'eſatta ſimilitudine delle quali non baſta, che i diametri ſieno proporzionali alle lunghezze, ma biſogna altresì che le loro particole ſieno ugualmente rigide, il che interviene, quando le corde ſi ſtendono con forze in ragione delle loro baſi. Coſa maravioglioſa ſi è, che ſi dia un caſo, nel quale s'uniſcano in un ſolo i canoni cotanto diverſi, donde prendono regola i ſuoni di varj corpi differenti nella ſtrut-

tura, e nelle circostanze, che nelle loro vibrazioni influiscono.

6. I suoni dello stesso cilindro si riferiscono nella proporzione dei quadrati m^2. Essendo $m = nq \pm \phi$, se gli angoli ϕ fossero talmente piccioli, che si potessero totalmente trascurare, abbraccierebbero i suoni il rapporto dei quadrati n^2: e giacchè n s'eguaglia in serie ai numeri impari 3, 5, 7, 9, 11, 13 ecc., i predetti suoni sarebbero come i quadrati di tali numeri, cioè a dire come 9, 25, 49, 81, 121, 169 ecc. Messi a computo gli angoli ϕ, e principalmente il più grande, che corrisponde al numero (1.), si trovano alterate per poco più di mezzo comma $\frac{81}{80}$, il cui log. = 53950, le proporzioni 9:25, 9:49, 9:81 ecc., nelle quali il suono grave 9 paragonasi cogli acuti. Le altre proporzioni riescono pressochè giuste; imperciocchè il maggior divario, che modifica la ragione 25:49, s'eguaglia in logaritmi a 885 parte 61.ma del comma.

Registro nella seguente tavola i sei suoni, che rende un cilindro, mentre oscillando s'adatta a quelle curve, che tagliano l'asse in 2, 3, 4, 5, 6, 7 punti. Paragono i suoni acuti col grave, noto le alterazioni dei rapporti 9:25, 9:49, 9:81 ecc., ed osservo a quali semplici proporzioni si accostino i mentovati rapporti modificati.

Paragone del ſuono più grave d' un cilindro coi ſuoni acuti.

Quantità proporzionale ai ſuoni.	Loro logaritmi.	
(1) $m^2=(3q+\phi)^2$	log. 1, 3497296	
(2) $m^2=(5q-\phi)^2$	log. 1, 7900938	$=$ log. $\frac{25}{9}$ — 33333, ſuono, che cala dalla Quarta maggiore ſopra l' Ottava $\frac{25}{9}$ per qualche coſa più di mezzo Comma, il cui log. $=$ 53950.
(3) $m^2=(7q+\phi)^2$	log. 2, 0824384	$=$ log. $\frac{49}{9}$ — 32448. Queſto intervallo ſupera la Quarta ſopra la doppia Ottava per 57100 quantità poco più grande del Comma.
(4) $m^2=(9q-\phi)^2$	log. 2, 3007246	$=$ log. $\frac{81}{9}$ $=$ log. 9 — 32475, Seconda maggiore ſopra l' Ottava triplicata.
(5) $m^2=(11q+\phi)^2$	log. 2, 4750250	$=$ log. $\frac{121}{9}$ — 32475, Seſta maggiore preſſochè giuſta ſopra la tripla Ottava, creſcendo ſolamente per 3566, parte decimaquinta del Comma.
(6) $m^2=(13q-\phi)^2$	log. 2, 6201264	$=$ log. $\frac{169}{9}$ — 32475, Seconda ſuperflua ſopra la quadrupla Ottava, calante per 6700 ottava parte del Comma dalla ragione $\frac{7}{6}$. 16 $=$ $\frac{56}{3}$ propria d' eſſo intervallo.

XXVI. In grazia dell' esperimento, che a suo luogo riferirò, metto sotto gli occhi di chi legge la seguente Tavola, in cui, posto che il suono più grave d'un cilindro sia unisono ad una corda, la cui lunghezza 60, dispongo ordinatamente le lunghezze delle porzioni della corda stessa unisone agli altri suoni d' esso cilindro.

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti d' un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera.

	Lunghezze delle corde
(1)	60
(2)	21, 75 +
(3)	11, 10 +
(4)	6, 717 —
(5)	4, 496 +
(6)	3, 219 +
ecc.	ecc.

XXVII. Stabilisce rettamente il celebratissimo Signor *Leonardo Eulero*, che rispettivamente alle lamine elastiche sia $S = m^2 \sqrt{(hE:ML^3)}$. Ma asserendo egli alla pag. 269. che la forza elastica E sta in ragione, composta della rigidità r della materia componente le lamine della loro larghezza D, e del quadrato G^2 della loro grossezza, viene ad abbracciare la proporzione S come $\frac{m^2}{L^2} \sqrt{(Gr:g)}$, la quale non si accorda colla verità, ed è riprovata dall' esperienza. Le lamine della stessa materia simili, e similmente vibrantisi, non s' uniformerebbero alla legge comune a tutti i corpi simili, i cui suoni serbano la ragione reciproca dei lati omologhi. Oltre a ciò i suoni delle lamine, che differiscono solo nella grossezza, dovrebbero riferirsi nella proporzione dimezzata delle grossezze, e gli esperimenti c' insegnano, che i suoni si corrispondono nella ragione

ne delle groſſezze. Col metodo da me praticato in riguardo ai cilindri ſi dimoſtra, che nelle lamine la forza elaſtica E ſta come rDG^3. Fatto uſo di un tal canone, troveremo S come $\frac{m^2G}{L^2}\sqrt{(r:g)}$, rapporto, che ha il fondamento d' una rigoroſa dimoſtrazione, e coll' eſperienza s' accorda mirabilmente.

Aggiungo l' importante avvertenza, che nella determinazione dei ſuoni delle lamine elaſtiche non ha veruna parte la loro larghezza; dimodochè due lamine, la cui differenza conſiſta ſolo nella larghezza, rendono lo ſteſſo ſuono.

Determinare riſpettivamente a ciaſcun modo, in cui può oſcillare un cilindro, i nodi, o punti ſtabili intorno ai quali ſi vibra.

XXVIII. Dalle coſe ſopra ſpiegate raccoglieſi, che il numero de' punti immobili s' eguaglia a 2, 3, 4, 5, 6, 7 ecc. ſecondo che un cilindro ſi vibra o giuſto la prima, o giuſto la ſeconda, o giuſto la terza ecc. ſpecie delle oſcillazioni, che può concepire. Se il numero dei nodi è impari, un nodo cade alla metà del cilindro, e la ſua poſizione è determinata. Reſterebbe adunque da ſtabilirſi il ſito di due nodi nelle ſpecie di vibrazioni prima e ſeconda, di quattro nodi nelle ſpecie terza e quarta, di ſei nodi nelle ſpecie quinta e ſeſta; ſenonchè ſendo collocati eſſi nodi a coppia a coppia a pari diſtanze dalla metà del cilindro, l' uno a deſtra, e l' altro a ſiniſtra, baſta a determinare un nodo nella prima e nella ſeconda ſpecie, due nodi nella terza e nella quarta ſpecie, tre nodi nella quinta e nella ſeſta ſpecie di oſcillazioni, e così di ſeguito.

Nel ſito del punto immobile è l' ordinata $y = 0$, ed in tal ipoteſi abbiamo per i corollari terzo del numero XVI. e ſecondo del numero XVIII. le due equazioni

$e^{z:c} + e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ cof.}^{z:c}}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$, $e^{z:c} - e^{-z:c} = \pm \frac{2 \text{ fen.}^{z:c}}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$. Il fegno negativo negli omogenei di comparazione è adattato a que' cafi, ne' quali fono negative le quantità cof. $z:c$, fen. $z:c$. Se i predetti cofeni, e feni fi confidereranno fempre pofitivi, qualunque fia la lor direzione, valerà il fegno pofitivo, del quale farò ufo coftantemente. Servono le due equazioni, la prima pel genere di vibrazioni indicato coi numeri impari, la feconda pel genere di vibrazioni dai numeri pari contraffegnato.

Si ftabilifce la pofitura d'un nodo, affegnando all'angolo $z:c$ quella precifa mifura, onde fecondo i varj generi di vibrazioni fi verifichi o l'una, o l'altra delle premeffe equazioni. Troveremo poi la grandezza fificamente efatta dell'angolo mentovato, ponendo in opera il metodo dei limiti ufato al numero XXII. per ifcoprire il valore dell'angolo ϕ. Offerverà il Lettore nei feguenti computi, ch' io riftringo la mifura dell'angolo $z:c$ fra due confini, che differifcono per un folo minuto fecondo, e che dagli errori, nei quali s'incorre abbracciando l'uno, o l'altro limite, ne deduco il valore adequatamente giufto dell'angolo $z:c$.

XXIX. S'efprima in minuti fecondi l'angolo $z:c$, e col metodo infegnato al numero XXI. e praticato al numero XXII. in riguardo all'angolo ϕ fi trovi il logaritmo dell'angolo $z:c$ efpreffo in parti del raggio $= 1$. Il logaritmo del numero $e = 2, 7182818$ s'eguaglia a $0, 4342945$, ed il logaritmo di queft'ultimo numero pareggia $- 0, 3622157$, e quindi il logaritmo del logaritmo del numero e, o fia
log. log. $e = - 0, 3622157$. Sottraendo adunque dal logaritmo dell'angolo $z:c$ efpreffo in parti del raggio il numero $0, 3622157$, ne rifulterà una quantità $=$ log. $z:c$ $+$ log. log. e. Si faccia tranfito coll'ajuto delle tavole dai logaritmi ai numeri, e ci fi prefenterà il valore della grandezza $z:c$ log. e, e nuovamente paffando dai logarit-

mi ai numeri, ſcopriremo il valore di $e^{z:c}$. Dato queſto, rieſce facile il ritrovare il valore di $e^{-z:c}=\frac{1}{e^{z:c}}$, e conſeguentemente quello di $e^{z:c}\pm e^{-z:c}$.

I valori dell'uno, e dell'altro omogeneo di comparazione $\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$, $\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$ ſi determinano col mezzo del ſeguente artificio. Prendaſi dalle tavole il logaritmo del coſ. $z:c$, e del ſen. $z:c$, ed indi ſottratto $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$, dal reſiduo nuovamente ſi levi 4, 6989700, e quello che reſta s' eguaglierà a log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$, o pure a log. $\left(\frac{2\,\text{ſen.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$ (*b*). I predetti coſeni, e ſeni

(*b*) Chiamo U, V i logaritmi preſi dalle tavole dei ſeni delle quantità coſ. $z:c$, coſ. $L:c$, e per le coſe dimoſtrate nell' annotazione ſegnata (*f*), ed inſerita nel numero XXI. ſaranno $U-10,0000000$, $V-10,0000000$ i logaritmi tolti dalle tavole dei numeri, proprj dei coſeni relativi al raggio $=1$ degli ſteſſi angoli $z:c$, $L:c$; dimodochè ſi avrà log. coſ. $z:c=U-10,0000000$, log. coſ. $L:c=V-10,0000000$: ma in riguardo ai logaritmi comuni, il cui protonumero $=1$ log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$ $=$ log. coſ. $z:c+$ log. $2-\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$; dunque ſurrogati nell' omogeneo di comparazione in cambio di log. coſ. $L:c$, di log. 2 i loro valori $U-10,0000000$; $V-10,0000000$; 0, 3010300, e ridotti i computi, troveremo log. $\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)=U-\frac{1}{2}V-4,6989700$;

faranno relativi al raggio $= 1$, ficcome al principio del numero XIII. è ftato da me prefcritto. Fatto pofcia il paffaggio dai logaritmi ai numeri, ci fi affaccieranno i valori dei due omogenei di comparazione $\frac{2 \text{ cof. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$, $\frac{2 \text{ fen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}$.

Determinato col metodo dei limiti il valore fificamente efatto dell' angolo $z:c$ efpreffo in minuti fecondi, e trovato poi il logaritmo del medefimo angolo efpreffo in parti del raggio $= 1$, fi fottri log. $L:c$, ed il refiduo s' eguaglierà a log. $z:L$. I diverfi valori, che può avere log. $L:c$ rifpettivamente alle varie fpecie di ofcillazioni, gli ho regiftrati al fine del numero XXII. Aggiungafi log. $2 = 0, 3010300$, e ne rifulterà il valore di log. $z:\frac{1}{2}L$, col mezzo del quale le tavole ci fuggeriranno quello di $z:\frac{1}{2}L$, quantità, che determina la cercata proporzione fra la linea nota $\frac{1}{2}L = CA$ (*fig.* 3, 4, 5, 6, 7, 8 ecc.) e la lunghezza di z uguale per efempio a CE, all' eftremità della quale il punto immobile E corrifponde.

XXX. Dopo che ho fpiegata la maniera d' iftituire i computi paffo ad effettuare i computi fteffi, che m' hanno coftata una lunga fatica, e ch' io continuo fino alla fpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

---

il che ecc. La fteffa dimoftrazione vale per comprovare il valore affegnato a log. $\left(\frac{2. \text{ fen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right)$.

Computo per la ſpecie I. delle vibrazioni dei cilindri.

$z{:}c=$	$74,\ 45',\ 23''$	$z{:}c=$	$74,\ 45,\ 24''$
in min. ſec. $=$	$269123''$	in min. ſec. $=$	$269124''$
log. $=$	5,4299508	log. $=$	5,4299524
ſottra	5,3144251	ſottra	5,3144251
log. $z{:}c=$	0,1155257	log. $z{:}c=$	0,1155273
ſottra	0,3622157	ſottra	0,3622157
log. $z{:}c$ + log. log. $e=$	9,7533100	log. $z{:}c$ + log. log. $e=$	9,7553116
$z{:}c$ log. $e=$	0,5666436	$z{:}c$ log. $e=$	0,5666457
$e^{z:c}=$	3,6867496	$e^{z:c}=$	3,6867674
$e^{-z:c}=$	0,2712417	$e^{-z:c}=$	0,2712403
$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	3,9579913	$e^{z:c}+e^{-z:c}=$	3.9580077
log. coſ. $z{:}c=$	9,4198295	log. coſ. $z{:}c=$	9,4198218
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L{:}c=$	4,1233764	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L{:}c=$	4,1233764
	5,2964531		5,2964454
ſottra	4,6989700	ſottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right)=$	0,5974831	$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right)=$	0,5974754
$\frac{2\ \text{coſ.}\ L:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}=$	3,9580665	$\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}=$	3,9579964
errore $=+$	752	errore $=-$	113
altro errore $=-$	113		
differenza $=$	865		

Facciaſi $865 : 752 :: 1'' :$ $\frac{752''}{865} = 0,\ 8694''$ porzione di ſecondo, per cui va accreſciuto il minor valore dell' angolo $z{:}c$, onde ſia

$z{:}c=$	$269123,8694''$
log. $=$	5,4299522
ſottra	5,3144251
log. $z{:}c=$	0,1155271
ſottra log. $L{:}c=$	0,6748648
log. $z{:}L=$	9,4406623

aggiun. $\log.2 = 0,3010300$

$\log. z:\frac{1}{2}L = 9,7416923$

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0,5516864$ (*fig.* 3.)

Computo per la specie II. delle vibrazioni dei cilindri

$z:c =$	$165°,32',5''$	$z:c =$	$165°,32',6''$
in min. sec. $=$	595925	in min. sec. $=$	595926
$\log. =$	$5,7751916$	$\log. =$	$5,7751924$
sottra	$5,3144251$	sottra	$5,3144251$
$\log. z:c =$	$0,4607665$	$\log. z:c =$	$0,4607673$
sottra	$0,3622157$	sottra	$0,3622157$
$\log. z:c + \log.\log. e =$	$0,0985508$	$\log. z:c + \log.\log. e =$	$0,0985516$
$z:c \log. e =$	$1,2547317$	$z:c \log. e =$	$1,2547340$
$e^{z:c} =$	$17,9775993$	$e^{z:c} =$	$17,9776945$
$e^{-z:c} =$	$0,0556248$	$e^{-z:c} =$	$0,0556245$
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$17,9219745$	$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$17,9220700$
$\log. \text{sen.}\, z:c =$	$9,3975807$	$\log. \text{sen.}\, z:c =$	$9,3975725$
sottr. $\frac{1}{2}\log. \text{cos.}\, L:c =$	$3,4452230$	sottr. $\frac{1}{2}\log. \text{cos.}\, L:c =$	$3,4452230$
	$5,9523577$		$5,9523495$
sottra	$4,6989700$	sottra	$4,6989700$
$\log. \left(\frac{2\, \text{sen.}\, z:c}{\sqrt{\text{cos.}\, L:c}}\right) =$	$1,2533877$	$\log. \left(\frac{2\, \text{sen.}\, z:c}{\sqrt{\text{cos.}\, L:c}}\right) =$	$1,2533795$
$\frac{2\, \text{sen.}\, z:c}{\sqrt{\text{cos.}\, L:c}} =$	$17,9220512$	$\frac{2\, \text{sen.}\, z:c}{\sqrt{\text{cos.}\, L:c}} =$	$17,9217128$
errore $= +$	767	errore $= -$	3572
altro errore $= -$	3572		
differenza $=$	4339		

Facciasi $4339 : 767 :: 1'' : \frac{767''}{4339} = 0,1768''$ parte di secondo, che deve aggiungersi al più piccolo valore dell'angolo $z:c$, onde s'abbia

$z:c = 595925,1768''$

$\log. = 5,7751918$

sottra $5,3144251$

$\log. z:c = 0,4607667$

ſottra log. $L:c$ =	0,8950469
log. $z:L$ =	9,5657198
aggiungi log. 2 =	0,3010300
log. $z:\frac{1}{2}L$ =	9,8667498
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA$ =	0,7357831 (*fig.* 4)

Computo per la ſpecie III. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c$ =	89°,10′,41″	$z:c$ =	89°,10′,42″
in min. ſec. =	321041″	in min. ſec. =	321042″
log. =	5,5065605	log. =	5,5065618
ſottra	5,3144251	ſottra	5,3144251
log. $z:c$ =	0,1921354	log. $z:c$ =	0,1921367
ſottra	0,3622157	ſottra	0,3622157
log. $z:c$ + log. log. e =	9,8299197	log. $z:c$ + log. log. e =	9,8299210
$z:c$ log. e =	0,6759580	$z:c$ log. e =	0,6759600
$e^{z:c}$ =	4,7419617	$e^{z:c}$ =	4,7419836
$e^{-z:c}$ =	0,2008832	$e^{-z:c}$ =	0,2108822
$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	4,9528449	$e^{z:c} + e^{-z:c}$ =	4,9528658
log. coſ. $z:c$ =	8,1566857	log. coſ. $z:c$ =	8,1565394
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$ =	2,7628494	ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c$ =	2,7628494
	5,3938363		5,3936900
ſottra	4,6989700	ſottra	4,6989700
$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$ =	0,6948663	$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}\right)$ =	0,6947200
$\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$ =	4,9529772	$\frac{2\,\text{coſ.}\,z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\,L:c}}$ =	4,9513090
errore = +	1323	errore = −	15568
altro errore = −	15568		
differenza =	16891		

Facciaſi 16891 : 1323 :: 1″ : $\frac{1323''}{16891}$ = 0, 0783″ porzione di ſecondo da aggiungerſi al minor valore dell' ang olo $z:c$, onde s' abbia

$z:c = 321041{,}0783''$
$\log. = 5{,}5065606$
ſottra $5{,}3144251$

$\log. z:c = 0{,}1921355$
ſottra $\log. L:c = 1{,}0412192$

$\log. z:L = 9{,}1509163$
aggiungi $\log. 2 = 0{,}3010300$

$\log. z:\frac{1}{2}L = 9{,}4519463$
$z:\frac{1}{2}L = CE:CA = 0{,}2831042$ (*fig.* 5)

Segue il computo per la ſpecie III. delle virbazioni dei cilindri.

$z:c = 255°{,}30'{,}6''$	$z:c = 255°{,}30'{,}7''$
in min. ſec. $= 919806''$	in min. ſec $= 919807''$
$\log. = 5{,}9636963$	$\log. = 5{,}9636967$
ſottra $5{,}3144251$	ſottra $5{,}3144251$
$\log. z:c = 0{,}6492712$	$\log. z:c = 0{,}6492716$
ſottra $0{,}3622157$	ſottra $0{,}3622157$
$\log. z:c + \log.\log. e = 0{,}2870555$	$\log. z:c + \log.\log. e = 0{,}2870559$
$z:c \log. e = 1{,}9366695$	$z:c \log. e = 1{,}9366713$
$e^{z:c} = 86{,}4309940$	$e^{z:c} = 86{,}4313519$
$e^{-z:c} = 0{,}0115700$	$e^{-z:c} = 0{,}0115699$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86{,}4425640$	$e^{z:c} + e^{-z:c} = 86{,}4429218$
$\log. \text{coſ.}\, z:c = 9{,}3985507$	$\log. \text{coſ.}\, z:c = 9{,}3985426$
ſottr. $\frac{1}{2}\log. \text{coſ.}\, L:c = 2{,}7628494$	ſottr. $\frac{1}{2}\log. \text{coſ.}\, L:c = 2{,}7628494$
$6{,}6357013$	$6{,}6356932$
ſottra $4{,}6989700$	ſottra $4{,}6989700$
$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}}\right) = 1{,}9367313$	$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}}\right) = 1{,}9367232$
$\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}} = 86{,}4432869$	$\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}} = 86{,}4416733$
errore $= +\ 7229$	errore $= -\ 12485$
altro errore $= -\ 12485$	
differenza $= 19714$	Facciaſi $19714 : 7229 :: 1'' ::$

$\frac{7229''}{19714} = 0, 3667''$ parte di fecondo, che dee aggiungerfi al valore più picciolo dell' angolo $z:c$, onde fia

$z:c = 919806,3667''$
log. $= 5,9636964$
fottra $5,3144251$

log. $z:c = 0,6492713$
fottra log.$L:c = 1,0412192$

log. $z:L = 9,6080521$
aggiungi log.$2 = 0,3010300$

log. $z:\frac{1}{2}L = 9,9090821$
$z:\frac{1}{2}L = C2E:CA = 0,8111144$ (*fig.* 5.)

Computo per la fpecie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 179°,12',50''$	$z:c = 179°,12',51''$
in min. fec. $= 645170''$	in min. fec. $= 645171''$
log. $= 5,8096742$	log. $= 5,8096749$
fottra $5,3144251$	fottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,4952491$	log. $z:c = 0,4952498$
fottra $0,3622157$	fottra $0,3622157$
log.$z:c$+log.log. $e = 0,1330334$	log.$z:c$+log.log. $e = 0,1330341$
$z:c$ log. $e = 1,3584179$	$z:c$ log. $e = 1,3584201$
$e^{z:c} = 22,8253757$	$e^{z:c} = 22,8254913$
fottra $e^{-z:c} = 0,0438107$	fottra $e^{-z:c} = 0,0439107$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 22,7815650$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 22,7816806$
log. fen. $z:c = 8,1373342$	log. fen. $z:c = 8,1371818$
fottra$\frac{1}{2}$log.cof.$L:c = 2,0806276$	fottra$\frac{1}{2}$log.cof.$L:c = 2,0806276$
$6,0567066$	$6,0565542$
fottra $4,6989700$	fottra $4,6989700$
log. $\left(\frac{2 \text{ fen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) = 1,3577366$	log. $\left(\frac{2 \text{ fen. } z:c}{\sqrt{\text{cof. } L:c}}\right) = 1,3575842$

$\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}} = 22{,}7890714$

errore $= +$ 75064

altro errore $= -$ 804

differenza $= +$ 75868

$\frac{2\ \text{sen.}\ z:c}{\sqrt{\text{cos.}\ L:c}} = 22{,}7816002$

errore $= -$ 804

Facciasi 75868 : 75064 : : 1″ : $\frac{75064''}{75868} = 0{,}9894''$ porzione di secondo, che va aggiunta al minor valore dell' angolo $z:c$, onde ci si presenti

$z:c = 645170{,}9894''$

log. $=$ 5,8096748

sottra 5,3144251

log. $z:c =$ 0,4952497

sottra log. $L:c =$ 1,1503623

log. $z:L =$ 9,3448874

aggiungi log. 2 $=$ 0,3010300

log. $z:\frac{1}{2}L =$ 9,6459174

$z:\frac{1}{2}L = CE:CA =$ 0,4425042 (*fig.* 6)

Segue il computo per la specie IV. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 345°,30',15''$	$z:c = 345°,30',16''$
in min. sec. $= 1243815''$	in min. sec. $= 1243816''$
log. $=$ 6,0947558	log. $=$ 6,0947561
sottra 5,3144251	sottra 5,3144251
log, $z:c =$ 0,7803307	log. $z:c =$ 0,7803310
sottra 0,3622157	sottra 0,3622157
log.$z:c$+log.log.$e =$ 0,4181150	log.$z:c$+log.log.$e =$ 0,4181153
$z:c$ log. $e =$ 2,6188764	$z:c$ log. $e =$ 2,6188782
$e^{z:c} = 415{,}7922488$	$e^{z:c} = 415{,}7939713$
sottra $e^{-z:c} = 0{,}0024050$	sottra $e^{-z:c} = 0{,}0024050$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 415{,}7898438$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 415{,}7915663$
log. sen. $z:c =$ 9,3984774	log. sen. $z:c =$ 9,3984693
sottr. $\frac{1}{2}$log.cos.$L:c =$ 2,0806276	sottr. $\frac{1}{2}$log.cos.$L:c =$ 2,0806276
7,3178498	7,3178417

ſottra 4,6989700

$\log.\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}}\right) = 2,6188798$

$\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}} = 415,7955024$

errore $= +$ 56586

altro errore $= -$ 38151

differenza $=$ 94737

ſottra 4,6989700

$\log.\left(\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}}\right) = 2,6188717$

$\frac{2\ \text{ſen.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}} = 415,7877512$

errore $= -$ 38151

Facciaſi $94737 : 56586 :: 1'' : \frac{56586''}{94737} = 0,5973''$ parte di ſecondo, che aggiunta al minor valore dell' angolo $z{:}c$ ci dà

$z{:}c = 1243815,5973''$

log. $=$ 6,0947560

ſottra 5,3144251

$\log. z{:}c = 0,7803309$

ſottra $\log. L{:}c = 1,1503623$

$\log. z{:}L = 9,6299686$

aggiungi $\log. 2 = 0,3010300$

$\log. z{:}\frac{1}{2}L = 9,9309986$

$z{:}\frac{1}{2}L = C2E{:}CA = 0,8530974$ (*fig.* 6)

Computo per la ſpecie V. delle vibrazioni de' cilindri.

$z{:}c = 89°,57',50''$

in min. ſec. $= 323870''$

log. $=$ 5,5103707

ſottra 5,3144251

$\log. z{:}c = 0,1959456$

ſottra 0,3622157

$\log. z{:}c + \log.\log. e = 9,8337299$

$z{:}c \log. e = 0,6819144$

$e^{z:c} = 4,8074458$

$e^{-z:c} = 0,2080107$

$e^{z:c} + e^{-z:c} = 5,0154565$

$z{:}c = 89°,57',51''$

in min. ſec. $= 323871''$

log. $=$ 5,5103720

ſottra 5,3144251

$\log. z{:}c = 0,1959469$

ſottra 0,3622157

$\log. z{:}c + \log.\log. e = 9,8337312$

$z{:}c \log. e = 0,6819165$

$e^{z:c} = 4,8074690$

$e^{-z:c} = 0,2080097$

$e^{z:c} + e^{-z:c} = 5,0154787$

log. coſ. $z{:}c$ = 6,7995181
ſottr $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L{:}c$ = 1,3984804
5,4010377
ſottra 4,6989700

$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}}\right) = 0,7020677$

$\frac{2\ \text{coſ.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}} = 5,0357912$

errore = + 203347
altro errore = − 184235
differenza = 387582

log. coſ. $z{:}c$ = 6,7961645
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L{:}c$ = 1,3984804
5,3976841
ſottra 4,6989700

$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}}\right) = 0,6987141$

$\frac{2\ \text{coſ.}\ z{:}c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L{:}c}} = 4,9970552$

errore = − 184235

Facciaſi 387582 : 203347 :: $1'' : \frac{203347''}{387582} = 0,5247''$ parte di ſecondo da aggiungerſi al valore più picciolo dell' angolo $z{:}c$, onde ſia

$z{:}c$ = 323870,5247″
log. = 5,5103714
ſottra 5,3144251
log. $z{:}c$ = 0,1959463
ſottra log. $L{:}c$ = 1,2375125
log. $z{:}L$ = 8,9584338
aggiungi log. 2 = 0,3010300
log. $z{:}\frac{1}{2}L$ = 9,2594638
$z{:}\frac{1}{2}L = CE{:}CA$ = 0,1817456 (*fig.* 7)

Segue il computo per la ſpecie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z{:}c$ = 269°,12′,45″
in min. ſec. = 969165″
log. = 5,9863977
ſottra 5,3144251
log. $z{:}c$ = 0,6719726
ſottra 0,3622157
log. $z{:}c$ + log. log. e = 0,3097569
$z{:}c$ log. e = 2,0405954

$z{:}c$ = 269°,12′,46″
in min. ſec. = 969166″
log. = 5,9863982
ſottra 5,3144251
log. $z{:}c$ = 0,6719731
ſottra 0,3622157
log. $z{:}c$ + log. log. e = 0,3097574
$z{:}c$ log. e = 2,0405977

$e^{z:c} = 109{,}7982563$
$e^{-z:c} = 0{,}0091076$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 109{,}8073639$

log. coſ. $z:c = 8{,}1380961$
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 1{,}3984804$
$6{,}7396157$
ſottra $4{,}6989700$

$$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right) = 2{,}0406457$$

$$\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 109{,}8109762$$

errore $= +\ 36123$
altro errore $= -\ 354912$
differenza $= 391035$

$e^{z:c} = 109{,}7988375$
$e^{-z:c} = 0{,}0091076$
$e^{z:c} + e^{-z:c} = 109{,}8079451$

log. coſ. $z:c = 8{,}1379437$
ſottr. $\frac{1}{2}$ log. coſ. $L:c = 1{,}3984804$
$6{,}7394633$
ſottra $4{,}6989700$

$$\log.\left(\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}}\right) = 2{,}0404933$$

$$\frac{2\ \text{coſ.}\ z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\ L:c}} = 109{,}7724539$$

errore $= -\ 354912$

Facciaſi $391035 : 36123 :: 1'' : \frac{36123''}{391035} = 0,\ 0924''$ parte di ſecondo, per cui dee accreſcerſi il minor valore dell' angolo $z:c$, onde s' abbia

$z:c = 969165{,}0924''$
log. $= 5{,}9863978$
ſottra $5{,}3144251$
log. $z:c = 0{,}6719727$
ſottra log. $L:c = 1{,}2375125$
log. $z:L = 9{,}4344602$
aggiungi log. $2 = 0{,}3010300$
log. $z:\frac{1}{2}L = 9{,}7354902$
$z:\frac{1}{2}L = C2E:CA = 0{,}5438638$ (*fig.* 7)

Segue il computo per la ſpecie V. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 435^\circ, 30', 11''$
in min. ſec. $= 1567811''$
log. $= 6{,}1952936$

$z:c = 435^\circ, 30', 12''$
in min. ſec. $= 1567812''$
log. $= 6{,}1952939$

ſottra $5,3144251$

$\log. z:c = 0,8808685$

ſottra $0,3622157$

$\log. z:c + \log.\log. e = 0,5186528$

$z:c \log. e = 3,3010555$

$e^{z:c} = 2000,1174574$

$e^{-z:c} = 0,0005000$

$e^{z:c} + e^{-z:c} = 2000,1179574$

ſottra $5,3144251$

$\log. z:c = 0,8808688$

ſottra $0,3622157$

$\log. z:c + \log.\log. e = 0,5186531$

$z:c \log. e = 3,3010578$

$e^{z:c} = 2000,1280516$

$e^{-z:c} = 0,0005000$

$e^{z:c} + e^{-z:c} = 2000,1285516$

$\log. \text{coſ.}\, z:c = 9,3985100$

ſottr. $\frac{1}{2}\log.\text{coſ.}\, L:c = 1,3984804$

$8,0000296$

ſottra $4,6989700$

$$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}}\right) = 3,3010596$$

$$\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}} = 2000,1363427$$

errore $= +\ 183853$

altro errore $= -\ 295189$

differenza $= 479042$

$\log. \text{coſ.}\, z:c = 9,3985019$

ſottr. $\frac{1}{2}\log.\text{coſ.}\, L:c = 1,3984804$

$8,0000215$

ſottra $4,6989700$

$$\log.\left(\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}}\right) = 3,3010515$$

$$\frac{2\,\text{coſ.}\, z:c}{\sqrt{\text{coſ.}\, L:c}} = 2000,0990327$$

errore $= -\ 295189$

Facciaſi $479042 : 183853 :: 1'' : \frac{183853''}{479042} = 0,3838''$ porzione di ſecondo, che unita al minor valore dell' angolo $z:c$ ci dà

$z:c = 1567811,3838''$

$\log. = 6,1952938$

ſottra $5,3144251$

$\log. z:c = 0,8808687$

ſottra $\log. L:c = 1,2375125$

$\log. z:L = 9,6433562$

aggiun. $\log. 2 = 0,3010300$

$\log. z:\frac{1}{2}L = 9,9443862$

$z:\frac{1}{2}L = C3E:CA = 0,8798045$ (*fig.* 7.)

Computo per la specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c=$	$179°,57',56''$	$z:c=$	$179°,57',57''$
in min. sec.=	$647876''$	in min. sec.=	$647877''$
log.=	5,8114919	log.=	5,8114926
sottra	5,3144251	sottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,4970668	log. $z:c=$	0,4970675
sottra	0,3622157	sottra	0,3622157
log.$z:c$+log.log.$e=$	0,1348511	log.$z:c$+log.log.$e=$	0,1348518
$z:c$ log. $e=$	1,3641153	$z:c$ log. $e=$	1,3641175
$e^{z:c}=$	23,1267891	$e^{z:c}=$	23,1269063
$e^{-z:c}=$	0,0432399	$e^{-z:c}=$	0,0432397
$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	23,0835492	$e^{z:c}-e^{-z:c}=$	23,0836666
log. sen. $z:c=$	6,7789965	log. sen. $z:c=$	6,7706810
sottr.$\frac{1}{2}$log.cos.$L:c=$	0,7162924	sottr.$\frac{1}{2}$log.cos.$L:c=$	0,7162924
	6,0627041		6,0543886
sottra	4,6989700	sottra	4,6989700
log. $\left(\frac{2\text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)=$	1,3637341	log. $\left(\frac{2\text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right)=$	1,3554186
$\frac{2\text{ sen.} z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}=$	23,1064981	$\frac{2\text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}=$	22,6682829
errore=+	229489	errore=—	4153837
altro errore =—	4153837		
differenza=	4383326		

Facciasi 4383326 : 229489 :: $1'' : \frac{229489''}{4383326} = 0,0524''$ parte di secondo da aggiungersi al minor valore di $z:c$, onde ne risulti

$z:c=$	$647876,0524''$
log.=	5,8114919
sottra	5,3144251
log. $z:c=$	0,4970668
sottra log.$L:c=$	1,3100632
log. $z:L=$	9,1870036

aggiungi $\log. 2 = 0,3010300$

$\log. z : \tfrac{1}{2} L = 9,4880336$

$z : \tfrac{1}{2} L = CE : CA = 0,3076335$ (*fig.* 8)

Segue il computo per la ſpecie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c = 359°,12',45''$	$z:c = 359°,12',46''$
in min. ſec. $= 1293165''$	in min. ſec $= 1293166''$
$\log. = 6,1116539$	$\log. = 6,1116542$
ſottra $5,3144251$	ſottra $5,3144251$
$\log. z:c = 0,7972288$	$\log. z:c = 0,7972291$
ſottra $0,3622157$	ſottra $0,3622157$
$\log. z:c + \log.\log. e = 0,4350131$	$\log. z:c + \log.\log. e = 0,4350134$
$z:c \log. e = 2,7227837$	$z:c \log. e = 2,7227856$
$e^{z:c} = 528,1821168$	$e^{z:c} = 528,1825349$
$e^{-z:c} = 0,0018933$	$e^{-z:c} = 0,0018933$
$e^{z:c} - e^{-z:c} = 528,1802235$	$e^{z:c} - e^{-z:c} = 528,1825349$
$\log. \text{coſ.}\, z:c = 8,1380961$	$\log. \text{coſ.}\, z:c = 8,1379437$
ſottr. $\tfrac{1}{2} \log. \text{coſ.}\, L:c = 0,7162924$	ſottr. $\tfrac{1}{2} \log. \text{coſ.}\, L:c = 0,7162924$
$4,4218037$	$7,4216513$
ſottra $4,6989700$	ſottra $4,6989700$
$\log. \left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} \right) = 2,7228337$	$\log. \left(\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} \right) = 2,7226813$
$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 528,2429440$	$\frac{2 \text{ ſen. } z:c}{\sqrt{\text{coſ. } L:c}} = 528,0575942$
errore $= +\ 627205$	errore $= -\ 1249407$
altro errore $= -\ 1249407$	
differenza $= 1876612$	

Facciaſi $1876612 : 627205 :: 1'' : \frac{627205''}{1876612} = 0,3342''$ porzione di ſecondo, per cui dee aumentarſi il minor valore di $z:c$, onde ſia

$z:c =$

$z:c = 1293165,3342''$
log. $= 6,1116540$
sottra $5,3144251$
log. $z:c = 0,7972989$
sottra log. $L:c = 1,3100632$
log. $z:L = 9,4871657$
aggiun. log. $2 = 0,3010300$
log. $z:\frac{1}{2}L = 9,7881957$
$z:\frac{1}{2}L = C2E:CA = 0,6140386$ (*fig.* 8.)

Segue il computo per la specie VI. delle vibrazioni dei cilindri.

$z:c =$	$525°,30',11''$	$z:c =$	$525°,30',12''$
in min. sec. $=$	$1891811''$	in min. sec. $=$	$1891812''$
log. $=$	$6,2768777$	log. $=$	$6,2768779$
sottra	$5,3144251$	sottra	$5,3144251$
log. $z:c =$	$0,9624526$	log. $z:c =$	$0,9624528$
sottra	$0,3622157$	sottra	$0,3622157$
log. $z:c$ + log. log. $e =$	$0,6002369$	log. $z:c$ + log. log. $e =$	$0,6002371$
$z:c$ log. $e =$	$3,9832440$	$z:c$ log. $e =$	$3,9832459$
$e^{z:c} =$	$9621,5265487$	$e^{z:c} =$	$9621,5685841$
sottra $e^{-z:c} =$	$0,0001039$	$e^{-z:c} =$	$0,0001039$
$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$9621,5264448$	$e^{z:c} - e^{-z:c} =$	$9621,5684902$
log. sen. $z:c =$	$9,3985100$	log. sen. $z:c =$	$9,3985019$
sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	$0,7162924$	sottr. $\frac{1}{2}$ log. cos. $L:c =$	$0,7162924$
	$8,6822176$		$8,6822095$
sottra	$4,6989700$	sottra	$4,6989700$
$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) =$	$3,9832476$	$\log.\left(\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}}\right) =$	$3,9832395$
$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} =$	$9621,6061947$	$\frac{2 \text{ sen. } z:c}{\sqrt{\text{cos. } L:c}} =$	$9621,4269912$
errore $=$	$+\ 797499$	errore $=$	$-\ 1414890$
altro errore $=$	$-\ 1414890$		
differenza $=$	2212389		

Facciasi $2212389 : 797499 ::$

$1'' : \frac{797499''}{2212389} = 0,3605''$ quantità da aggiugnersi al più picciolo valore dell' angolo $z:c$, onde ci si presenti

$$z:c = 1891811,3605''$$
$$\log. = 6,2768778$$
$$\text{sottra} \quad 5,3144251$$
$$\log. z:c = 0,9624527$$
$$\text{sottra} \log. L:c = 1,3100632$$
$$\log. z:L = 9,6523895$$
$$\text{aggiungi} \log.2 = 0,3010300$$
$$\log. z:\tfrac{1}{2}L = 9,9534195$$
$$z:\tfrac{1}{2}L = C3E:CA = 0,8982961 \qquad (fig.\ 8)$$

Confermare coll' esperienza la scoperta legge dei suoni dei cilindri.

XXXI. Egli è d' uopo confermare coll' esperienza le verità insegnate dalla teorica. Do principio dal paragonare insieme i suoni principali, cioè a dire i più gravi di varj cilindri. Feci lavorare tre cilindri d' acciajo *A*, *B*, *C*, ed ordinai, che i due primi fossero egualmente grossi, e diversamente lunghi in ragione di $\sqrt{2}:1$. Il primo ed il terzo doveano avere uguali le lunghezze, ed ineguali i diametri in proporzione di 4 : 5. L' Artefice non eseguì esattissimamente la mia intenzione, e le misure dei cilindri furono le seguenti, che da me s' esprimono in linee del piede Real di Parigi.
Misura del cilindro *A*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 86.
Misure del cilindro *B*. $D =$ lin. 9, $L =$ lin. 61.
Misure del cilindro *C*. $D =$ lin. $11\frac{1}{2}$, $L =$ lin. 87.

Differendo i due cilindri *A*, *B* solamente nella lunghezza, i loro suoni debbono corrispondersi in ragione inversa duplicata delle lunghezze, cioè a dire come $(61)^2:(86)^2$, o sia come 3721 : 7396. Questo rapporto s' accosta molto al semplice 1 : 2 proprio dell' Ottava, ed il divario con-

ſiſte nella proporzione 7396:7442, o ſia nella fiſicamente uguale 161: 162, metà preſſochè giuſta del Comma 80: 81. In fatti percoſſi i cilindri A, B, trovai che i loro ſuoni in Ottava un poco calante ſi riferivano.

Giuſta il canone da me ſtabilito i ſuoni dei cilindri A, C debbono ſtare in ragione compoſta, diretta ſemplice dei diametri, ed inverſa duplicata delle lunghezze, vale a dire come $\frac{9}{(86)^2} : \frac{11\frac{1}{2}}{(87)^2}$. Queſta proporzione riduceſi alla ſeguente 68121: 85054, la quale diſcorda pochiſſimo dalla ſemplice 4: 5 conveniente alla Terza maggiore. La differenza s'eguaglia al rapporto 8505400: 8515125, cioè proſſimamente a 875: 876, undecima parte all'incirca del Comma 80: 81, minuzia così picciola, che non viene dall'orecchio anche più perito notata. Poſti al confronto i ſuoni dei cilindri A, C, ſi conformarono alla teorica, ed il cilindro più groſſo C reſe un ſuono una Terza maggiore più acuto di quello del cilindro più ſottile A.

XXXII. M'inoltro all'eſame dei ſuoni, che giuſta le varie ſpecie di oſcillazioni un cilindro produce. Feci primieramente tirare con diligenza a martello, e lima un cilindro E d'acciajo, ed indi ne feci gittare un altro F di bronzo, il quale fu poſcia ripulito ſul tornio, e ridotto alla maggior eſattezza, che fu poſſibile. Miſure del cilindro E d'acciajo. $D =$ lin. 6, $L =$ lin. 259. Miſure del cilindro F di bronzo. $D =$ lin. 6, $L =$ lin. 257. $\frac{1}{2}$. Gli volli aſſai ſottili riſpettivamente alle loro lunghezze, e tollerai, che il ſuono loro più grave riuſciſſe muto, perchè ſi rendeſſero ſenſibili i ſuoni acuti, il che non interviene, quando la groſſezza alla lunghezza ha quella proporzione, che ſi ricerca, acciocchè il ſuono principale, e più grave acquiſti corpo, e ſi faccia udire grato al ſenſorio.

Segnai accuratamente i nodi, o punti ſtabili in riguardo alle diverſe ſpecie di vibrazioni, e ſottopoſti a

sì fatti punti i sostegni, si sentirono chiari e distinti i sei primi suoni in ambo i cilindri. Avendo dentro questi limiti ristretto i miei calcoli, non mi sono più oltre dilatato nè pur colle osservazioni. Avverto, che gli scannelli debbono essere rivestiti d'una materia cedente, per esempio di panno. Io mi servj di due funicelle, le quali erano forse un po' troppo dure, e credo che sarebbero meglio riusciti due grossi spaghi. Anche rispettivamente alle corde, mentre si vogliono far suonare divise in parti aliquote, bisogna adoperare degli ostacoli leggeri, e appoggiarli ad uno di que' punti, che separano una parte aliquota dall' altra. Veggasi ciò, che ho scritto in tale proposito ai numeri XX. e XXI. dello Schediasma IV, che tratta *delle vibrazioni delle corde sonore* nella mia Opera *Delle Corde*, *ovvero Fibre elastiche*.

Accordai all' unisono col suono principale del cilindro *E* d'acciajo una corda divisa in parti 60, ed un'altra corda egualmente lunga, e similmente partita la ridussi all' Ottava alta del suono principale del cilindro *F* di bronzo. Rendeva questo un suono talmente grave, che mettendo con esso all' unisono la predetta corda, avrebbe della sonorità fatto perdita. Per separare dal rimanente quelle porzioni di corda, che sono unisone ai suoni secondo, terzo, quarto ecc. dell' uno, e dell' altro cilindro, ho posto in opera uno scannello, la cui base s'eguaglia ad una porzione sessantesima della corda, ed è distribuita in parti dieci. Con questo artificio s'ottiene la divisione della corda in parti 600.

Nel numero XXVI. ho posto in serie le porzioni della corda 60, che secondo la teorica debbono star all' unisono coi suoni acuti d'un cilindro nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda intera. Questa progressione serve pel cilindro *E* d'acciajo, ed in riguardo al cilindro *F* di bronzo, il cui suono principale è unisono alla corda 120, si hanno da prendere porzioni il doppio lunghe delle mentovate.

Le seguenti due Tavole sono formate da tre colonne. I numeri della prima esprimono le specie delle vibrazioni. La seconda contiene le porzioni della corda 60, che giusto la teorica deggiono corrispondere all' unisono coi suoni acuti dei cilindri. Nella terza si comprendono le parti della stessa corda, che messa in opera la maggior attenzione, si sono trovate unisone ai suoni nominati, prestandomi diligente assistenza il Sig. *Domenico Bianchi* valente organista, ed accuratissimo accordatore di gravicembali.

Porzioni della corda 60 unisone ai suoni acuti del cilindro E d' acciajo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 60.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giusto l' esperienza.
I.	60	60
II.	21, 75	21, 75
III.	11, 1	11, 15
IV.	6, 717	6, 9
V.	4, 496	4, 7
VI.	3, 219	2, 9

Porzioni della corda 60. unisone ai suoni acuti del cilindro F di bronzo nella supposizione, che il suono più grave sia unisono alla corda 120.

Specie delle vibrazioni.	Lunghezze delle porzioni giusto la teorica.	Lunghezze delle porzioni giusto l' esperienza.
I.	120	120
II.	43, 5	43, 5

III.	22, 2	22, 3
IV.	13, 434	13, 6
V.	8, 992	9, 1
VI.	6, 438	6, 7

Per vero dire il cilindro *F* di bronzo era di figura più efatta di quello d'acciajo, ed oltre a ciò di materia più uniforme, ed omogenea, ficcome formato per via di fufione. E quindi le fue voci acute con più aggiuftatezza di quelle del cilindro *E* d'acciajo s'accomodavano ai tuoni dalla teorica determinati. La maggior differenza in ambo i cilindri s'udiva nel fefto fuono, il quale nel cilindro d'acciajo crefceva fopra il corrifpondente ftabilito dal computo per la ragione 2900 : 3219, o fia proffimamente per qualche cofa meno di 9 : 10, ch'è quanto a dire per un Tuono un poco calante. Al contrario nel cilindro di bronzo il predetto fuono calava dall'analogo fiffato dal calcolo pel rapporto 6700 : 6438, cioè per una proporzione media fra le due 25 : 24, 26 : 25 efprimente un Semituono minore fcarfo. I notati oppofti divarj danno a conofcere, che fe ci foffe un cilindro di perfettiffima figura, e compofto di materia fquifitamente omogenea, renderebbe i fuoni efattamente unifoni a quelli, che mi è riufcito di fcoprire nella prefente Differtazione.

Determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, dei quali erano compofti i cilindri ufati nel riferito efperimento.

XXXIII. Non tralafcio di determinare la proporzione fra le rigidità dell'acciajo, e del bronzo, ond'erano formati i noftri cilindri. Ho notato nel corollario terzo contenuto nel numero XXV. che mentre due cilindri ofcillano fimilmente, le loro rigidità *r* ftanno come $S^2L^4g:D^2$. Effendo il diametro *D* coftante in amen-

due i cilindri E, F, le maſſe M ſtanno come Lg, e le rigidità r come S^2L^3M. Il cilindro di bronzo era uniſono a parti $91\frac{1}{2}$ della corda 60 uniſona al cilindro d' acciajo; e quindi i ſuoni S dei due cilindri d' acciajo, e di bronzo ſi riguardavano nella ragione $91\frac{1}{2}:60$, o ſia $61:40$. Ho già detto nel precedente numero XXXI. che le lunghezze L ſerbavano il rapporto $259:257\frac{1}{2}$, cioè in numeri interi $518:515$. Peſò il cilindro E once 25, il cilindro F once 27, e per conſeguenza le maſſe M ſi riferivano nella ragione $25:27$. Soſtituiti in cambio delle ſpecie analatiche i convenienti valori, troveremo le rigidità dell' acciajo e del bronzo componenti i noſtri cilindri come $(61)^2.(518)^3.25:(40)^2.(515)^3.27$, o ſia ridotti i computi, come $64648575859:29698029000$, proporzione che ſta di mezzo fra le due $24:11$, $13:6$, avvicinandoſi per altro più alla prima, che alla ſeconda.

Determinare la proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; acciocchè rendano ſuoni del pari forti, e aggradevoli.

XXXIV. Chiudo la mia fatica collo ſtabilire la ragione fra le lunghezze ed i diametri dei cilindri gravi, ed acuti; affinchè rendano ſuoni ugualmente forti, e aggradevoli. I cilindri di metallo, o di creta, i quali compongono uno ſtrumento, ſi percuotono con eguali forze vive, e per conſeguenza oſcillando di pari forze vive fanno l' acquiſto. Collo ſteſſo metodo uſato in riguardo alle corde nello Schediaſma VI. della mia Opera ſopraccitata potrei dimoſtrare, che tali cilindri rendono ſuoni ugualmente forti. Queſti ſuoni in oltre debbono riuſcire del pari aggradevoli, il che dipende dalla proporzione fra le lunghezze, ed i diametri dei varj cilindri, la quale mi accingo ad indagare preſentemente. Qualche ſtrumento da me veduto non s' eſten-

d' salvo che per due Ottave, ed era formato di cilindri, che differivano solo nella lunghezza. Per verità i cilindri estremi cadevano in difetti opposti; imperciocchè i più gravi erano troppo pieghevoli, e producevano suoni per dir così senza corpo: ed al contrario i più acuti erano troppo grossi, e poco flessibili, dimodochè i loro suoni si sperimentavano ottusi.

Le masse M, m di due cilindri della stessa materia stanno come $LD^2 : ld^2$, e giacchè sono pari le forze vive MV^2, mv^2, si verifica l'analogia $V : v :: \frac{1}{L^{\frac{1}{2}}D} : \frac{1}{l^{\frac{1}{2}}d}$. S'assegni alle velocità la legge perfettamente media fra i limiti stabiliti ne' numeri X. e XI. del citato Schediasma VI. onde s'abbia $V : v :: \frac{1}{T^{\frac{3}{4}}} : \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}$, e scopriremo essere $L^{\frac{1}{2}}D : l^{\frac{1}{2}}d :: T^{\frac{3}{4}} : t^{\frac{3}{4}}$, e conseguentemente $L^{\frac{2}{3}} D^{\frac{3}{4}} : l^{\frac{2}{3}} d^{\frac{3}{4}} :: T : t$. C'insegna il corollario 4. contenuto nel numero XXV. che se due cilindri formati della stessa materia si vibrano similmente, stanno i loro suoni come $\frac{D}{L^2} : \frac{d}{l^2}$; ma i tempi delle vibrazioni accettano la ragione inversa dei suoni; dunque $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ e perciò $L^{2:3}D^{4:3} : l^{2:3}d^{4:3} :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ analogia, da cui derivano le due seguenti
$L : l :: D^{7:4} : d^{7:4}$, $D : d :: L^{4:7} : l^{4:7}$. Nel canone de' tempi delle vibrazioni $T : t :: \frac{L^2}{D} : \frac{l^2}{d}$ si sostituiscano prima in cambio di L, l, indi in cambio di D, d i valori

lori proporzionali, e ſcopriremo, effettuati i neceſſarj calcoli,

$D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$, $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$. Regolate a norma di queſte leggi le dimenſioni dei cilindri, riuſciranno i loro ſuoni egualmente grati all'orecchio.

Stimo bene l' illuſtrare la teorica con un eſempio. Due cilindri ſi corriſpondano in quintupla Ottava, onde ſia $T : t :: 32 : 1 :: 2^5 : 1$. Fatto uſo di tali valori in luogo dei tempi T, t, ci ſi preſenterà $D : d :: 4 : 1$, $L : l :: \sqrt{128} : 1$, o proſſimamente $11,3137 : 1$.

Aſſai proſſima alla preſcelta ſarebbe la legge $V : v :: \frac{1}{T^{1:3}} : \frac{1}{t^{2:3}}$, da cui ſi dedurrebbe $D^2 : d^2 :: L : l$, $D : d :. T^{1:3} : t^{1:3}$, $L : l :: T^{2:3} : t^{2:3}$. La ſua maggiore ſemplicità renderebbe le miſure dei cilindri più facili da conteggiare.

XXXV. Concioſſiachè gli ſtrumenti compoſti di cilindri ſieno di poco uſo, e ſe ne lavorino in picciola quantità, non han potuto gl'induſtrioſi Pratici colle replicate ſperienze condurli a quella perfezione, di cui ſono capaci. Giudico adunque opportuna coſa il diſtendere una tavola, che per lo ſpazio di due Ottave contenga le lunghezze, ed i diametri dei cilindri ſecondo la più perfetta legge $L : l :: T^{7:10} : t^{7:10}$, $D : d :: T^{2:5} : t^{2:5}$. La nominata tavola è formata da ſei colonne. La prima comprende le lettere naturali, e le modificate dal Dieſis, e dal *B* molle diſpoſte giuſto la ſcala degli uſuali ſtrumenti da taſto, preſa per baſe la lettera *C*. Nella ſeconda colonna ſtanno diſpoſti i logaritmi dei ſuoni convenienti a ciaſcuna lettera, e temperati ſecondo il metodo da me ſpiegato nel *Saggio ſopra le leggi del Contrappunto* pag. 116. Contiene la terza colonna i logaritmi delle lunghezze dei cilindri componenti la detta ſcala, i quali battuti con forze vive uguali, hanno da produr ſuoni, che rieſcano egualmente grati all'udito.

Si veggono collocate ordinatamente nella quarta colonna le lunghezze d'essi cilindri. Seguono finalmente le colonne quinta, e sesta, e sono registrati in quella i logaritmi dei diametri dei nostri cilindri, in questa le misure dei diametri stessi. Le colonne principali rispettivamente alle presenti ricerche sono la quarta, e la sesta, in grazia della determinazion delle quali ho posto le colonne seconda, terza, e quinta.

Ecco il metodo da me tenuto per determinare le colonne quarta, e sesta. Sia l la lunghezza d' un cilindro, d il diametro, t il tempo d'una vibrazione, n il numero delle vibrazioni fatte in tempo dato, o sia il suono d'esso cilindro. Ho provato nel precedente numero XXXIV. dover esser l come $t^{7:10}$: ma t come $= 1:n$; dunque l come $\frac{1}{n^{7:10}}$, e passando dall'analogia all'equazione, $l = \frac{L}{n^{7:10}}$. L è una costante da determinarsi in progresso. Dai numeri faccio transito ai logaritmi, e mi si presenta la formola log. $l =$ log. $L - \frac{7}{10}$ log. n. Serve questa per istabilire il valore della costante L. Il logaritmo del suono n prodotto dal cilindro C base dello strumento s'eguaglia a nulla; dunque in tal caso log. l. $=$ log. L, e per conseguenza $l = L$, cioè a dire la costante L uguale alla lunghezza l del cilindro C base dello strumento, la quale si suppone nella mia tavola divisa in parti 10000. Si troverà pertanto il logaritmo della lunghezza l d'un cilindro detraendo dal log. L, o sia dal logaritmo del numero 10000 le sette decime parti del logaritmo del suono, che il detto cilindro deve produrre. Determinato così log. l, le tavole dei logaritmi mi additano il valore della lunghezza cercata l.

In riguardo ai diametri dei cilindri ho dimostrato essere d come $t^{2:5}$, come $\frac{1}{n^{2:5}}$. Quindi ne nascono le for-

mole $d = \frac{D}{n^{2:5}}$, log. $d = \log. D - \frac{2}{5}$ log. n. D è il diametro del cilindro C baſe dello ſtrumento, che ſuppongo diviſo in parti 1000. Sottratte dal log. 1000 le due quinte parti del logaritmo del ſuono n, che dee rendere il cilindro, ne riſulterà il logaritmo del diametro d, la di cui miſura relativa a quella del diametro D competente al cilindro C verrà reſa nota dalle tavole logaritmiche.

Sarà facile l'ampliare la ſeguente tavola alle tre, alle quattro, alle cinque Ottave, valendoſi della regola del tre. Quella ſteſſa proporzione, che ha C, la cui lunghezza 10000, a C^d, la cui lunghezzà 9640, la ſerbà parimente C, la cui lunghezza 3789, a C^d, che poſta in uſo la nominata regola, ſi troverà lungo 3653. Con pari metodo ſi ſcoprirà il diametro del detto C^d 562, e ſi paſſerà poſcia a ſtabilire le dimenſioni di D, di E^b, di E ecc.

Sebbene poteva baſtare il dilatar la tavola ad una ſola Ottava. Determinato il ſecondo C, che in relazione al primo è lungo 6156, groſſo 758, ſi prendano per date le mentovate miſure, e dividendo la lunghezza in parti 10000, il diametro in parti 1000, chiaramente ſi ſcoprirà, che la diſtribuzione della prima Ottava ſerve altresì per la ſeconda, e per tutte l'altre, che ſeguono.

Per valerſi utilmente della noſtra tavola, fra varj cilindri pari di diametro, e diverſi di lunghezza biſogna ſcegliere quello, che rende un ſuono vigoroſo e chiaro, eſcluſi gli altri, che o per eſſere troppo lunghi riſpettivamente alla groſſezza producono un ſuono ſnervato, e ſenza corpo, o per eſſere troppo corti tramandano un ſuono muto, ed ottuſo. Se il cilindro preſcelto ſi trova uniſono col C baſe d'uno ſtrumento coriſta, s'intenda diviſa la ſua lunghezza in parti 10000, il ſuono diametro in parti 1000, ed in relazione a tali diviſioni ſi

ſtabiliſcano le miſure dei cilindri più acuti a norma della mia tavola. Che ſe lo ſteſſo cilindro foſſe uniſono ad un altro ſuono per eſempio *A* della prima Ottava; dovendo eſſere giuſto la tavola la lunghezza d'un tal cilindro 6965, ed il diametro 813; ſi concepiſcano diſtribuiti la lunghezza, ed il diametro nei detti numeri di parti 6965, 813, ed in riguardo a sì fatti compartimenti ſi determinino coll'ajuto della mia tavola le dimenſioni dei cilindri più gravi, e più acuti del dato cilindro *A*.

Se la lunghezza, ed il diametro del cilindro preſcelto foſſero dati eſempigrazia in linee, ſi potranno trovare le miſure degli altri cilindri eſpreſſe parimente in linee col mezzo della regola del tre. Sieno cogniti in linee la lunghezza, ed il diametro del cilindro *A* appartenente alla prima Ottava, e ſi voglia ſapere di quante linee debbono eſſer compoſti la lunghezza, ed il diametro del cilindro *C* baſe dello ſtrumento. Si faccia come la lunghezza del cilindro *A* a quella del cilindro *C* notate nella mia tavola, cioè come 6965 a 10000, così il numero di linee, che formano la lunghezza del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale, il quale s'eguaglierà al numero delle linee, che hanno da formare la lunghezza del cilindro *C*. Non altrimenti ſe faremo come 813 a 1000 diametri, che la mia tavola aſſegna ai cilindri *A*, *C*, così il numero delle linee, onde conſta il diametro del cilindro *A*, al quarto termine proporzionale; pareggerà queſto il numero delle linee componenti il diametro cercato del cilindro *C*.

In uno ſtrumento lavorato ſecondo il mio metodo gli ſcannelli ſu i quali s' appoggiano i cilindri, e che debbono ſtare ſotto i loro circoli d'ammortimento, hanno ad eſſere di figura curva, la quale facilmente ſi deſcrive, eſſendo nota dei mentovati circoli la poſizione.

O Q L
R X
P y Z
M
O
F R H
G P I
M
o q l
r x
p y z
m
o
f r h
g p i
m
E
I
L
O Q
S
R T
F
M
V
K
A X C B
D
P
G

Fig. 1.

Fig. 2.

S
O
Q
L
N
R
X
K
P
y
Z
V
M
O
F
R
H
G
P
I
M
s
o
q
l
n
r
x
K
p
y
z
u
m
o
f
r
h
g
p
i
m
E
I
L
O
Q
K
S
R
T
H
F
M
V
Z
N
A
X
C
B
D
P
G

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

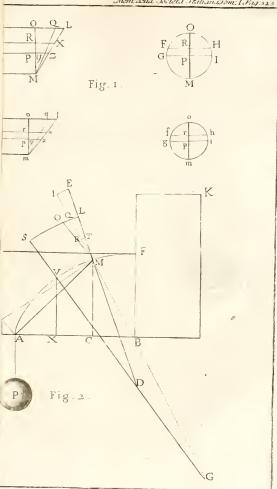
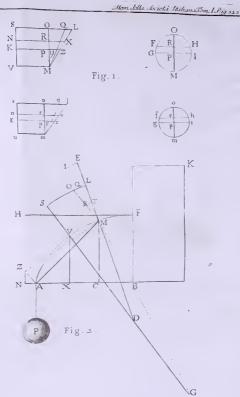
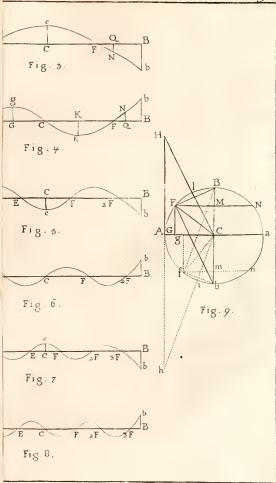
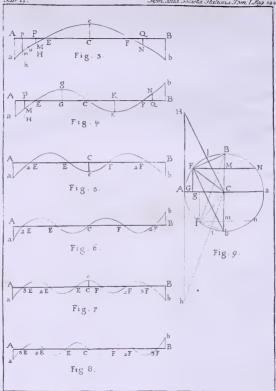
Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.

Lunghezze, e diametri dei cilindri per l' estensione di due Ottave temperate giusta il mio metodo.

	Logaritmi dei suoni.	Log. delle lunghezze dei cilindri	Lunghezze dei cilindri.	Log. dei diametri dei cilin.	Diametri dei cilindri.
C	0,0000000	4,0000000	10000	3,0000000	1000
C^d	0,0227556	3,9840711	9640 —	2,9908978	979 +
D	0,0492448	3,9655261	9237 —	2,9803006	956 —
E^b	0,0757412	3,9469812	8851 —	2,9697035	933 —
E	0,0984968	3,9310522	8532 +	2,9606013	913 +
F	0,1258908	3,9118764	8163 $\frac{1}{2}$	2,9496437	891 —
F^d	0,1481958	3,8962629	7875 +	2,9407217	872 +
G	0,1751392	3,8774026	7540 $\frac{1}{2}$	2,9299443	851 +
G^d	0,1983454	3,8611582	7264 —	2,9206618	833 +
A	0,2243876	3,8429287	6965 +	2,9102450	813 +
B^b	0,2513310	3,8240683	6669 +	2,8994676	793 +
B	0,2736360	3,8084548	6434 —	2,8905456	777 +
C	0,3010300	3,7892790	6156 —	2,8795880	758 —
C^d	0,3237856	3,7733501	5934 +	2,8705650	742 +
D	0,3502784	3,7548051	5686 —	2,8598886	724 +
E^b	0,3767712	3,7362602	5448 +	2,8492915	707 —
E	0,3995268	3,7203312	5252 +	2,8401893	692 +
F	0,4269208	3,7011554	5025 +	2,8292317	675 —
F^d	0,4492258	3,6855419	4848 —	2,8203097	661 +
G	0,4761692	3,6666816	4642 —	2,8095323	645 —
G^d	0,4993754	3,6504372	4471 +	2,8002498	631 +
A	0,5254176	3,6322077	4288 —	2,7898330	616 +
B^b	0,5523610	3,6133473	4105 +	2,7790556	601 +
B	0,5746660	3,5977338	3961 —	2,7701336	589 +
C	0,6020600	3,5785580	3789 +	2,7591760	574 +

OSSERVAZIONI

ED ESPERIMENTI

Sopra la Scompofizione del Sale ammoniaco per mezzo della Calce terrea.

Del Sig. CONTE DI SALUZZO.

1. SOno a tutti note le fingolari alterazioni, che arreca la calce al fale ammoniaco, cioè la coftante forma fluida, in cui s' ottiene l' alcali volatile; la riguardevole fua caufticità; la fua ineffervefcibilità cogli acidi; ed un abbondantiffimo fviluppamento di vapori, che accompagnano quefta fcompofizione, dotati di tanta elafticità, che fe non fi ufino le maggiori cautele, ne fegue lo fcoppio de' vafi, ne' quali fi fa l' operazione.

2. Varie fin qui fono ftate le opinioni intorno alla caufa de' riferiti fenomeni; ma quella dell' infigne Sig. *Duhamel* era fra tutte la più diftinta, perchè appoggiata ad una diligente ferie di ben intefi efperimenti. Avea quefto valorofo Accademico riuniti a fuo favore i fuffragi de' più illuminati coltivatori della naturale Filofofia, ed erano attribuiti quefti effetti alla fofferta modificazione della parte infiammabile di quefta foftanza falina dall' azione cauftica della calce, e dalla diffoluzione dell' alcali volatile nell' acqua contenuta in quefta combinazione.

3. Prevale però al dì d' oggi una nuova dottrina, ch' è dipendente da quella che fa il fondamento della

teoria della caufticità ingegnofamente prodotta dal celebre Sig. *Black*.

4. Mio affunto è pertanto l' efaminare di nuovo la vera caufa delle fopraccennate alterazioni, e dovrà l'efperienza decidere una così importante ed intricata quiftione.

5. Il valente Chimico Sig. *Bucquet* entrato anch' effo in fofpetto contro l' azione efclufivamente in quefto fiftema afcritta alla privazione totale d' aria fiffa nella calce viva per produrre i narrati effetti ful fale ammoniaco, ha fatto varj ingegnofi efperimenti. Mi fono fingolarmente con effo incontrato in quello, con cui direttamente ha efplorata l' influenza da affegnarfi alla prefenza dell'aria fiffa fuddetta, al dì d'oggi conofciuta e comprefa fagaciffimamente nella claffe dei gaz (*a*) dal celebre Autore del Dizionario di Chimica Sig. *Macquer*; ma non pertanto può fondatamente dirfi appieno efaufto l' argomento, mentre fenza verun efperimento diretto paffa a conchiudere a favore d' una caufa mifta, cioè dell' azione combinata del principio acquofo coll' aria fiffa o gaz cretaceo (*gàs crayeux*) o mofetico.

6. Era quefta parte d'un mio lavoro molto più efteffo fu quefto foggetto rimodernato già compiuta da molto tempo, allorchè mi venne alle mani il IX. Vol. *delle Mem. prefentate all' Accademia di Parigi*, nel quale trovafi la belliffima differtazione del Sig. *Bucquet*; ma quantunque vi abbia incontrato una piacevole conformità d' idee fu varj punti, ho avuta la foddisfazione di vedere, ch' era io avanzato affai più oltre proccurando di fviluppare l' ofcura caufa delle effervefcenze, e di altri punti molto intereffanti.

7. Sono le effervefcenze generalmente attribuite allo

(*a*) Quefto valorofiffimo chimico ha ordinato fotto il vocabolo generale di gaz tutti i fluidi aeriformi finqui conofciuti per meglio diftinguerli, e contraffegnarne i caratteri fpecifici.

sprigionamento d' un fluido elastico ; ma si riconoscerà evidentemente che l' espulsione dei gaz non è che un effetto, il quale rende manifesta la causa di quanto succede in quelle circostanze ; cioè allor quando da una forza esterna alla sostanza passiva si giunge a superare la forza di contatto, che trovasi tra le parti della medesima sostanza, e se ne proccura la divisione, e l' uniforme distribuzione colle parti del fluido , che esercita la sua attività: se dunque trovansi de' principj volatili nelle sostanze di cui si proccura la combinazione, dovranno essi necessariamente venire espulsi in ragione dell' attività, colla quale opera il menstruo, e della reazione delle forze particolari, di cui sono dotate le parti della sostanza; e questa espulsione non sarà che un effetto necessario, e concomitante delle alterazioni prodotte reciprocamente nelle parti delle materie combinate.

8. Non mi estenderò anticipatamente in teoriche riflessioni ; e per ischivare una fastidiosa ripetizione degli apparecchj onde soglio far uso da più di venticinque anni in tutte le operazioni, nelle quali si sviluppano vapori di grande elasticità, ne descriverò (*Tav. I. fig. I*) qui uno de' principali; quello di cui mi sono sempre servito per la scomposizione del sale ammoniaco colla calce, il quale non molto differisce dall' apparecchio che soglio impiegare per l' acido nitroso fumante (*fig. II*) e per lo spirito di sale, e che avuti i debiti riguardi serve ottimamente in tutte le sperienze della produzione de' fluidi aeriformi, ossia gaz . Debbo però confessare, che non m' è mai venuto in mente che la combinazione, che si trova negli apparecchj di questa specie, potesse far epoca nella storia de' progressi delle umane cognizioni , e che dovesse un dì fissare l' attenzione de' Filosofi , parendomi che da qualunque Fisico avvezzo ad osservare e sperimentare , se ne potesse facilmente immaginare, e promovere l' uso; dalla descrizione

zione de' miei si potrà raccogliere, considerandoli con imparzialità, se debbo anch'io attribuirne l'idea al Sig. *Woulfe*, come fa il Sig. *Priestley*, e qualche altro.

9. Le storte *AA*, che io soglio adoperare per queste sperienze, hanno l'estremità del loro collo *BB* fatto a forma di cono, perchè possano facilmente insinuarsi, ed essere lutate nei tubi di comunicazione *CC*, che per la stessa ragione dalla parte per cui vengono insinuati nei tubetti *H* dei palloni *X* hanno una figura conica.

10. Questi miei palloni *XX* hanno ciascuno diversi di questi tubetti *HH* in differenti ed opposte direzioni; poichè in alcuno di essi v'è adattato con luto un tubo di comunicazione *RR*; in alcun altro evvi solidamente fissato con tenace mastice un cannello a chiave di ottone *Y*, il di cui foro interno è coperto da un tubo di vetro, che difende il sottoposto ottone dall'azione dissolvente dei vapori acidi od alcalini che per esso si traducono. La chiave *K* di un tal cannello è di avorio o di corno, e meglio anche di un metallico serve un cannello tutto di cristallo.

11. Dall'estremità di questo cannello *Y* parte un tubo di cristallo *MM*, il di cui braccio più lungo discende e penetra pel coperchio nel vase cilindrico *SS* fino quasi a toccare il fondo del medesimo, affinchè i fluidi aeriformi che passano per il tubo *MM* abbiano ad attraversare un altro strato di liquore contenuto nel vase *SS*, il quale a questo oggetto deve essere molto alto.

12. Oltre a ciò, questo vase ha un coperchio traforato da più fori, in ciascuno de' quali è insinuato a tenuta d'aria un tubo ricurvo di vetro *OO*, che penetra nel rispettivo vase cilindrico *TT*. Ognuno dei vasi cilindrici, le di cui capacità sono relative alla qualità dei liquori, di cui sono ripieni, ha un coperchio a tenuta d'aria, il quale oltre al foro, per cui s'introduce il tubo *OO*, ha un cannello a chiave, al di cui collo è legata una vescica *P*.

13. Il liquore, di cui faccio uſo per queſto apparato, e di cui riempio i vaſi *TT*, *SS*, è principalmente l' acqua diſtillata, onde riempio il recipiente più grande *SS*, ch' io chiamo il recipiente principale, poichè queſto fluido è il più innocente feltro pe' vapori aeriformi. Negli altri vaſi *TT* ecc. ſoglio verſare dell' acido nitroſo concentrato, dell' olio di vitriolo, dell' acido marino, dell' acido acetoſo concentrato, dell' olio di tartaro, del liquor cauſtico ecc.

Ne' liquori acidi ho avuto ſempre l' avvertenza di porre una foglia d' oro, perchè m' è nato lo ſcrupolo, che nell' atto della ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce ſi eſali dell' acido marino ſotto forma vaporoſa per la poca aderenza, ch' egli ha colle terre calcaree, e per la grandiſſima ſua affinità coll' acqua ſpecialmente, perchè la ſcompoſizione ſuddetta è ſempre accompagnata da notabile calore, e dall' elaſtica eſpulſione dell' alcali volatile.

Al tubetto ſuperiore *H* del pallone *X* è fiſſato il tubo di comunicazione *RR*, che ſi uniſce al cannello *G* fiſſato nella ſommità della campana *LL*, la quale ripiena d' acqua è immerſa in un vaſe *II* parimenti ripieno d' acqua (*b*).

(*b*) Siccome in tutte le operazioni, che diremo Chimico-fiſiche, ſempre ſi fa un vuoto più o meno notabile nelle capacità principali, cioè in quelle nelle quali debbono ſeguire le ſcompoſizioni o combinazioni, qualunque ſia il modo o per via umida o ſecca, o finalmente per una via miſta, e ſia o nò impiegato il ſuſſidio del fuoco; così due condizioni hanno da riempiere gli apparecchj, quella cioè di ammettere l' aria, e gli altri fluidi eſpulſi; e quella di reſtituire alle capacità vuote l' aria ſtatane ſcacciata. Ma dovendo determinare ſe il fluido raccolto ecceda l' aria eſpulſa, e giudicare con ſicurezza, ſe ſiaſi fatta produzione di fluido aeriforme coſtante, ſarà il mezzo più ſicuro, e più pronto quello di far paſſare dai recipienti colle dovute cautele il riſpettivo gaz entro ad una campana piena d' acqua, la quale abbaſſandoſi ſino al livello ſia ſufficiente a contenerlo tutto; e quindi da queſta ſia ſtabilita una comunicazione col pallone al tubo di comunicazione *RR* ſuperiore o altrimenti; ſicchè finita l' elaſtica eſpulſione, ed aperta queſta comunicazione ſi riaſſorba dalle capacità vuote il fluido contenuto nel-

L'apparato rapprefentato nella fig. II. non è molto diverfo da quello della fig. I., ed è pure fimile a quello della fig. I. Tav. II., poichè non fono che leggere differenze le modificazioni, che vi fi fcorgono, talchè ftimo inutile il farne minuta defcrizione, baftando una femplice offervazione delle tavole, onde comprendere la moltiplicità ed eftenfione degli ufi.

14. Tutte le cofe defcritte potranno comparire a prima vifta minute e foverchie; ma non farà quefto giudizio chi è folito a far frequenti operazioni di tal natura. Premeffe pertanto fiffatte materiali notizie pafferò a dare contezza del feguito efame, rimettendo fotto gli occhi de' rifpettabili Accademici, che la privazione d'aria fiffa fuppofta nella calce viene affegnata per unica cagione della fua caufticità (poichè fi prende dimoftrata quefta privazione dal non ottenerfi effervefcenza almeno notabile, nel combinarfi la calce viva cogli acidi, qualvolta fia ella buona e ben cotta); nè altrimenti fi fpiega la caufticità della pietra cauftica, dell'alcali fiffo cauftico in forma fluida, dello fpirito volatile cauftico ecc.

15. Si potrebbe fpeditamente troncare la difficoltà per provare l'infuffiftenza del raziocinio riguardo allo fpirito volatile cauftico, dicendo, che la calce che deve impiegarfi per ottenerlo non è viva, e perciò in circoftanze del tubo diverfe dalle fuppofte: tanto più che effervefcente quanto mai è la calce eftinta; ma non farò per prevalermene, e comincerò dall' efame di ciò, che avviene colle accennate foftanze nello ftato di maffima caufticità.

---

la Campana; e dal riempierfi o nò di nuovo d'acqua la Campana fuddetta fi abbia ficuro rifcontro dell' avvenuto: non effendovi altra differenza fra quefti apparecchi, falvo che quefto è veramente più dimoftrativo: riefce però un po' più faftidiofo, ma ferve più acconciamente per quelle operazioni nelle quali il gaz è filtrato da' recipienti comunicati infieme, come nelle operazioni degli acidi nitrofo e marino. *Tav. II. Fig. I.*

16. Prendaſi adunque della miglior calce uſcita appena dal fuoco; ſi laſci raffreddare, ed in un mortajo alcun poco riſcaldato la ſi faccia in pezzi, de' quali fatta ſcelta de' più groſſi s' immergano queſti nell' acqua forte; poco o nulla ſi vedrà uſcire di bollicine dalla medeſima; e mentre ſi fa queſta oſſervazione ſi peſtino preſtamente alcuni altri pezzi, e ſe ne getti la polvere a poco a poco nell' acido ſuddetto. Si vedrà tanto maggiore l' effervefcenza quanto più minutamente ſtritolata e polverizzata è la calce (*c*).

17. Ciò che ſuccede con la calce viva più manifeſtamente avviene con la pietra cauſtica, e col vetro ſiliceo; mentre l' acqua forte ſteſſa, la qual non dà il menomo ſegno d' azione ſopra queſte materie, quando ſono in groſſi pezzi, per poco che ſia concentrata, coll' aggiunta a poco a poco d' alcune gocce d' acqua, manifeſta una ſenſibile effervefcenza, la quale diventa notabiliſſima toſto che le materie ſopraddette ſieno ridotte in fina polvere.

18. Non oſtante l' opinione generale dell' ineffervefcenza di queſte materie cogli acidi, mi pare che ſarebbe ſtato almeno prudente di diffidarne, ponendo mente che (*d*) in altre circoſtanze ſi è dimoſtrato con eſperimenti ingegnoſiſſimi, che i gaz riſultano dalla ſcompoſizione degli acidi; così la privazione di gaz in quelle ſoſtanze dovrebbe a mio giudizio eſſere cagione d' una effervefcenza più viva, perchè la tendenza e avidità, per così dire, delle ſoſtanze a ripigliare i principj, onde ſono ſtate ſpogliate, deve eſſere in ragione dell' affinità,

(*c*) Soglio preferire l' acqúa forte all' acido più concentrato, e ſpecialmente all' acido vitriolico, perchè ſono più ſenſibili queſti effetti.

(*d*) Ecco come ſi eſprime il valoroſo Sig. *Lavoiſier* in una ſua Memoria ſopra l' eſiſtenza dell' aria nell' acido nitroſo (Mem. dell'Accad. per l' anno 1776. p. 672.) *Non è dal metallo, che provengono queſte differenti ſpecie d' aria, come avrò molte occaſioni di farlo vedere; eſſe ſono dovute alla ſcompoſizione dell' acido ſteſſo ecc.*

che questi medesimi principj avevano colle altre parti del misto, e della maggior espulsione, che se n'è fatta.

19. Da queste sperienze semplicissime mi pare dimostrato che le effervescenze non dipendono dalla preesistenza dei gaz o dell'aria nelle materie, che affettano questo movimento cogli acidi; ma un nuovo fatto sarà riprova della verità di questo principio. Si prenda del vetro siliceo, il quale non contiene alcun gaz; si pesti sottilmente in un mortajo riscaldato, e vi si versi sopra dell'alcali volatile caustico non effervescente: si farà nel momento del contatto un'effervescenza uguale a quella, che può fare il miglior acido coll'alcali fisso. Nelle stesse circostanze ha luogo lo stesso fenomeno fra quest'alcali volatile, e la pietra caustica; e medesimamente la calce viva; tutta la differenza consiste nel grado di attività, quella col vetro siliceo essendo la più violenta, e quella con la pietra caustica superando quella della maggior calce.

20. Quantunque io ammetta l'esistenza d'un acido nello spirito volatile caustico, come avrò occasione di dimostrarlo in progresso, sarà però sempre vero, che lo spirito volatile ben fatto è reputato ineffervescente cogli acidi; e che da tutti si crede che la sua ineffervescibilità sia dovuta alla mancanza di gaz; che il vetro siliceo in grossi pezzi non è effervescente, e che dal celebre Sig. *Bergmann* si dice spoglio di gaz; che la pietra caustica finalmente e la calce viva sono riconosciute per sostanze ineffervescenti cogli acidi. Forz'è dunque conchiudere, che non è allo sviluppamento dell'aria nè di un gaz pneumatico, che si debbono attribuire le effervescenze. Ma ecco ancora nuovi fatti che avvalorano questa verità.

21. Se si combini della calce viva (la quale in grossi pezzi non è effervescente) con uguale quantità di spirito volatile parimenti ineffervescente entro una storta di vetro, e se ne faccia la distillazione, impiegando un

tubo di barometro col mercurio per accertarſi, che non ſi fa alcun aſſorbimento dell'aria contenuta nelle capacità, o qualche altro mezzo per aſſicurarſene; come pure perchè non reſti ſoſpetto ſul perfetto ſuggellamento dell'apparecchio; dopo che ſaranno paſſati i vapori elaſtici nel recipiente, l'aria ſarà riaſſorta, e quando la calce comparirà quaſi sfogliata e bianchiſſima, e non paſſerà più coſa alcuna, laſciato cadere il fuoco, e raffreddata a vaſi chiuſi, ſe la ſi cimenti cogli acidi, manifeſterà ella l'eminente proprietà, ch' avrà acquiſtato di far effervescenza eziandio collo ſpirito d'aceto; ſe invece d'impiegare della calce ſi coobi lo ſpirito volatile ineffervescente ſopra la pietra cauſtica o ſopra il vetro ſiliceo peſtato, in un ſimile apparecchio, ſarà lo ſpirito volatile, che ſarà divenuto incomparabilmente più potente e più volatile, e fatto ſommamente effervescente. Ecco qui altre ſoſtanze reputate prive di gaz perchè non fanno effervescenza cogli acidi, le quali dopo di eſſere combinate tra di sè ſono grandemente effervescenti.

22. Parmi conveniente di oſſervare, che non oſtante che non ſi faccia altro in queſte operazioni, che una concentrazione di liquori, la volatilità de' vapori e l'elaſticità loro produce un vuoto nella ſtorta; e non mancherebbe di farſi un aſſorbimento ſe s'impiegaſſero apparecchj a feltro *(e)*. Ma in queſto caſo baſterebbe ſeparare la parte dell'apparecchio, la quale è unita al pallone, e adattare al cannello a chiave ſucceſſivamente le veſciche che ſono ſtate riempiute di gaz. Comunque ciò ſegua, è queſto gaz ſoggetto alle ſteſſe affezioni di tutti gli altri fluidi aeriformi nitroſo, marino, e degli altri riferiti dal Sig. *Macquer*; cioè eſſendo eſſi ridotti

(e) Per apparecchio a feltro intendo qualunque apparecchio, col quale ſi proccuri il dilavamento dei gaz entro qualche liquore.

al minimo dell' acqua neceſſaria alla loro eſſenza ſalina, e conſeguentemente nel maſſimo grado di concentrazione, acquiſtano l' apparenza aeriforme. Non mi tratterrò per ora ſull' importante ſingolarità delle effervescenze delle riferite ſoſtanze fra loro, baſtandomi di richiamarle dopo di aver reſo conto d' alcuni altri fenomeni, che non ſono ancora ſtati oſſervati, e da' quali ſi ricava la prova della verità di queſti riſultati, ſomminiſtrandoci lo ſcioglimento di molte importantiſſime verità.

23. Ho già oſſervato nel §. 5. che i Fiſici ſull' autorità del dotto Sig. *Black* aſſegnano per cauſa della cauſticità di alcune ſoſtanze la ſola privazione totale dell' aria fiſſa o del gaz mefitico; ed ha per verità queſto valente Ingleſe ſagacemente appoggiata la ſua teorica alle ſperienze, che ha fatto ſulla calce terrea. Il Sig. *Macquer* col Sig. *Lavoiſier* e molti altri Filoſofi del primo ordine hanno abbracciata queſta ſteſſa dottrina; ma raccogliendo e combinando i ſentimenti ſparſi ne' varj articoli del Dizionario di Chimica, ſembra che l' illuminato Autore colla ſolita ſua avvedutezza riguardi l' eſpulſione di queſti fluidi elaſtici, oſſia gaz, come un fenomeno inſeparabile dall' azione, che produce la cauſticità. In fatti egli è fuori di dubbio, che queſta circoſtanza non può non aver luogo nella maniera d' eſſere in cui ſi riduce un corpo, per poter quindi eſercitare quella forza reciproca, da cui prende anima la natura, e che è eſpreſſa in una maniera energica da' varj effetti, che ella ad ogni paſſo ci offeriſce; forza già da gran tempo riferita da' Geometri alla gravitazione univerſale, e che conſiſte nella maggiore o minore omogeneità, che ſi procura tra le parti della materia.

24. Queſto effetto dunque non mi pare che una circoſtanza concomitante da cui può derivare una diſpoſizione più favorevole alla materia per manifeſtare gli ef-

fetti della cauſticità (*f*), ſempre che le altre circoſtanze vi concorrano; ma la ſerie delle ſperienze, che comincerò a dare in queſto Saggio, mi ſembrano baſtanti per convincerci dell'eſiſtenza d'un principio poſitivo ridotto ad uno ſtato di perfetta inerzia, ſin che non è eccitato dalla reſtituzione del principio acquoſo del quale egli è ſtato intieramente ſpogliato in certa ſpecie di ſoſtanze cauſtiche. (*g*)

25. Sono tanto più diſpoſto a ſeguire queſta mia opinione, da me già annunciata nella prima parte d'una Memoria ſopra il *ſal nitro* (*h*), quanto che eſſa non mi allontana dalle idee luminoſe del Sig. *Macquer*, e da quelle del detto Sig. *Lavoiſier*. Il primo parlando della fuſibilità, che le terre calcaree (*i*) proccurano alle ſabbie, e alle argille, ſi ſpiega in queſti termini: *queſto fenomeno*, *del quale la cauſa è molto oſcura e difficile a rinvenirſi*, *pare che dipenda da una diſpoſizione paticolare del principio infiammabile*, *e forſe da un'ultima porzione del principio acquoſo;* e la ſua opinione intorno ai gaz aeriformi è, *che le ſoſtanze ſaline* (*l*) *acide o alcaline in queſto ultimo grado di concentrazione hanno una*

(*f*) Dall'eſpulſione di molti principj eterogenei delle materie ſottopoſte a violente operazioni naſce per neceſſaria conſeguenza una più o meno perfetta omogeneità fra le parti, che rimangono, e ſi fa tra eſſe un maggior adattamento. Da queſta più grande ſemplicità riſulta manifeſtamente un'affezione paſſiva, che procura alle ſoſtanze una maggior forza per attrarre e combinarſi co' principj, co' quali ſi mettono in contatto. Laonde può eſſere attiva la tendenza alla combinazione in certe ſoſtanze, ed affatto paſſiva in altre, come appunto nella calce viva, ed altre ſimili, nelle quali tuttavia ſarei per ſoſpettare non ſenza fondamento, che rimaneſſero ancora alcuni principj eterogenei, ma ridotti per l'eſtrema concentrazione ad uno ſtato di totale inerzia.

(*g*) Non credo di potermi diſpenſare dal diſtinguere i cauſtici in attivi, e paſſivi.

(*h*) Queſta Memoria non ha potuto eſſere ammeſſa al concorſo per eſſere giunta troppo tardi; ma è ſtata però ritenuta.

(*I*) V. queſt' articolo alla p. 71. *Tom.* 4.

(*l*) V. l'artic: gaz alcali volatile alla p. 30.

una tendenza estrema a combinarsi in generale con un gran numero di altre sostanze, e particolarmente coll'acqua: questi punti di vista, convien dirlo, sono grandi, luminosi, e degni della reputazione del loro Autore.

26. Non debbo ommettere di rendere anche la giustizia dovuta alla superiorità de' talenti, ed alle cognizioni del dotto Sig. *Lavoisier*, il cui ingegno si manifesta in tutte le sue opere. Parlando questo Autore dell' aria o del gaz nitroso, dice ch' egli è *l' acido spoglio d' aria e d' acqua*; ch' è quanto dire un acido reso inerte per la massima sua concentrazione *(m)*. Egli è vero che un dotto Accademico non pare soddisfatto di questa definizione, e che non ostante la sua arrendevolezza nell' ammettere la possibilità di concentrare quest' acido fino a ridurlo ad uno stato concreto, pensa tuttavia per analogia col zolfo (nel quale il celebre *Stahl* ha dimostrato l' esistenza dell' acqua) che quest' acido così concreto non sarebbe privo d' aria nè d' acqua; ma siccome non reca alcuna esperienza per prova dell' inesattezza di quella opinione, ed io avrò in seguito occasione di riferire de' fatti, che sembrano stabilirne la solidità, non mi estenderò più oltre in queste osservazioni.

27. Intanto per non abbandonarmi alla seduzione, che può eccitare l' amor proprio, e la prevenzione, mi sono determinato a cominciare da una breve analisi delle opinioni de' Fisici, e particolarmente del sistema del Sig. *Black* intorno alla causticità, sperando così di non essere sospettato di abbandonarmi alla ripugnante disposizione di censurare gli altrui sentimenti.

28. Quale è dunque la causa della causticità? Ella è l' intiera espulsione del gaz dalla terra calcarea, risponde il Sig. *Black* e con esso lui un grandissimo numero d' eccellenti Fisici.

Yyy

(m) Mem. dell' Accad. p. 680.

29. Egli è un acido d'una natura particolare associato alle parti del fuoco, il quale non è che una fissazione e concentrazione delle parti della luce, risponde il Sig. *Meyer* seguitato da alcuni rispettabili dotti (*n*).

Ristringendomi per ora al sistema del Sig. *Black* per il rapporto immediato, che egli ha coi gaz, debbo osservare prima d'ogni cosa, ch'egli non è dotato del carattere di generalità, che pur mi pare indispensabile allo stabilimento d'una verità primaria e fondamentale, la cui estensione ed importanza influisce nello sviluppamento di molte verità particolari. In fatti essendo egli limitato a rendere ragione della causticità delle calci terree, e di alcuni prodotti, che vi hanno rapporto, bisogna poi ricorrere ad altra causa, sovente anche contraddittoria, per ispiegare la causticità di molte altre sostanze: come sarebbe per gli acidi, per gli alcali, pe' sali metallici (*o*), pe' fosfori, e pirosori ecc. Ma basti per ora di averne fatto parola.

31. La calce viva è dunque caustica perchè è riputata del tutto priva di gaz, e si è pensato così a cagione di sua creduta ineffervescenza cogli acidi: ma dopo le sperienze già riferite, non credo che si possa ragionevolmente continuare in questa opinione, perchè abbiamo dimostrato, che l'ineffervescenza della calce viva e di molte altre sostanze caustiche dipende unicamente dal contatto più perfetto fra la parti in cui sono ridotte, alle quali poi proccurando una divisione anche pu-

---

(*n*) E' stata l'opinione del Sig. *Meyer* diversamente modificata da altri dotti, ed egli stesso non ha fatto che risuscitare le opinioni degli antichi; ma come oggi è riguardato quest'Autore per capo di questa dottrina, e si possono far entrare in quell'opinione tutte le modificazioni fattevi da altri, credo di potermi dispensare dal farne ulteriore menzione, perchè non è ancora tempo di discuterne la solidità.

(*o*) Penso che si debba far distinzione tra le sostanze saline metalliche, e le calci fatte col fuoco pel carattere di causticità, del quale sono dotate le prime, mentre la stessa proprietà non si manifesta almeno sensibilmente nelle seconde.

ramente meccanica, di modo che presentino una maggior quantità di superficie all' azione dell' acido, si ottengono le effervescenze: fenomeno che parmi stabilire senza restrizione la solidità della teoria della tendenza della materia a combinarsi, teoria spiegata con tanta eleganza dal Sig. *Macquer* (*p*).

32. Il sentimento però de' Fisici par che riceva una forte conferma dal passaggio o trasporto che si pretende di proccurare al gaz delle sostanze, che lo contengono in quelle, che ne sono sprovviste; e fra i varj esempj che se ne recano, quello della scomposizione del sale ammoniaco (*q*) colla calce viva sembra somministrare una dimostrazione assai solida a favore di questa teoria. Di fatto, dicesi, togliendosi dalla calce viva il gaz al sale ammoniaco, non è straordinaria cosa il vedere che l'alcali volatile, che ne risulta, sia totalmente ineffervescente cogli acidi, e sia dotato della più potente causticità (*r*): ma nell' atto di cedere alla forza di questi argomenti, altri fatti si presentano, i quali bastano per indurre la maggior diffidenza.

33. Senza entrare per ora nella nojosa discussione di molti fatti implicanti contraddizione evidente coll' assunto principio, e impegnarci in una prolissa enumerazione di fenomeni ripugnanti, li quali non avrebbero un rapporto diretto colla scomposizione del sale ammoniaco in alcali volatile caustico, di cui è attualmente quistione, mi basta di qui richiamare la scomposizione di questo stesso sale, che si ottiene per mezzo delle calci metalliche. L'alcali volatile che se ne ricava è di som-

(*p*) Anch' io ho fatto uso di questa forza di contatto nelle Mem., che ho scritto sul fluido elastico della polvere V. Misc. Taur. *T.* I. an. 1759.

(*q*) Quello dell' alcali caustico, dal quale si ricava la pietra caustica, è pure un esempio di questo trasporto.

(*r*) V. gli Art. del Dizionario di Chimica (*Alcali volatile ammoniaco*) (*sale*) (*causticità*) (*calci* ecc.)

ma causticità, ed in forma fluida, colla differenza poi, ch'egli è effervescente cogli acidi (s). Ma le calci metalliche si vogliono pur cariche di gaz. Ognun vede pertanto ciò che ne consegue legittimamente.

34. Ora prima di passare più oltre debbo osservare, che le alterazioni, che soffre l'alcali volatile nella scomposizione del sale ammoniaco colla calce, le quali nel sistema del Sig. *Black* sono assegnate all'azione dell'aria fissa, come si esprime il Sig. *Bucquet*, sono, come ho già detto sin da principio, 1°. che l'alcali volatile che se ne ottiene è sempre sotto forma fluida; 2.° ch'egli è potentemente caustico; 3.° ch'egli è ineffervescente cogli acidi; 4.° che questa scomposizione è accompagnata da uno sviluppamento tumultuoso di vapori, riguardato da molti Fisici per una vera produzione d'aria o di gaz, la quale non manca di cagionare la rottura de' vasi se non se gli dà scampo libero opportunamente. Siffatte alterazioni essendo considerate come proprietà, che distinguono quest' alcali volatile da quello che risulta dalla scomposizione del sale ammoniaco colla creta, e coll'alcali fisso, ho creduto di doverne fare l'oggetto di un esame tanto più metodico quanto mi è sembrato egli più proprio a conciliare gradi di fede alla nuova teoria della causticità.

35. Le sperienze delle quali ho reso conto per riguardo all'effervescibilità della calce mi pajono per verità

(s) Il Sig. *Bucquet* rispettabilissimo Chimico avea intrapreso l'esame di questo oggetto, e lo pubblicò prima, che fossi determinato di dare alla luce le mie ricerche su questa stessa materia, dovendo elle far parte d'un'opera molto più considerabile. Mi fo pertanto un dovere di rendere qui un giusto tributo di stima alla sua Memoria rimettendo al giudizio de' dotti le cose nostre. E ritornando al mio oggetto mi prevalerò de' termini di questo illustre Fisico Francese nel suo eccellente Scritto su questo sale inserito nel IX. vol. des *Sau etrang*. p. 572., *nel sistema del dottore Black si attribuiscono* (dice quest' Autore) *all' azione dell' aria fissa le alterazioni che soffre l'alcali volatile nella scomposizione del sale ammoniaco colla calce* ecc.

baſtanti a diſtruggere la ſuppoſizione, alla quale s' appoggiano i Fiſici, cioè ch' ella dimoſtri l' eſiſtenza d' un gaz; ma dovendoſi ragionevolmente diſtinguere queſti fluidi aeriformi in una maniera più ſpecifica, onde formarne idea meno confuſa, ſtimo bene di dividerli, e conſiderarli generalmente in *gaz pneumatici*, ed in *gaz vaporoſi*; giudicando conveniente di dichiarare la mia opinione ſu queſto movimento, ottimamente eſpreſſo dal dotto Autore del Dizionario di Chimica, e parendomi altresì indiſpenſabile di diſtinguere la cauſa d' un effetto dalle circoſtanze, che poſſono accompagnarla. E' dunque la mancanza totale del principio acquoſo, a mio parere, e così d' ogni qualunque gaz, una circoſtanza di fatto, oſſia una conſeguenza neceſſaria del tormento ſofferto dalla ſoſtanza terrea. Queſta diſunione promoſſa con una cauſa così violenta non fa che rimettere la materia in uno ſtato di omogeneità, da cui dipende l' accennata forza della tendenza alla combinazione; forza dipendente dal contatto più o meno eſatto delle parti, il quale riduce le ſoſtanze in uno ſtato di eſtrema aridità, e le rende avide di nuove aſſociazioni, che più o meno perfette, più o meno pronte riuſciranno, in ragione del contatto loro con altre ſoſtanze, e delle proprietà di queſte. Così prontiſſimo ſarà il riaſſorbimento dell' acqua dalla calce, perchè è diffuſo più uniformemente (per la ſua ſemplicità e per la ſua fluidità) e più permeante queſto principio di natura: e ſeco reſtituirà una parte dell' aria, perchè ne contien ſempre in iſtato, dirò col Sig. *Roux*, di diſſoluzione; come in ſimile ſtato contiene i principj d' acidità negli acidi, e d' alcalinità negli alcali.

Ma appunto dal conflitto che naſce nel combinarſi di queſte materie pel rapimento che fanno le une del principio acquoſo alle altre, e per cui ſegue neceſſariamente la loro ſcompoſizione, naſce il movimento che conoſciamo ſotto il nome di effervescenza, nel quale lo

ſprigionamento di qualunque principio volatile è allora unicamente dovuto, come ottimamente penſa il Sig. *Lavoiſier*, alla ſcompoſizione dell' altra ſoſtanza qualunque, il che ha luogo anche più generalmente, non eſſendo riſtretto il caſo al ſolo acido, del quale parla queſto valoroſo Accademico.

36. Molti inſigni Scrittori, fra' quali il Sig. *Bergmann*, dubitano che ſi poſſa confondere queſto movimento delle effervefcenze con quello che è proſſimamente conforme al moto prodotto dall' ebullizione; ma baſta eſaminare le circoſtanze degli effetti, che ne naſcono, onde non temere di prendere abbaglio: mentre non riſulta dal moto di ebullizione altro effetto, che quello d' un' accelerata diſſipazione del principio evaporabile ſenza che venga prodotta mutazione eſſenziale nelle ſoſtanze, ſalvo che nella diſtribuzione de' principj meno volatili. All' oppoſto le effervefcenze ſono ſempre un ſicuro riſcontro di alterazione nelle medeſime. E' vero che nell' uno e nell' altro caſo vi può eſſere, e vi ſarà eſpulſione più o meno compiuta delle parti volatili, e più diſpoſte alla ſvaporazione; ma ſarà queſto nel caſo dell' ebullizione il maſſimo effetto, che ſi può aſpettare; e nelle effervefcenze ſarà ſoltanto una circoſtanza neceſſariamente concomitante. La fermentazione *animata* potrebbe più giuſtamente dar a temere di equivoco, perchè riuniſce le circoſtanze de' due movimenti ſuddetti; ma per la ſua preſſo che uniforme equabilità anch' eſſa va a confonderſi finalmente in quello di putrefazione: moto generato dal concorſo generale delle forze della natura, che reſtituiſce l' equilibrio tra gli elementi nello ſtemperamento delle già logorate combinazioni, per reſtituirle ai puri rudimenti di materia informe; ed è queſto il riſultato di tutti, nè vi s' incontra la debolezza o la violenza ne' mezzi, nè il tumulto negli effetti, onde ſi deve meritamente riguardare come un perfetto temperamento riſerbato alla natu-

ra per produrre, ad onta nostra, quelle trasformazioni continue, colle quali conserva un' assai equilibrata uniformità nelle cose sue; ciò che non senza fondamento ha dato motivo a' nostri antecessori di farne un sistema di dottrina compreso nel volgare adagio *corruptio unius est generatio alterius*. Ma troppo mi sono scostato dal mio assunto, perlochè troncata ogni ulteriore digressione ripiglio l'argomento.

37. Egli è dunque abbastanza manifesto, che seguendo l'opinione che l'effervescenze provino l'esistenza dei gaz, avendo noi dimostrato, come è facile a ciascheduno di convincersene, che le sostanze, le quali si pretendevano ineffervescenti, presentano per altro questo movimento, ogni volta che si distrugge, anche meccanicamente, la forza di tendenza, colla quale i principj stavano uniti fra loro; tutta la teoria della causticità dipendente dalla privazione del gaz viene legittimamente confinata fra gli enti di sottile speculazione; e perciò intieramente distrutta. Ma per non dipendere più la causticità delle mentovate sostanze da così comodo principio, non siamo dispensati dal mettere in opera ogni sforzo, onde indagarne la vera cagione.

Per accingermi dunque il primo a questo assunto, e per non iscostarmi dall' oggetto in quistione, comincerò dall' esaminare da che dipenda, che questo alcali è sempre sotto forma fluida; perchè questo liquore è caustico; se è vero ch'egli sia e debba essere ineffervescente cogli acidi; e finalmente se i vapori, che si manifestano nell'atto della scomposizione, sieno un gaz pneumatico, che si sviluppi, o se debbano soltanto attribuirsi ad una espulsione contemporanea dell'aria contenuta nelle capacità coi vapori alcali volatili, la cui elasticità iniziale è strepitosa e tumultuante.

38. Quantunque la calce viva non fosse effervescente cogli acidi, in qualunque modo ella s' impiegasse in frammenti più o meno minuti, saremmo tuttavia auto-

rizzati a sospettare dell' esattezza della supposizione nella circostanza particolare di questo processo; mentre gli sperimenti irreprensibili e stati sin qui rispettati del valorosissimo Sigr. *Duhamel* ci mettono in diritto di dubitare, se sia lecito supporre, che la calce la quale dee servire alla scomposizione del sale ammoniaco sia scevra affatto di gaz, avendo questo celebre Accademico provato decisivamente, che non segue alcuna scomposizione del sale ammoniaco colla calce veramente viva, e che è di tutta necessità d' impiegarla estinta (*t*): non è poi da dubitare che la calce estinta, comunque se ne faccia l' estinzione, non si trovi più nelle circostanze in cui era; e dalle sperienze da me fatte, la semplicità delle quali mi dispensa da ogni dettaglio, risulta esser certissima cosa che la calce estinta all' aria o nell' acqua riunisce ogni condizione, per cui manifesta cogli acidi un movimento più o meno impetuoso, e che si conosce sotto il nome d' effervescenza, non di ebullizione.

39. Se ottenessi dunque di provare la falsità dell' asserzione, che la calce, la quale produce la scomposizione del sale ammoniaco, non è altramente nelle circostanze della calce viva, e che non potrebbe ella nè meno effettuarla finchè fosse nelle circostanze di questa, crederei soddisfatto il mio assunto; ma l' esattezza dell' analisi non mi permette d' attenermi alla sola confutazione del fatto, e mi stimo in dovere d' aggiugnere tutto ciò

(*t*) Il Sig. *Fourcroy* nelle sue Lezioni dice per verità alla p. 282., che la calce estinta all' aria scompone questo sale ugualmente, che la calce viva. Questa osservazione m' è giunta inaspettata, essendo diametralmente opposta ai lavori del Sig. *Duhamel*, al sentimento generale de' Chimici, ed alle mie sperienze stesse. Ad onta del mio rispetto per gli uomini grandi, non mi credo dispensato dal ripetere le sperienze loro, e dall' assicurarmi io stesso de' risultati, come ho fatto son già più di vent' anni su questo soggetto. Ma si vedrà in appresso ciò che ho riconosciuto dalle sperienze, che questa nuova opinione mi ha suggerite.

to ciò che può essere necessario per dimostrare, che non è nè meno per parte del gaz che ha luogo questa scomposizione,

40. *Sempre*, dice il Sig. *Duhamel*, *che si ottiene l' urinoso ammoniaco sotto forma di spirito*, *si è perchè è passato nella distillazione coll' acqua contenuta nelle materie*, *e che invece d' essere unito ad una sostanza solida*, *la quale gli dia corpo*, *lo è ad un liquido che lo discioglie*.

41. Questo passo così preciso d' un Fisico tanto rispettabile quanto il Sig. *Duhamel* non m' è sfuggito dalla mente, e già ne ho fatto uso nel lavoro presentato all' Accademia nostra di Torino in principio dell' anno 1760. in seguito di varie sperienze fatte da me sull' istesso argomento, le quali non sono forse conosciute, ed alle quali rimando i Lettori, che ne potessero esser curiosi (*u*) per non appoggiarmi sopra la mia autorità dopo quella del dotto Autore, che ho citato.

42. Quella all' incontro del celebre Autore del Dizionario di Chimica è di troppo gran peso per ommettere di riferirla: *Egli è sensibile che la fluidità dell' alcali volatile dipende dall' acqua contenuta in gran quantità nella calce estinta*, *in cui l' alcali volatile è disciolto*.

43. Il Sig. *Bucquet* nella sua eccellente Memoria già citata ha cercato d' assicurarsi intorno ai dubbj, ch' egli aveva sull' azione comunemente attribuita alla privazione del gaz nella calce riguardo a questo sale, ed essendosi accertato, che nonostante il soggiorno di questa sostanza nel gaz mofetico non succedeva alcuna differenza in questa scomposizione, ha conchiuso che non si doveva assegnare alla privazione del gaz; e quantunque

Zzz

(*u*) Trovasi altresì questo opuscolo nel Tom. XIII. dell' eccellente deposito delle scienze fisiche, la Collez. Accademica.

non ſia andato più innanzi nella ricerca del principio, dal quale poſſono dipendere tutti queſti fenomeni, egli ha tuttavia ſtimato di conchiudere, che ſi devono al concorſo del principio acquoſo carico di gaz; concluſione a mio giudizio un poco troppo precipitata, mentre non ha fatto paſſo all' eſame dell' azione del principio acquoſo privo di gaz, prima di permetterſi queſta concluſione, come lo avrebbe richieſto il rigore dell' analiſi, ed i ſuoi riſultati continuando poi ad eſſere negativi; coſa che non gli ſarebbe avvenuta certamente, come ſi vedrà dalla ſerie delle mie ſperienze. Avrebbe per ultimo potuto ſottomettere all' eſame l' azione riunita del gaz e dell' acqua per conchiudere, come ha fatto, ſenza alcuna taccia.

44. Queſto è appunto il piano, che ho ſeguito affine di dare la maggior generalità alle mie ricerche; ma l' infedeltà de' dati avendomi ſempre reſo più diffidente ho creduto di dovermi aſſicurare anche delle più triviali e minute circoſtanze di queſto proceſſo.

45. Ho adunque cominciato dalla ricognizione dell' effervefcibilità della calce eſtinta, ed ho oſſervato, che quella ch' è perfettamente eſtinta all' aria è più effervefcente di quella che lo è coll' acqua, e che l' eſtinzione fatta dall' acqua induce grandiſſime differenze, eſſendo ſenſibilmente più effervefcente, quando è fatta lentamente e con cautela; ciò che conferma, che dipendono le effervefcenze della calce cogli acidi dallo ſtato di aridità delle parti della medeſima, e dalla diviſione, che ſi proccura tra le medeſime per mezzo dell' acqua; di modo che per il conflitto che inſorge nell' atto di queſte combinazioni dal rapimento del principio acquoſo, riſulta per neceſſità la ſcompoſizione delle ſoſtanze, da cui ſi ſtrappa. In qualunque maniera però ſia ſtata eſtinta la calce, che s' impiega, non ſuccede alcuna differenza nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco, ſe non ſe quella che deve neceſſariamente procedere dal-

la maggiore o minore quantità d' acqua, della quale è pregna la calce; ma ne risultano di assai ragguardevoli nello sviluppamento de' vapori, i quali sono sempre più elastici e tumultuosi a misura che la calce impiegata è meno divisa.

46. La considerazione della poca aderenza dell' acido marino alle terre calcari, dalla quale hanno tratto argomento di spiegare i Maestri dell' arte il fatto avanzato da alcuni Chimici di avere spogliato il sale marino del suo acido colla sola azione del fuoco, avendomi fatto nascere, come dissi, il sospetto che in questa scomposizione, attesa specialmente la grande affinità di quest' acido coi principj volatili, e perciò col principio acquoso, coll' infiammabile, e coll' alcalino volatile, ne potesse sfuggire qualche parte sotto forma gazosa, ho disposto il mio apparecchio in guisa che dopo essersi feltrato attraverso un considerabile strato d'acqua distillata, il fluido sviluppato dovesse quindi attraversarne un altro d' acido nitroso allungato, affinchè si regalizzasse, e sciogliesse la foglia d' oro, che vi era. Siccome da alcuni Chimici poi si è preteso d' aver ottenuta la dissoluzione dell' oro in liquori acidi, diversi dall' acqua regia, mi è perciò venuto in mente di proccurare la feltrazione d' una parte del gaz che diremo *ammoniacale* attraverso l' acido vitriolico, l' acido marino, e l' acido vegetale, ne' quali tutti eravi una foglia d' oro, e per ischivare ogni sospetto di scambievole comunicazione tra i vapori nitrosi e marini, avendo accesso nello stesso recipiente dell' acqua, ho fatto comunicare questi due liquori rispettivamente con due altri recipienti, ne' quali vi era pure dell' acqua distillata; e siccome le comunicazioni erano stabilite per mezzo de' tubi di vetro, che si stendevano sin verso il fondo de' recipienti, così non mi restava a temere la reciproca alterazione di questi due acidi: erano inoltre i recipienti tutti di grandissima altezza in proporzione del-

la loro vaſtità, come ho notato al §. 12., ed ho creduto anche utile bene ſpeſſo il proccurare la feltrazione del gaz per l' olio di tartaro, e pel liſſivio cauſtico.

47. Nella moltiplicità delle operazioni fatte ſu queſto oggetto ho ſtimato bene di ripetere tutti i proceſſi indicati da' diverſi Autori riguardo alla proporzione tra il ſale ammoniaco, e la calce viva; e così anche di aſſicurarmi delle varietà che poſſono dipendere dallo ſtato delle calci, e dalla maniera di fare le combinazioni delle materie; e mi è riſultato che ſia preferibile la combinazione ſollecita de' fiori di ſal ammoniaco ben puri con tre volte il loro peſo di calce ben viva e appena raffreddata, coll' aſperſione contemporanea e pronta dell' acqua (nella quantità preſcritta dal Sig. *Baumè*) entro la ſteſſa ſtorta per mezzo d' un tubo di latta ricurvo, la cui eſtremità ſia fatta a forma d' innaffiatojo. Richiede queſto metodo, la cui combinazione riſulta dai metodi e dalle oſſervazioni de' celebri Signori *Rouelle* e *Baumè*, una diligente ed anticipata preparazione di tutte le parti dell' apparecchio; perchè non è appena diffuſa l' acqua entro la miſtura, che naſce una veemente fermentazione in eſſa accompagnata da gagliardiſſimo calore, che la fa bollire, ed accelera rapidiſſimamente la ſcompoſizione, dalla quale ſorge preſſo che iſtantanea, e violentiſſima l' eſpulſione de' vapori, i quali eſſendo di ſorprendente elaſticità non potrebbero più trattenerſi ſe rimaneſſe altro lutamento da fare, oltre quello della ſtorta col tubo di comunicazione: avvenendo anzi frequentemente, che per la prontezza della calce nell' imbeverſi d' acqua ſi ha appena il tempo d' infonderla tutta, prima che cominci la ſcompoſizione colla copioſa, ed incomoda emiſſione di vapori ſoffocanti; ma poco ſe ne perde, ſe ſia in pronto l' apparecchio qui avanti deſcritto ai §. §. 10. 11. 12. e 13, e ſe ſieno praticate tutte le ſuggerite cautele.

48. Questa operazione così eseguita basta per assuefare l' occhio d' un diligente osservatore a riconoscere la differenza che passa tra i movimenti, che si distinguono dai Fisici, cioè di ebullizione, di fermentazione, e di effervescenza, mentre le circostanze loro sono abbastanza distinte da non potersi confondere: l' ebullizione altro non essendo, come dissi, che un' accelerata evaporazione; la fermentazione si sa da tutti essere un moto intestino più o meno sensibile, da cui risulta la disunione delle parti della materia, e conseguentemente la distruzione progressiva della forza di coesione; l' effervescenza abbiamo veduto dipendere da un rapimento o scambievole o unico di qualche principio nell' atto della compenetrazione delle materie, nel quale sempre vi è azione e reazione, e perciò scomposizione, e nuova combinazione con dispendio violento di principj volatili.

49. Ne' primi momenti dello sconvolgimento dei principj delle sostanze messe in esperienza si ottiene un liquore di massima volatilità e causticità senza ministero di fuoco; ma siccome coi vapori viene rapidamente espulsa l' aria dalle capacità ne' primi istanti, così per mettersi a coperto da un egualmente rapido assorbimento del liquore contenuto nel magazzino o gran recipiente, che comunica col pallone, è cosa opportuna il cominciar a metter del fuoco sotto il bagno a misura che si vede scemare l' elasticità de' vapori dimostrata dal rallentamento delle bolle, che attraversano l' anzidetto liquore.

50. Egli è vero che si potrebbe supplire chiudendo la sola comunicazione tra il pallone ed il magazzino; e per non esporsi alla frattura della storta pel peso dell' aria esterna (cosa più volte accadutami in varie sperienze, nelle quali erano presso che vuote le storte) si potrebbe aprire la comunicazione dal tubo superiore *RR* del pallone *X* alla campana *LL*. Ma dovendosi poi di

nuovo chiudere pel nuovo ſviluppamento del gaz che ſi fa dall' azione del fuoco, ſarà più ſpedito di anticipare l' applicazione del fuoco ſotto il bagno.

51. Non eſſendovi confronto da fare tra il liquore de' primi momenti e quello che ſi ottiene in ſeguito dell' operazione, allorchè voglio procacciarmi liquori concentratiſſimi, ho per coſtume di chiudere il tubetto inferiore, e di mutare il recipiente, toſto che ſono di molto rallentati i vapori del primo periodo, vale a dire di quelli, che ſono eſpulſi ſenza fuoco; e ſurrogato un nuovo recipiente *E* raccolgo un liquore, che ſi produce in tutto il tempo che per l' azione del fuoco ſi fa ſviluppamento di gaz ſino all' iſtante, in cui comincia a manifeſtarſi un' oſcillazione nel tubo comunicante col magazzino, la quale nel ſuo refluſſo ſupera l' altezza dell' acqua dentro al magazzino medeſimo: ſegno infallibile del termine del ſecondo periodo, e di un imminente aſſorbimento. Mutato per l' ultima volta il recipiente *E* ſi dà corſo all' operazione ſino al ſuo fine coll' apertura della campana *LL* immerſa nell' acqua, la quale reſtituiſce l' aria, ch' è ſtata ſcacciata dalle capacità.

52. I riſultati ſono 1.° che il liquore ricavato ſenza fuoco è in uno ſtato di tale concentrazione, che laſciandovi cadere goccia a goccia dell' acido nitroſo ſi fa un ſibilo così veemente, che emula quello d'un acido vitriolico concentratiſſimo nell' acqua, o di un ferro rovente a bianco. Con poche goccie di queſt' acido ottenni 47. gradi di calore nel Termometro a mercurio di *Reaumur*; è ſorprendente la ſua volatilità, e la ſua cauſticità.

53. 2.° quello che ſi raccoglie col fuoco nel tempo dell' eſpulſione è altresì ſommamente effervescente, ma non produce un calore così gagliardo; è per altro conſiderabile del pari la ſua volatilità, e cauſticità.

54. 3.° L' ultimo liquore raccolto parimenti col fuo-

co nel tempo che si fa l' assorbimento non è per verun conto effervescente, ed è assai meno volatile e caustico: che se si mescolino insieme questi tre prodotti, non si ottiene più effervescenza, e si ha il liquore alcali volatile caustico solito a raccogliersi nell'operazione dai Chimici.

55. L'acqua dei magazzini è pregna, come può comprendersi da ognuno, di gaz alcali volatile purissimo; ed è la sua forza ed attività in ragione della quantità de' vapori, e di quella dell' acqua (*v*).

Quanto poi a' liquori che hanno servito alla feltrazione del gaz, e ne' quali trovasi l'oro, evvi un precipitato bianco, talora grigio, e talora finalmente oscuro nell'acido vitriolico; e qualche volta vi si trova un poco annerito l'oro. Nello spirito d'aceto si scorgevano alcune volte de' fiocchi bianchi sopranatanti, ed altre volte un poco di simile precipitato, ma sempre senza offesa dell'oro; nell'acido nitroso era sensibile la dissoluzione di questo metallo dal calore, ch'egli acquistava passando dal bianco limpido al giallo più o meno carico; nell'acido marino poi vivissima è la sua azione sull'oro, essendone la dissoluzione più compiuta e più pronta che negli altri (*x*). Quanto poi all'olio di tartaro, sensibile è il precipitato che vi si scorge come pure nel lissivio caustico.

(*v*) Spesso si scorge nel magazzino principale un tenue precipitato più o meno bianco, il quale mi è sembrato essere una finissima terra di natura calcarea stata probabilmente asportata dal gaz nel tumulto de' primi vapori.

(*x*) Non sempre succede la dissoluzione dell'oro in questi acidi nel tempo dell'operazione, almeno in una maniera distinta, eccetto che nel caso che la quantità delle materie impiegate sia molta, dipendendo dalla durata, e dalla quantità de' vapori espulsi, come pure dalla quantità dell'oro per rispetto a quella degli acidi impiegati in qualità di feltro, e dalla maggiore o minore concentrazione. Ma quand' anche non riuscisse contemporanea la dissoluzione, si avrà motivo di riconoscerla col soggiorno dell'oro negli stessi acidi carichi di gaz.

56. Non credo di potermi dispensare dal riferire un fenomeno del tutto straordinario, che mi è più volte riuscito di vedere, cioè la perdita dell'effervescibilità di un liquore alcali fisso da me talvolta impiegato; era questo una dissoluzione carica a tutto potere d'un tartaro che si suole impiegare da varj Artisti nelle tinture, il quale non essendo persettamente calcinato nè tampoco purificato dalle dissoluzioni, feltrazioni, ed essiccazioni successive e ripetute, può riguardarsi come un alcali impuro, nel quale, oltre a molta materia terrea, vi sono unite molte parti flogistiche, e forse qualcuna ancora delle acide; ad ogni modo però sempre che ho fatto feltrare il gaz alcalino, o vogliam dire *ammoniacale* entro a questo lissivio, passato però per la carta, perdeva intieramente la proprietà di fare effervescenza con qualunque acido, quando era ben carico di vapori alcali volatili caustici: di bianco limpido diventava giallo, e quindi rossigno il liquore; sviluppava una tinta arsiccia nella carta azzurra, divenuta secca dopo di esservi stata immersa; ed infondendovi sopra il sale di tartaro ben purgato e ben secco, pareva eccitarvi uno sviluppamento di bollicine con schiuma alle pareti de' vetri da orologio, de' quali soglio servirmi per siffatte esplorazioni. Succedeva finalmente a questo liquore quello che alle volte accade coll'olio di tartaro per deliquio carico di colore, vale a dire che oltrepassando apparentemente il punto di saturazione si condensa lo spirito volatile in un liquore più chiaro, sopranuota al liquore alcali fisso, galleggiando, come fa l'olio grasso sull'acqua. Ma è degna d'osservazione la corteccia, che distingue la separazione di questi due liquori, mentre s'assomiglia ad una pellicola sottilissima ed arricciata partecipante del colore particolare d'ognuno de' due liquori.

57. Parmi d'aver tutto il fondamento, onde ascrivere la singolarità di questi fenomeni al rapimento dell' acqua dell'olio di tartaro dal gaz ammoniacale, e dalla necessaria

necessaria diversità che si produce nella distribuzione, aderenza, e tenuità del flogisto cagionata dalla tendenza del medesimo a combinarsi collo spirito volatile, mentre viene dalla forza di coesione ritenuto dall' alcali fisso. In fatti chiarissimo suol essere lo spirito alcali volatile caustico; chiaro del pari potrà essere il lissivio alcalino; ad ogni modo colorita più o meno risulterà la combinazione de' medesimi, lo stesso spirito sopranuotante comparirà tinto in giallo più o meno carico, mentre più rossiccio ancora rimarrà l' alcali fisso. Non è equivoca l' azione dell' alcali volatile caustico sulla parte infiammabile de' liquori, e basta un semplice sperimento per convincersene. Si combini un acido concentrato tanto che basti per mordere l' olio che vi s' infonde; vi si getti sopra dello spirito volatile caustico concentrato: immediatamente si vedrà rapito l' olio all' acido, e ridotto in forma saponacea *(y)*, bastando altresì a dimostrare questa attività il colore giallo rossigno, che acquista lo spirito volatile più limpido, quando, otturata una boccia con turacciolo di sughero, s' immerga questo nel liquore.

Per altro sarò nel caso di far conoscere un' altra volta che la stessa proprietà, che hanno varie sostanze di potersi infiammare, dipende non tanto dalla quantità che dalla tenuità, e distribuzione del principio infiammabile in esse contenuto.

58. Egli è però evidente, che gli errori che possono essersi introdotti non sono che una conseguenza necessaria delle inesattezze occorse nello stabilire i dati, mentre finora non s' era da alcuno de' Fisici sospetta-

Aaaa

(y) Sarebbe forse troppo ardito il pensare, che l' apparenza saponacea fosse da riguardarsi come un segno di antagonismo di forze risultanti dalla causticità, che confondendosi soltanto reciprocamente senza combinarsi restano in sospeso.

to. 1.° che l' ineffervefcenza dello fpirito volatile cauftico dipendeffe dal mero difetto di concentrazione. 2.° Che nella fcompofizione del fale ammoniaco con la calce fi affociaffe una parte dell' acido marino coi vapori alcalini; anzi a dire il vero concederò, che vi foffe fondamento per non formare quefto fofpetto, giudicandone da ciò che fuole avvenire nel combinarfi quefte foftanze, poichè ne rifulta la produzione dello fteffo fale ammoniaco: non potendofi fare argomento in contrario, fuorchè conofcendo appieno ciò che fuccede in sì fatte fcompofizioni, cioè che ceffano le forze mutue di tendenza alla combinazione per il difetto del veicolo neceffario, vale a dire del principio acquofo, effendo ridotto ognuno d' effi ad un fingolare grado di concentrazione; laonde non può afcriverfi a riprenfibile errore di mente l'aver affegnata la caufa della caufticità alla privazione dell'aria fiffa, effendo quefta una circoftanza di fatto, la quale però non è che una confeguenza neceffaria e concomitante la vera caufa, cioè quella della divifione più o meno violenta delle parti, con fimultanea efpulfione di alcuni principj e l' inzeppamento forfe in alcune di un acido ridotto alla fua maffima concentrazione, e del flogifto anche in altre (Y). La dimoftrazione di quefti effetti in tutte le materie dotate del carattere di caufticità farebbe troppo eftefa per comprenderla in quefto Saggio, e mi bafti di averli dimoftrati nel cafo concreto dello fpirito volatile contro uno di que' punti fiffi, e fondamentali, fu' quali fi è appoggiata l'ingegnofa dottrina del Sig. *Black*; rifervandomi a darne lo fviluppamento generale in altra occafione per non difcoftarmi dai riguardi, che

(Y) Avvertafi che qui s' intende di efprimere quel grado di concentrazione, cui non può attignere un acido fenza ceffare di effer tale; gli ulteriori gradi convertendolo probabilmente per ultima metamorfofi, prima dell' intera rifoluzione, in alcali volatile.

prescrive il rigore analitico d' un accademico ragionamento. Mi restringerò pertanto ad osservare che dal non essersi posto mente al vuoto, che necessariamente deve succedere ne' vasi chiusi, perchè segua una qualsivoglia operazione capace d'aver effetto in tali circostanze, possono facilmente essersi moltiplicate chimeriche produzioni di nuove arie, grande diversità passando tra ciò che deve intendersi per aria, e il gaz o fluido aeriforme.

59. Quantunque non intenda di entrare per ora in una più estesa dimostrazione della concentrazione ed inzeppamento di varj principj, e dell' acido singolarmente non meno che della relazione strettissima, ch' egli ha col flogistico; per poter affermare che l' acido ridotto allo stato di massima concentrazione, o di privazione estrema del principio acquoso, si manifesta quindi o colle proprietà caustiche, o coi sintomi di flogisto, e forse (siami permesso d' andar più innanzi ancora) con quelli d' alcali volatili, secondo che la materia, nella quale trovansi inzeppati questi rudimenti, viene modificata dalle nuove associazioni, che se le fanno incontrare, onde per mezzo di estemporanee associazioni o concordemente o soltanto in parte concorrono alla formazione di nuovi prodotti; mi basti l' accennare alcuni fatti comprovanti questa manifestazione del flogisto nelle sostanze coll' acquistata causticità.

60. Il Sig. *Gellert* assicura alla p. 170. del secondo volume della sua Chimica metallica esser non solo possibile di ridurre la luna cornea per mezzo dell' alcali fisso (osservazione altresì fatta dal sagacissimo Sig. Cav. *Landriani* di concerto col dotto Sig. Professore *Moscati*), ma che si può eziandio rivivificare la calce di piombo, e quella d' antimonio per mezzo della creta. Ancorchè da questo Autore si sparga poi qualche dubbietà sulla necessità del flogisto nella riduzione delle calci metalliche per la poca quantità, che queste materie ne con-

tengono, ravvicinando un altro ſperimento riferito dal celebre Sig. *Baumè* nella ſua Chimica ragionata alla p. 33. del Tom. 2°, il quale conſiſte nella precipitazione del ferro d' una diſſoluzione di vitriuolo verde in una ſpecie d' azzurro di Berlino col liſſivio cauſtico, mi pare che più fondato ſia il penſiere del Sig. Cav. *Landriani*, cioè che per mezzo della cauſticità ſegua la flogiſticazione dell' alcali fiſſo, vale a dire, ſecondo l' interpretazione che debbo permettermi, che per queſta operazione diventi manifeſta la preſenza della materia infiammabile, diſtribuita prima e diffuſa in troppo gran numero di parti, riducendoſi così allo ſtato di vero flogiſto; cioè a dire d' un ravvicinamento de' principj infiammabili per mezzo della concentrazione loro, dipendente dalla diſſipazione ſegnatamente del principio acquoſo: non ſolo ho riconoſciuta la verità del fatto accennato dal Sig. *Baumè*, ma l' ho anche moltiplicato combinando colla diſſoluzione del vitriolo marziale lo ſpirito volatile di ſale ammoniaco cauſtico; una diſſoluzione del fegato di zolfo calcareo alcalino nell' aceto; l' alcali volatile ottenuto per mezzo del liſſivio cauſtico del liquore ſiliceo; lo ſteſſo liquore ſiliceo benchè men prontamente, e meno intenſo ſia ſtato il precipitato, e con queſti anche l' alcali volatile concreto ricavato per mezzo dell' alcali fiſſo, oſſervandoſi una ſingolare diverſità dall' eſſere o no ridotte queſte ſoſtanze allo ſtato di cauſticità nella ſegnata precipitazione.

61. Senza ſtendermi più a lungo ſu queſto punto mi ſia ſolamente permeſſo di oſſervare, che proccurandoſi la precipitazione del ferro per mezzo di ſoſtanze volatili, tutto che cauſtiche; non è durevole la tinta azzurra, ſe ſi laſcia libero l' adito all' aria; ſuccedendo il contrario ſe ſe ne interrompa la comunicazione; e tanto è più inſtabile queſta tinta, quanto ſi fa la combinazione in vaſi di maggior apertura; dal che mi naſce il ſoſpetto, che una delle condizioni più eſſenziali alla ſolidità del-

la tinta turchina ſia la totale eſpulſione o la fiſſazione de' principj volatili (z); condizione che appunto parmi compiutamente ottenerſi per mezzo della calcinazione, poichè in virtù della eſpulſione del principio acquoſo ſi giugne al termine della neceſſaria concentrazione del flogiſto, in cui diventa inerte la naturale ſua volatilità, ed eſercita quindi la nuova qualità acquiſtata di cauſtico ſul ferro medeſimo; potendoſi a mio giudizio riguardare queſta proprietà della cauſticità come un attributo generale della materia diſſeminato con diverſa relazione tra le ſoſtanze, ed eſprimente una maſſima forza d'affinità per la tendenza invariabile d'una diſtribuzione equilibrata fra le parti componenti le ſoſtanze combinate; equilibrio che richiede neceſſariamente lo ſtato di fluidità delle medeſime; e mi farò lecito per ultimo di fare una rifleſſione, cioè che ſi conſerva ſempre l'analogia tra il flogisto ed il principio acquoſo, ſicchè è queſto alle ſoſtanze metalliche, ciò che è l'acqua eſſenziale alla natura de' ſali, mentre un'altra parte ſovrabbondante e meno ardente, che giuſtamente può denominarſi materia infiammabile, corriſponde a quella quantità d'acqua che ſi riguarda come meramente aggregativa, e da cui dipendono le riſpettive forme delle criſtallizzazioni.

62. Un punto importantiſſimo al quale debbo ora rivolgermi ſi è quello della diſſoluzione dell' oro nell' acido marino. Si ſa che il dotto Sig. *Scheele* ha annunciato ai Fiſici la poſſibilità di conferire queſta proprietà a queſt' acido diſtillandolo ſopra la calce del man-

(z) Volgare è l'oſſervazione della volatilità delle diſſoluzioni del ferro, e però ſembra aſſai plauſibile il penſare, che dall' adunamento, e ravvicinamento de' principj infiammabili non ſolo perda il flogiſto gran parte della ſua volatilità, ma che adattandoſi più eſattamente alle parti del ferro ſcemi altresì la volatilità di queſto.

ganese ; e deduce col Sig. *Bergman* essere la medesima dipendente dalla flogisticazione, che si fa di quest' acido per tal mezzo , e che lo stesso succeda nella combinazione dell' acido nitroso col marino conosciuta sotto il nome di acqua regia.

63. Volentieri consento coi medesimi su questo punto di teoria riguardo all' acido marino, perchè contro il comune sentimento credo che l' acido nitroso sia intieramente sprovvisto di flogistico, ed appunto per questo sia più d' ogni altro acido avido di rapirlo alle sostanze che ne contengono. Oserò dire anche di più, che non sia la sua natura compatibile colla combinazione della materia infiammabile, e che sia dovuta al sommo grado di concentrazione de' due principj la debole associazione del flogisto nello spirito fumante; ma che sia assai probabile che non possa a meno di seguire la reciproca loro scomposizione, quando nasca quel rapporto tra i loro principj constituenti da potersi combinare in una maniera più stretta ed aderente; di modo che non ostante l' attività sua per istrapparlo dalle materie, non gli conferisca però la facoltà di seco contrarre un' unione veramente intima ed esplorabile. Quantunque la mia scoperta confermi in parte il pensiero de' suddetti Fisici, la considerazione però dell' associamento de' vapori di quest' acido con gli alcalini nella segnata scomposizione del sale ammoniaco per la calce mi ha lasciata qualche dubbiezza intorno alla modificazione, che si vorrebbe recata esclusivamente sul flogisto. Laonde per procedere più cautamente mi sono proposto di moltiplicare gli sperimenti relativi a quest' acido. Ho pertanto combinato 4. onc. di sale ammoniaco purgato con 12. onc. d' olio di tartaro, nel quale ho disciolto 3. onc. di sale di tartaro secco in un mattraccio *A* (*fig. III. tav. II*) alto onc. 22. di Piemonte compresa la boccia del diametro d' un po' più di 3. onc., il di cui orifizio *B* fatto in forma conica combaciava esattamente

con quello d'un capitello tubulato *E* a cono roveſcio, e col becco ripiegato ad angolo, perchè poteſſe diſtenderſi con l' eſtremità ſin verſo il fondo d' un recipiente del diametro di circa 1. onc., e 5. in circa d' altezza, nel quale contenevaſi dell' acido marino allungato con acqua diſtillata, e dell' oro; ſtendevaſi poi di là un tubetto a forma d' imbuto, onde portare l' olio di tartaro nel mattraccio ſenza pericolo di ſpanderſi nel capitello. Furono diligentemente otturate tutte le aperture, e fu adattata la veſcica al tubo a chiave, di cui era guernito il recipiente; e ſi poſe il fuoco ſotto la boccia del mattraccio non eſſendo inſorta coſa alcuna prima dell' applicazione del medeſimo.

64. In un ſimile apparecchio fu combinato il ſale ammoniaco al peſo di 4. onc. con 12. di liſcivio cauſtico; ed in un altro quantità pari di ſale ammoniaco con 12. onc. di liquore ſiliceo. Nè queſto pure produſſe alcun fenomeno prima dell' applicazione del fuoco; ma all' oppoſto divenne ſpumante la miſtura del ſale col liſcivio cauſtico *(aa)*, e s' ebbe appena il tempo di chiudere, che cominciò lo ſviluppamento del gaz.

65. I riſultati della ſcompoſizione coll' olio di tartaro furono il ſolito ſviluppamento del gaz, e la formazione del ſale concreto nel primo tempo; ma divenne preſſo che floſcia la veſcica, e ſeguì l' aſſorbimento del liquore, nel quale era immerſo il becco del capitello.

66. Queſto periodo è un ſegno infallibile che non ſarà per accreſcerſi la quantità del ſale volatile concreto; ma che dalla eſpulſione del medeſimo dipende la maggior energia de' vapori, mentre diventa indiſpenſabile un continuo accreſcimento di calore a miſura che

(aa) Era fatto queſto liſcivio ſecondo il metodo del fu Sig. *Bucquet* deſcritto dal Sig *Fourcroy* nelle ſue Lezioni alla p. 264. Tom. 1.

egli ſi aduna alle pareti del vetro, per cui ſi riduce l' acqua in vapori, e ſi diſcioglie nuovamente il ſale. Queſta diſſoluzione è altresì degna d' oſſervazione, perchè ricade il liquore in iſtriſcie ſpirali con un' apparenza olioſa; dalla continuata coobazione però ſi riduce la materia allo ſtato di ſiccità, con un colore oſcuro e foſco, eſalando pochiſſimo odore d' alcali volatile dall' apparecchio aperto, come pure dal recipiente, in cui ſi contiene il liquore, nel quale ſi fa un precipitato purpureo ſporco, che tuttavia dimoſtra la diſſoluzione dell' oro, ch' è ſingolare, perchè precipitato in oro di Caſſio ſenza il concorſo dello ſtagno; ma per verità non mi è riuſcito di fondatamente aſſicurarmene, ancorchè abbia ottenuto per mezzo di una diſſoluzione di ſtagno nell' acqua regia combinata con queſto liquore una tintura turchina leggermente violacea (*bb*).

67. La ſcompoſizione poi col liſcivio cauſtico ſviluppa, come diſſi, dai primi iſtanti e ſenza fuoco quantità di gaz, diventando ſpumante la materia, la quale prende una tinta gialla, e feltrandoſi i vapori pel liquore, toſto ſi vede piena di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, cominciando a manifeſtarſi prima dell' applicazione del fuoco gonfia poi moltiſſimo la materia riſcaldandoſi col fuoco applicato, e rapido diventa lo ſviluppamento del gaz: ciò che ne rende aſſai faſtidioſa l' amminiſtrazione. Il liquore del recipiente *HH* è carico di vapori alcalini, mentre non oſtante l' eſiſtenza dello ſpirito di ſale probabilmente neutralizzato da una parte di queſti vapori, ne uſciva tuttavia fortiſſima eſalazione, ed avendo voluto ſaturare d' acqua forte

(*bb*) Più manifeſta compariſce col tempo la diſſoluzione dell' oro nell' acido del recipiente.

forte queſto liquore, fu grande la quantità, che ſe ne richieſe. Non ebbi indizio alcuno di diſſoluzione dell' oro; non ſo però ſe doveſſe ciò attribuirſi alla debolezza grande dell' acido marino contenuto nel recipiente *HH*.

68. La ſcompoſizione ottenuta dal liquore ſiliceo manifeſtò un po' di ſchiuma alle pareti del vetro prima dell' applicazione del fuoco; ma appena ſeguita la medeſima, fu aſſai impetuoſo lo ſviluppamento del gaz, e ſi diſciolſe gran parte dell' oro nel tempo dell' operazione; quindi avvenuto il ſolito aſſorbimento, per cui ho dovuto accreſcere il fuoco, i vapori che paſſavano nel recipiente vi cagionavano una notabile efferveſcenza; ciò che ſervirebbe di forte indizio, che coi primi vi foſſe l' acido marino, e ſolo alcalini foſſero quelli ſucceduti all' aſſorbimento; coſa che concorderebbe aſſai bene colle notizie correnti della ſomma elaſticità de' vapori acido marini, e che mi parrebbe dimoſtrata dalla poca forza del liquore ſuddetto, tramandando appena qualche ſentore di vapori alcali-volatili.

69. Sempre più manifeſta parendomi l' azione dell' acido marino, ho creduto giovevole di aſſicurarmene direttamente per mezzo della ſcompoſizione del ſale marino ſteſſo alla maniera di *Glaubero*, ed ho perciò eſeguita la ſcompoſizione di 2. onc. di queſto ſale ben puro, e decrepitato con 5. onc. e $\frac{1}{2}$ circa d' olio di vitriolo nell' apparecchio poc' anzi deſcritto, e colla ſola avvertenza di far cadere il ſale marino ben peſto poco per volta nell' olio di vitriolo per mezzo d' un turacciolo bucato obbliquamente, nel quale ho incaſtrato un fiaſchetto di vetro col ſale, il di cui orifizio era alquanto riſtretto, e per tal modo rimaneva eſattamente chiuſo ogni adito tra il mattraccio e l' aria eſterna

(*cc*). Veemente fu la produzione de' vapori ogni volta che percuotendo il fiaſco cadeva del ſale nell'acido: e non oſtante ogni diligenza uſata per l' aſſicurazione delle lutature, con tutto ciò or qua or là uſcivano fumi bianchi, i quali venivano però prontamente ritenuti applicandovi della cera carica di trementina; ceſſato finalmente il tumulto de' vapori, e la rapida produzione gazoſa, fu continuata l' operazione col ſoccorſo del fuoco, e condotta ſintanto che fu piena carica di fumi bianchi la parte vuota del recipiente, nel quale vi era l' oro coll' acido marino deboliſſimo.

70. In queſta operazione ſegnatamente hanno luogo rapidiſſimi e ripetuti aſſorbimenti, perchè ſi replica il vuoto ſempre che cade del ſale nell' acido, ed è queſto vuoto tanto più eſatto, quanto più lo ſcoppio de' vapori è forte e rapido; laonde non vi ſi può rimediare fuorchè traforando con un ago il buco, che ſi ſarà laſciato nel turacciolo a queſto fine, o aprendo la comunicazione, che per mezzo del medeſimo ſi ſarà ſtabilita da principio col tubo a chiave applicato alla parte ſuperiore d' una campana immerſa nell' acqua.

71. Preſe l' acido del recipiente una tinta gialla vie più carica ſino a pareggiare quella d' un belliſſimo colore d'oro; e ſcemò notabilmente la quantità dell'oro; ma non fu già così precipitoſa nè compiuta la diſſolu-

---

(*cc*) E' opportuno il far oſſervare, che per le ſperienze di queſta natura l' imbuto roveſcio, che ſta anneſſo al capitello, dee eſſere di grande altezza, e coll' orifizio eſterno coſiderabile, affinchè ſi poſſa dare una conveniente obbliquità al fiaſco, nel quale ſi mette una delle materie, ſpecialmente ſe è in forma concreta; il mio ſiſtema di tubi è per queſto effetto alto 2. in 3. oncie, e circa di un' oncia e mezza d' orifizio eſterno: ancorchè ſembri più comodo di mettere il ſale nella boccia del matraccio, e l' olio di vitriolo nel fiaſco, preferiſco ciò non oſtante di fare il contrario per non eſpormi alla quaſi infallibile rottura della boccia, facendo cadere queſto acido particolarmente concentrato ſopra una materia concreta; accidente però che non m' è mai avvenuto cogli altri acidi.

zione, come mi è avvenuto nella ſcompoſizione del ſale ammoniaco colla calce, e col vetro ſiliceo nella maniera, e colle avvertenze indicate; dalla qual differenza parmi di poter conchiudere, che quanto la calce ed il vetro cauſtico ſono materie totalmente aride e più ſemplici, ſono altrettanto avide del principio acquoſo flogiſticato, e più radicalmente ne impoveriſcono l' acido marino, di cui s' accreſce l'efficacia. Per lo contrario l' acido vitriolico ha maggior affinità colla parte infiammabile quando è più concentrata che non è nelle ſoſtanze ſuddette; dunque non tanto dalla flogiſticazione, quanto dal rapimento ſimultaneo del principio acquoſo deeſi ripetere queſta proprietà.

72. Un fenomeno coſtante, il quale ſerve a dichiarare l'eſiſtenza dell' acido marino, e perciò degno d'attenzione, ſi è l' efflореſcenza fumoſa di cui ſono principalmente ricoperte le pareti eſterne delle bocce che racchiudono un qualche liquore, nel quale egli ſi trovi o ſotto forma gazoſa, o ritenuto ſoltanto dalla ſemplice forza d'aggregazione; ſi vede pur anche la medeſima efflореſcenza intorno alle pareti interne della parte vota de' recipienti; ed è tanto più bianca, e tanto più aderente, quanto è più ſcarſa l' umidità; ella è acida e ſalſa al guſto. Ma ciò che vi è di più ſingolare ſi è, che non ſolo ſono manifeſtamente diſtinte queſte due ſenſazioni al palato, ma diſtinto è l'ardore ch' ella eccita ſulle parti nervoſe della lingua, e ſingolarmente dello ſtomaco: ſegno caratteriſtico della forte ſua cauſticità; e ſiccome ſi ſente il guſto acido e cauſtico prima del ſalino, convien dire, che ſia queſta efflореſcenza il riſultato d' una ſoſtanza ſalina con eſuberanza d' acido; e ſono tanto più diſpoſto a perſuadermene, che nelle bocce in cui ſi conſerva la ſpirito di ſale, ſe qualche poco di queſti fumi può trapelare, ſi forma al margine eſterno del collo una efflореſcenza concreta, diſtintamente ſali-forme, comechè opaca, la quale è gen-

tilissimamente figurata a forma di piccoli cespugli frascati regolarmente.

73. Ho facilmente riconosciuta la dissolubilità dell' oro dalla sola combinazione dello spirito volatile caustico coll' acido marino, purchè s' impieghino l' uno e l' altro, e principalmente il primo, in istato di massima concentrazione, benchè però ognuno di questi liquori separatamente non manifesti la menoma azione sopra questo metallo; ciò che darebbe a divedere, che l' accennata proprietà è il risultato d' una combinazione dell' acido marino con altri principj, i quali devono incontrarsi nello spirito volatile caustico.

74. Considerando però la natura di questo fluido, nel quale si trovano oltre ai principj alcalini volatili quelli ancora dell' acido marino spogliato notabilmente di umidità, e inzeppato per contrario di parti flogistiche; avuto riguardo al costante fenomeno della riferita efflorescenza, sempre che vi abbia evaporazione, ed allo sviluppamento de' fumi bianchi ogni qualvolta si promove la separazione delle parti più volatili dell' acido marino da quelle che sono più fisse; parmi ragionevole l' attribuire questa proprietà di disciogliere l' oro alle alterazioni provenienti dal difetto di principio acquoso nell' acido marino, dal quale, oltre all' accrescimento di concentrazione, viene indotta probabilmente una maggiore attenuazione, ed una differente distribuzione delle parti infiammabili, piuttosto che di riconoscerla unicamente dall' impoverimento delle stesse parti infiammabili, come si vorrebbe dai rispettabili Accademici di *Upsal*.

75. Questa efflorescenza sembrami identica co' fumi bianchi, che spande l' acido marino al suo contatto coll' aria libera, e se male non m' appongo risulta la medesima dalla svaporazione che si promove in questa circostanza d' una parte del flogisto, non altrimenti che nel gaz nitroso, e come succede all' acido sulfureo; laon-

de ſono queſti vapori per riſpetto all'acido marino quello che ſono i vapori roſſi dell'acido nitroſo conoſciuti ſotto il nome di gaz nitroſo per riſpetto a queſto acido, colla differenza che baſta l'umidità, contenuta nell'aria atmosferica, al gaz nitroſo per condenſarſi e preſentarſi ſotto forma d'acido, ed all'incontro richiedeſi maggior quantità d'umido per la condenſazione del gaz marino; il che ſembrerebbe dimoſtrare, che queſto è in uno ſtato di maggior concentrazione, ch'egli è meno aderente al principio acquoſo, e che in virtù di queſta minore affinità egli ne può contrarre un'aſſai maggiore in queſte circoſtanze col principio infiammabile; di modo che ſembrami molto meno da attribuirſi alla sflogiſticazione, che alla maggior concentrazione dell'acido marino, la proprietà ch'egli acquiſta in queſte operazioni di diſciogliere l'oro *(cc)*.

76. Queſte ſperienze dimoſtrano finalmente colla più deſiderabile evidenza, che lo ſtato di fluidità, nel quale ſi ottiene l'alcali volatile cauſtico per mezzo della calce, non dipende unicamente dalla quantità dell'acqua impiegata nel proceſſo; mentre ſe queſta foſſe di ciò la

(cc) Dalla aderenza del principio acquoſo dell'acido del nitro, maggiore che non è nel marino, nel vitriolico, e nel vegetale medeſimo, parmi che ſi poſſa ripetere quella che ſi manifeſta nel colore de' fumi, che eſalano, ſembrandomi la tinta roſſa de' vapori nitroſi un ſegno manifeſto dello ſtato di concentrazione della materia infiammabile, la quale tende a dileguarſi colla volatilizzazione, afferrando con avidità l'umido ſparſo nell'atmosfera. Le calci metalliche altresì non acquiſtano il colore roſſo, ſe non dopo una grandiſſima diſſipazione del principio acquoſo, dalla quale dipende quella d'una proporzionata quantità di flogiſto; vale a dire di quella che non ha avuto tempo di combinarſi colle parti metalliche fiſſe, e di traſformarſi col carattere di cauſticità. Per altro il gaz marino prodotto dalla combinazione di queſt'acido col vitriolico, il quale è sommamente elaſtico, non conferiſce almeno ſenſibilmente la proprietà diſſolvente dell'oro all'acido marino, entro il quale ſi fa feltrare per mezzo de' ſopradeſcritti apparecchi; laonde ſempre meno probabile diventa l'opinione che aſcrive la diſſolubilità alla ſola sflogiſticazione.

cagione esclusiva, non avrei dovuto ottenere che pochissima quantità d'alcali volatile concreto dalle testè riferite scomposizioni del sale ammoniaco coll' olio di tartaro, col liscivio caustico, e col liquore siliceo; mentre il rapporto dell' umidità, che si trovava in questi processi, colle parti concrete era di gran lunga superiore all' acqua, che soglio impiegare nella combinazione di questo sale colla calce viva; onde parmi attribuibile in gran parte alla differenza dell' azione del principio caustico contenuto nella calce da quella, che ha luogo nell' alcali fisso sul flogisto disseminato nel sale; di modo che la calce viva alterando con maggior energia questo principio, e ritenendone una più notabile quantità l' avanzo che passa associato coi vapori dell' acido, ripiglia lo stato, e il carattere di materia infiammabile, cioè si carica di nuovo delle parti acquose state espulse, e col mezzo delle acide passando ad uno stato saponaceo, resta agevolata la loro dissoluzione nell' acqua.

77. Questa teoria concilia ottimamente l' effetto, che si ottiene dalle sostanze metalliche, o dalle loro calci combinate collo stesso sale ammoniaco, senza che s' incontri la ripugnante contraddizione, che presenta quella del Sig. *Black*, nella quale si vedrebbe la privazione, e l' abbondanza d' uno stesso principio (cioè del gaz mefitico) produrre un medesimo effetto; poichè le parti metalliche, e specialmente le calci nell' impadronirsi d'una grandissima parte della materia infiammabile contenuta nel sale ammoniaco favoriscono le espulsioni dell'acqua di cristallizzazione del sale medesimo, non avendo alcuna disposizione a seco combinarsi; e mentre proccurano la dissoluzione dell'alcali volatile si fa altresì l'unione delle parti acide sommamente concentrate colle parti metalliche; di fatto si ottiene il piombo corneo, se siasi impiegata la calce di piombo; un zafferano marziale, se sia stata usata la limatura di ferro, della quale si volatilizza però una parte; e si osserva che la scom-

posizione riesce sempre molto imperfetta colle sostanze sotto forma metallica, e per contrario molto più compiuta colle calci; e che per ultimo lo spirito volatile caustico che si raccoglie è sommamente penetrante, ed effervescente ad un tempo con quello che si ottiene colla calce viva nel modo da me divisato.

78. Non debbo abbandonare questo soggetto senza riferire ciò, che ho osservato intorno ad un metodo, che trovasi descritto alla p. 282. del tom. 1.° delle Lezioni di Chimica del Sig. *Fourcroy* sotto l'autorità del dotto Accademico Sig. *Bucquet*. Con la scorta di numerose sperienze s'era egli assicurato, che la miglior proporzione da seguire per il processo dello spirito volatile caustico era quella di una parte e mezza di calce contro una di sale ammoniaco; soggiugnendo, che la calce estinta all'aria scompone questo sale non altrimenti che la calce viva *(dd)*: asserzioni affatto contrarie al sentimento unanime de' Fisici, e segnatamente contraddittorie alle sperienze ingegnosissime del Sig. *Duhamel*, e se m'è permesso farne menzione, anche alle mie stampate nel tom. 2.° degli Atti dell'Accademia di Torino. Tuttavia non dovendosi rigettare fatti positivi senza sicuro fondamento, ho creduto di doverne fare sperimento.

79. Ho pertanto meschiato accuratamente 18. onc. di calce ben viva e grossamente pesta con 12. onc. di sale ammoniaco pestato minutamente, e fu questa mistura introdotta con prestezza nella storta *A* di vetro (*fig. I. II. tav. I. II.*), il cui orifizio introdotto nel tubo di comunicazione *CC* è stato diligentemente lutato. Pochissime furono le bolle, che attraversarono l'acqua del

---

(*dd*) Il Sig. *Bucquet* si è inoltre assicurato con molte esperienze, che non vi vuole ordinariamente, che una parte e mezza di calce, invece di tre che solevano impiegarsi, per iscomporre una parte di sal ammoniaco. La calce estinta all'aria scompone questo sale ugualmente che la calce viva.

recipiente , che comunicava col pallone *X* , ed erano lontane le une dalle altre. Non vedendo comparire addensamento di vapori fu messo il fuoco sotto il bagno di sabbia , il quale essendo assai riscaldato diede luogo alla distillazione debolissima di qualche goccia di liquore, che di tanto in tanto si vedeva cadere dall'orifizio del tubo *CC* nel pallone *X*. Quando ad un tratto , cresciuta l' intensità del calore, ho veduto succedersi sempre più prossimamente le gocce di liquore; e siccome era il pallone tubulato inferiormente per comunicare con una boccia di vetro *E*, nella quale precipitava questo liquore, cominciò a formarsi al margine del tubulamento una concrezione saliforme, la quale andò crescendo perpendicolarmente in grossezza di circa 2. linee di diametro in forma di stalattite, e si vedeva il fondo del recipiente pieno di minuti pezzi di questa sostanza concreta.

80. Fu l' operazione molto più lunga delle conosciute finora, e non ebbi gran difficoltà a riconoscere, che erasi fusa la storta, come aveva sospettato dall' osservata accelerazione dello sviluppamento de' vapori; indotto a formare questo sospetto dall' essermi accaduto altra volta di ottenere del sale ammoniaco fluido invece di fiori , distillando questo sale entro a cucurbite di creta guernite di capitello di vetro, o anche in cucurbite di vetro, nelle quali erasi fatta qualche accidentale fessura nel tempo dell' operazione; essendomi occorso altresì di veder fuse le storte prima dell' intiera operazione , allorchè per moltiplicare la superficie della materia, ed impedirne l' eccessivo addensamento ho mescolato dell' arena colla calce , ed il sale ammoniaco . Laonde cessa ogni singolarità ne' fenomeni di questo processo, da che si riscontra stabilita la comunicazione tra la calce, il sale, l' arena del bagno, e conseguentemente coll' aria esterna.

81. Il seguente sperimento somministra finalmente una prova convincente dell' esclusione del principio generalmente

mente adottato per ispiegare i fenomeni di questa scomposizione; quantunque ella sia assai uniforme a quella del Sig. *Bucquet*, credo tuttavia di dover dare la preferenza a ciò, che fu da me fatto, perchè forma in 1.° luogo un anello nella catena delle mie prove, ed in 2.° luogo perchè ho usata ogni più scrupolosa diligenza per escludere l' influenza dell' acqua nell' apparecchio, acciò che non rimanesse equivoca l'azione che risulterebbe del gaz sopra la calce viva. Ho dunque messo della calce viva polverizzata sopra un setaccio, e l' ho sospeso in mezzo ad una gran campana di cristallo agglutinata con cera molle ad un piattellino, che si adattava per mezzo d'un tubo a chiave alla macchina pneumatica, ond' estraervi l' aria, e quindi riempierla d' aria fissa prodotta dalla combinazione del sale di tartaro coll' acido vitriolico, e feltrata entro ad un tubo pieno di sale di tartaro ben secco prima di passare nelle vesciche, in cui veniva raccolta pel fine suddetto.

82. Un tubo ricurvo con entro argento vivo serviva d' indice a questo apparecchio, ed ogni volta che scorgevasi diminuita l'elasticità del gaz mefitico, se ne somministrava una nuova quantità. Benchè non possa esattamente dire quanto tempo sia rimasta esposta questa calce all' atmosfera gazosa, posso però assicurare, che vi fu dimenticata lungo tempo al di là di quello che ne ritenne in circostanze somiglianti il Sig. *Bucquet*. Non ho però trovato gran variazione di peso nella medesima; ma la superficie mi parve meno arida, ed il gaz avea fatta una notabile impressione sul piattellino a segno che stimerei prudente, dovendo ripetere sì fatte sperienze, di rivestire il medesimo di qualche inverniciatura, quale è quella che si usa dagl' Incisori in rame.

83. Questa calce combinata con un terzo del suo peso di sale ammoniaco, e di acqua in quantità sufficiente somministrò gli stessi prodotti, che ho ottenuto da

altrettanta calce pesta della stessa qualità, che aveva custodito in un recipiente chiuso, perchè non avesse comunicazione coll' aria; erano perciò ineffervescenti i liquori, e non mi fu possibile di riconoscere il più piccolo segnale, che questa calce avesse operata la scomposizione del sale ammoniaco in qualche maniera analoga a quella delle terre calcaree. Il Sig. *Bucquet* ha altresì osservato questa perfetta uniformità, non altrimenti che colla crosta saliforme dell' acqua di calce, e colla calce estinta da circa sei anni, e finalmente colla calce lavata: di modo che sembrami fuori d' ogni sospetto la prova, che ne deduco, della niuna influenza del gaz mefitico in queste scomposizioni.

84. I risultati della coobazione dello spirito volatile caustico sopra la calce viva riferiti al §. 21., ed avvalorati da quelli dello stesso liquore sulla pietra caustica, sopra il vetro siliceo, sembrerebbero dimostrare, che le effervescenze non altrimenti che le alterazioni recate dalla calce al sale ammoniaco, delle quali s' è fatta menzione al §. 34., fossero dovute al solo impoverimento del principio acquoso di queste sostanze; ma essendomi assicurato, che dall' aggiunta che si fa dell' acqua distillata a queste materie non risulta il menomo movimento, il quale possa veramente indicare un principio di vera effervescenza, parmi di essere sempre più fondato nel conchiudere, che non debbono attribuirsi al solo difetto di questo principio i mentovati fenomeni, ma che dipendono veramente dall' azione, e reazione de' principj constituenti le sostanze, le quali scomposte reciprocamente somministrano nuovi prodotti; e quanto maggiore sarà la forza originale di contatto tra i principj, che compongono ciascheduna sostanza, tanto più cospicui risulteranno gli effetti nello sforzo energico, che mutuamente si farà per una distribuzione equilibrata entro la massa totale; dove che sminuita notabilmente l' aderenza de' principj più volatili, se ne fa-

rà una diſſipazione proporzionata all'antagoniſmo delle forze ſuddette. Le diviſate ſoſtanze cauſtiche ancorchè peſtate non producono finalmente il menomo moto di efferveſcenza collo ſpirito di vino nè coll' olio di tartaro. Siccome però il principio acquoſo è il veicolo, che favoriſce la diſtribuzione, e l'equilibrio tra i principj conſtituenti; così più evidente appariſce non ſolo la neceſſità della reſtituzione del medeſimo; ma dalla eſpulſione ſi può eziandio fondatamente ripetere l' origine de' ſin qui riferiti effetti.

85. Ravvicinando pertanto le già fatte oſſervazioni, ſembrami di avere tutto il fondamento di conchiudere, che il gaz ammoniacale non è altro che un inzeppamento dell' aria comune eſpulſa dalle parti acide flogiſtiche alcali volatili, e di qualche piccola porzione della terra calcarea più tenue, diſſeminate tra le parti acquoſe ridotte in vapori dal calore; ciò che ſempre più convince dell' inſuſſiſtenza della teoria dipendente dalla privazione d' un principio pneumatico per dedurre l' inefferveſcenza delle materie cauſtiche cogli acidi, e della coſtante fluidità, e cauſticità dello ſpirito volatile cauſtico.

86. Non ſarà forſe eſtraneo al mio oggetto di notare alcune differenze importanti, che ſi trovano tra l' alcali volatile concreto, e l' alcali volatile cauſtico, o per meglio dire ſpirito volatile prodotto dalla calce: nè ſarà inutile l' oſſervare prima d' ogni coſa, che l'alcali fiſſo e la creta non eſſendo materie così ſemplici e ridotte ad uno ſtato di eſtrema aridità, quanto lo è la calce, da queſto difetto appunto totale di principj di diverſa natura ſi dee ripetere la perfetta inazione di queſta ſopra le ſoſtanze compoſte, quando non ſia prima caricata d' altro principio ſemplice, fra' quali domina ſempre l' acquoſo. In queſte circoſtanze diventa poi l' azione ſua d' una energia ſuperiore a quella d'altre ſoſtanze meno ſemplici; e quanto ſi dimoſtra iner-

te, ed incapace alla ſcompoſizione del ſale ammoniaco, allor quando è nello ſtato di maſſima parità, altrettanto efficacemente diſcioglie e ſcompone queſto ſale, ogni volta che carico di principio acquoſo dà anſa alla calce, ond' eſercitare la ſua cauſticità ſopra la materia infiammabile nel medeſimo contenuta; e da queſta originale operazione ſuccedendo il rapido indebolimento della forza di contatto tra l' acido, e l' alcali volatile, ſi riduce in gran parte l' acido ſimultaneamente ſotto forma gazoſa per la ſua combinazione eſtemporanea colle parti flogiſtiche, alle quali imprime un carattere ſaponaceo, ed eſtricandoſi in vapori coll' alcali volatile ſi ſcioglie entro una parte notabile dell' acqua impiegata, e la invola e rapiſce con sè.

87. Laonde non è ſtrano, che ſia in queſta ſcompoſizione neceſſaria l' acqua, ſenza che ſe ne richieda per quella che ſi fa coll' alcali fiſſo, e colla creta; e parmi altresì di poter dedurre in 1.° luogo, che la reciprocità dell' azione di varie ſoſtanze ſarà in ragione della moltitudine de' principj conſtituenti, di natura tra di loro differente; e però in 2.° luogo quanto più s' accoſteranno allo ſtato di perfetta omogeneità, altrettanto maggiore ſarà la difficoltà che ſi avrà a ſuperare per alterarle, e verrà riſtretta a principj, e parimenti ſemplici, la facoltà di agire ſopra le medeſime; e potrà perciò in 3.° luogo riguardarſi queſta reſiſtenza alla ſcompoſizione come una miſura del grado di ſemplicità di ciaſcuna ſoſtanza, e ſervirà a rilevare la forza di contatto tra le ſue parti conſtituenti.

88. L' alcali volatile concreto acquiſta un accreſcimento di peſo maggiore di quello che fa lo ſpirito volatile, ed è altrettanto diſpoſto, anzi debbo dire aſſai più, a caricarſi del ſuo intermezzo, di quello che ſia lo ſpirito volatile; di fatto ripetendo la coobazione d' una data quantità d' alcali volatile ſopra nuovo alcali

fiſſo, creſce di peſo il prodotto (*ee*); ed al contrario va ſempre ſcemando quello dello ſpirito volatile ſopra nuova calce ben viva.

89. Non è così penetrante nè cauſtico l' alcali volatile concreto, come lo è lo ſpirito volatile tratto dalla calce, e continua ad eſſere efferveſcente cogli acidi quantunque ſciolto nell' acqua; e per contrario molto più ſtimolante è lo ſpirito volatile, e diventa ineffervefcente quando ſi trova diffuſo in conveniente quantità d' acqua.

90. L' alcali volatile concreto non è infiammabile quantunque ridotto in vapori anche coll' azione del fuoco, ed infiammabile ſi riſcontra lo ſpirito volatile cauſtico, come già è ſtato riferito dal celebre Sig. *Cigna* mio Amico, e Collega nell' eccellente ſuo Opuſcolo: *de cauſa extinctionis flammæ, & animalium in aere intercluſorum*, ſtampato nel 2.° vol. degli *Atti dell' Accademia di Torino* per gli anni 1760. 1761. p. 194. §. 40. ſuccedendo però in queſto una ſingolare anomalia, mentre dipende l' infiammabilità da un certo rapporto tra i principj dello ſpirito volatile, e la quantità dell' acqua, nella quale ſi trovano diſtribuiti; avendo più volte oſſervato, che lo ſpirito volatile ſommamente concentrato non è ſuſcettibile d' infiammazione, almeno in quelle ſteſſe capacità chiuſe, nelle quali diventa infiammabile, diluendolo ſolamente con una data quantità di

(*ee*) Ho ripetuta quattro volte queſta coobazione, e ſempre l' alcali volatile ricavato ſi è accreſciuto di peſo: ſe aveſſi avuto ozio avrei proccurato di aſſicurarmi del limite, cui può eſtenderſi queſt' aumento; ma intanto mi ſia permeſſo di oſſervare che ſuccede lo ſteſſo come del ſublimato corroſivo col mercurio, il quale va caricandoſi di queſta ſoſtanza metallica, com' è a tutti noto; e però ſembra dovuto alla preſenza dell' acido marino contenuto in queſte materie il ſucceſſivo rapimento di queſte ſoſtanze.

acqua diſtillata (*ff*). Egli è però altresì vero che lo ſteſſo ſpirito volatile riconoſciuto infiammabile entro grandi capacità o non s' infiamma, o a ſtento può infiammarſi entro capacità meno alte e meno ſpazioſe; non dovendo neppure ommettere di riferire che in una campana, nella quale i vapori d' uno ſpirito volatile cauſtico concentrato non poſſono eſſere infiammati dall' introduzione d' un cerino acceſo pel buco praticato nel piattellino, ſul quale ella s' appoggia, ſe ſi apre la comunicazione ſuperiore della medeſima, e vi ſi preſenti un altro cerino parimenti acceſo, s' infiamma la corrente de' vapori; e finalmente ſuccede non di rado, che i rimanenti nella campana ſteſſa prendano fuoco dalla fiamma inferiore. Dal che parmi poterſi raccogliere, che il troppo ravvicinamento delle parti infiammabili ſia nocevole alla ſteſſa infiammabilità, e perciò dipenda la proprietà dell' infiammazione piuttoſto dalla maniera d' eſſere, che dalla quantità della materia infiammabile, come già ho oſſervato. Siccome però in queſte circoſtanze ſpegneſi la fiamma del cerino nell' atto della ſua introduzione, anche dopo alcuni momenti della libera comunicazione de' vapori alcali volatili coll' aria comune, ſembra dimoſtrare queſto effetto, che l' ecceſſiva condenſazione del flogiſto riduca queſti vapori allo ſtato mofetico.

91. Queſta oſſervazione accoſtata a quelle che ſono riportate dal Sig. *Prieſtley* nella copioſa ſua raccolta di ſperimenti ſulle diverſe ſpecie d' aria, e ſegnatamente nella terza Sezione della prima Parte, e nella quinta della ſeconda Parte del primo Volume, eccita un ſon-

(*ff*) Coſtante oſſervazione (della quale mi verrà forſe in acconcio di far uſo in progreſſo) ſi è, che tra il grado d' infiammabilità e quelli delle oppoſte metificità, ſingolarmente in quella parte, ove ha luogo una ſomma concentrazione, la fiamma riceve uno ſtraordinario allungamento, e s' ingroſſa notabilmente nell' altra.

dato ſoſpetto, che il gaz infiammabile poſſa riſolverſi unicamente in gaz mefitico tanto per un eccesſo di concentrazione delle parti flogiſtiche, quanto per una ſoverchia loro aſſociazione col principio acquoſo; onde ſembrerebbe poſſibile che un gaz mefitico per difetto d' umidità poteſſe paſſare all' infiammabilità, e quindi di nuovo al mefitiſmo mediante una proccurata combinazione di parti acquoſe, e viceverſa.

92. Dall' aſſeveranza poi di queſto inſtancabile Scrittore, che il gaz infiammabile prima di paſſare allo ſtato mefitico ſi riduca al caſo di ſervire alla conſervazione della fiamma, ſembra naturale il dedurre la confermazione di quanto ho eſpoſto intorno alla natura di queſti fluidi aeriformi; di modo che il rapporto di quantità che trovaſi tra' principj volatili, de' quali s' imbevono le parti dell' aria contemporaneamente eſpulſe, coſtituiſce le varietà d' una medeſima ſpecie; e l' eſcluſione o la ſoſtituzione di alcuni principj di diverſa natura ed indole coſtituiſce la differenza ne' generi di queſti fluidi aeriformi; così dall' aſſociazione del flogiſto ſtrappato alle materie infiammabili ſi raccoglie un gaz infiammabile, perchè appunto nelle ſoſtanze metalliche ſono le parti infiammabili in uno ſtato di maſſima concentrazione, e di vero flogiſto, il quale, come ho oſſervato, è alterabile da due cauſe affatto oppoſte; e forſe per ragione appunto della eccesſiva concentrazione e volatilità, e della poca aderenza non ſi può ottenere infiammabile il gaz prodotto dall' acido nitroſo; mefitico per contrario ſi ottiene il gaz dalle terre, e dalle ſoſtanze ſaline, probabilmente in virtù della ſeconda circoſtanza rilevata, cioè perchè la materia infiammabile involta ne' ſali e nelle terre trovaſi ſempre più carica di principj acquoſi, e non mai in iſtato di flogiſto; laonde nel caſo de' metalli i vapori acquoſi che s' inalzano dalla ſcompoſizione degli acidi proccurano l' infiammabilità alle parti del flogiſto, che in queſto ſtato non ſarebbero capaci d' infiammazio-

ne; e nel caſo delle ſoſtanze ſaline, o terree i vapori che ſi elevano ſono in una proporzione troppo grande, perchè poſſa aver luogo queſta proprietà nelle parti infiammabili già ſaziate di principio acquoſo.

93. Nè è fuori di probabilità il conghietturare, che in queſti gaz non ſegua ſcompoſizione degli acidi, o non ſia almeno così intima, come avviene colle ſoſtanze metalliche, e ad ogni modo affatto contrarj ſono gli effetti di queſte combinazioni. Di fatto ſe nel tempo che ſi fa del gaz infiammabile coll' acido vitriolico ſul ferro, ſi proccuri l' aſſociamento d' un alcali fiſſo, come dell' olio di tartaro, non ſolo ceſſa la produzione del gaz infiammabile, ma ſi fa un repentino, e coſpicuo aſſorbimento, e molto più ſenſibilmente ſi manifeſta la parte che ha il principio acquoſo in queſte produzioni gazoſe; laonde il difetto e l' eceſſo del principio acquoſo toglieranno l' infiammabilità, e ſarà affatto oppoſto il mezzo da tentarſi, onde rendere infiammabili i gaz mefitici, dovendo proccurarſi la concentrazione di quelli che abbondano di principio acquoſo, e per contrario diluirſi quelli ne' quali vi è ecceſſo di concentrazione delle parti infiammabili. Uno de' ſegni caratteriſtici di queſti è l' inſtantanea, e totale eſtinzione della fiamma al ſolo accoſtarla al gaz; mentre è meno pronta, e men compiuta ne' gaz mefitici vaporoſi.

94. Quantunque ſia vero, che ſeguono alterazioni negli acidi dietro alla loro combinazione con altre materie, ſulle quali eſercitano le loro proprietà, non potrei però concedere che generalmente ne riſultaſſe un acido aſſolutamente identico; ancorchè ſu le prime anch' io aveſſi formato lo ſteſſo concetto. Il ſentimento del celebre Sig. *Bergman*, e l' ingegnoſo lavoro del dottiſſimo Sig. Cav. *Landriani* ſono per verità di troppo gran peſo, perchè poſſa diſſimularmi il merito de' loro ingegnoſi argomenti; ma appunto perchè l' apparenza e certi caratteri generali ſembrano ſavorire queſta opinione,
lio

ho creduto di doverne fare l'oggetto d'una ſcrupoloſa ricerca, e mi è riſultato che ciaſcuno di queſti fluidi non ſolo conſerva veſtigj deciſivi, e caratteriſtici dell' acido, che ha ſervito al loro ſviluppamento, ma dimoſtrano alterazioni diverſe e dipendenti dalle ſoſtanze paſſive che vi hanno dato luogo.

95. Troppo vaſta ſarebbe la materia, e troppo forſe mi ſono già fatto lecito di dilungarmi, sì che non mi ſtenderò più oltre per ora ſu queſto punto, baſtandomi d'indicare il mezzo, che mi è riuſcito più acconciamente per queſte eſplorazioni, il quale conſiſte nell'acidulare quanto più ſi può dell'acqua diſtillata colla filtrazione de' gaz, e quindi valerſene ſpezialmente ſopra de' ſali metallici *(gg)*.

96. Mi reſta per ultimo da oſſervare che molte ineſattezze, nelle quali poſſono aver inciampato alcuni Fiſici, dipendono dalla inſufficienza de' mezzi creduti coercenti, e che generalmente s'impiegano per ritenere queſti fluidi elaſtici: avviſo da me dato, riguardo all'acqua ſpecialmente, per determinare l'aſſorbimento ſino dall' anno 1759. ſulle premure fattemene dal medeſimo celebre Sig. *Hales*, e che trovaſi nel 2.° vol. degli Atti dell' Accademia di Torino per gli anni 1760. e 1761. alla p. 133, e ſeguenti, e che ho creduto di dover confidenzialmente rinnovare a qualche valente Fiſico, col quale ebbi a trattare di queſti fluidi; ragion dunque vuole che ſi cominci dall'oſſervare, che non può farſi operazione alcuna in vaſi chiuſi ſenza che ſegua una dilatazione più o meno riguardevole dell'aria contenuta nelle capacità, e conſeguentemente un traſporto del-

---

(gg) Tra' ſali metallici credo di dover annoverare le calci metalliche fatte cogli acidi, e queſte principalmente ſono atte a dimoſtrare le accennate differenze.

la medesima nelle parti più distanti dalla causa di queste rarefazioni, di modo che non proccurandosi una circolazione d' aria per restituire liberamente la quantità che ne' è espulsa, e che non può retrocedere per causa de' mezzi coercenti, che si sono impiegati, non può a meno di succedere che riesca minore la quantità d'aria di quello che era nelle capacità principali, nelle quali si fanno le operazioni: ora l'aria espulsa può giugnere fino ad un certo grado di condensazione, e farsi luogo per mezzo della compressione dell' acqua; ma ogni qualvolta segua questa composizione di forze, cioè del peso dell' aria con quello d'una quantità d' acqua, per istabilire l'equilibrio tra l'aria esterna, e l'atmosfera contenuta dalle capacità, sempre succede un' espulsione progressiva dell' aria o del fluido elastico alla superficie dell' acqua che supera il livello in ragione della superficie medesima, e probabilmente del maggiore inalzamento dell' acqua, sintanto che ripigli la medesima il suo livello; così anderà scarcerandosi l' aria contenuta nell' acqua entro la campana, mentre dalla superficie esterna ne succhierà dall' atmosfera se l'acqua entro la campana si trovi inalzata sopra il livello; e per contrario si svilupperà dalla superficie esterna per passare nell' atmosfera libera, allorchè per la condensazione del fluido contenuto sarà nella campana l' acqua sotto il livello, e anderà assorbendo quest' acqua altrettanto fluido, quanta è la dissipazione che si fa dall' esterna superficie.

97. Non ho fin qui considerato che la rarefazione dell' aria in una parte dell' apparecchio, ed il suo addensamento nell' altra; ma se si rifletta alla complicazione di cause che debbono rendere difettosi questi apparecchj, si vedrà colla maggior evidenza l' impossibilità di rimediarvi per la moltitudine delle incognite, ond' è intrecciato il problema; ed un abbozzo alla sfuggita basterà, come spero, a convincere di questa verità. Risulta egli dall' esame de' medesimi, e dalle operazioni

che vi si fanno per lo sviluppamento de' diversi gaz, i quali sono sempre prodotti o dalle effervescenze senza sussidio di fuoco, o dalle scomposizioni risultanti dall' azione del medesimo, o finalmente dal concorso di entrambi questi mezzi. Oltre il di già osservato sbilanciamento di equilibrio nelle parti dell' aria contenuta nelle capacità, dee per necessità risultare dalle accennate operazioni uno sviluppamento o di esalazioni in istato di siccità, o di vapori più o meno pregni d' umido. Se saranno in uno stato di perfetta privazione di principio acquoso, è naturale che involeranno l' umidità, che accompagna la parte dell' aria contenuta nelle stesse capacità, ed a quel punto l' aria stessa spogliata dell' umidità sua essenziale per essere respirabile, dee di necessità soffrire alterazioni più o meno essenziali nelle sue proprietà; e perciò si può fondatamente far quistione, se non sieno alterate le leggi ordinarie e cognite, e per lo meno, se non sia notabilmente variata la sua elasticità; e se continui ad essere atta alla conservazione della fiamma.

98. Se al contrario sono le esalazioni accompagnate da vapori umidi, quale sarà la quantità di cui potranno caricarsi le parti dell' aria in questo stato di dilatazione? quali modificazioni riceveranno da questo accoppiamento tanto nell' essenza loro, quanto nelle loro proprietà? Saranno le une e le altre della stessa natura ed indole, tanto le umide quanto le aride? In somma chi potrà lusingarsi di giugnere a determinare individuatamente il rapporto, che vi può essere tra la forza di tanti principj differenti più sospettati che noti, onde fissare con qualche esattezza il grado di forza del rispettivo loro contatto?

99. Se poi si rifletta alle differenze, ed alle indispensabili alterazioni, che debbono essere prodotte dal solo combaciamento di questi fluidi colla superficie dell' acqua, o dalla feltrazione loro più o meno cospicua en-

tro la medesima, diffondendovisi per mezzo d' una più o meno violenta agitazione, nessuno potrà dissimularsi le molte dubbietà, in cui dovrà involgersi, non potendo assicurarsi nè della qualità, nè della quantità de' principj che saranno stati ritenuti per mezzo della dissoluzione, o di nuove combinazioni; e niente meno sospette potranno riuscire le induzioni, che si sarebbero coll' uso dell' argento vivo medesimo, poichè in molte circostanze può dimostrarsi insufficiente al proposto oggetto di servire di mezzo veramente coercitivo, venendo visibilmente alterato non solo nella superficie comunicante colle capacità, ma eziandio lungo le colonne rinchiuse ne' tubi barometrici; ed in alcune altre essendo evidente l' alterazione prodotta esclusivamente sulla parte comunicante coll' atmosfera.

100. La natura di queste discussioni richiederebbe una serie di rigorosi sperimenti per ricevere quel grado di evidenza, che merita l' importanza del soggetto, e che volentieri avrei presentato come un giusto tributo alla nuova *Società Italiana*, se un giusto sentimento di riverente stima per tanti rispettabili Accademici non mi trattenesse dall' eccedere i confini di un Opuscolo, come già ho detto, forse anche troppo diffuso.

Fig. II
Fig. I
A
B
C
G
L
R
I
H
X
K
Y
E
O
T
P

Fig. I

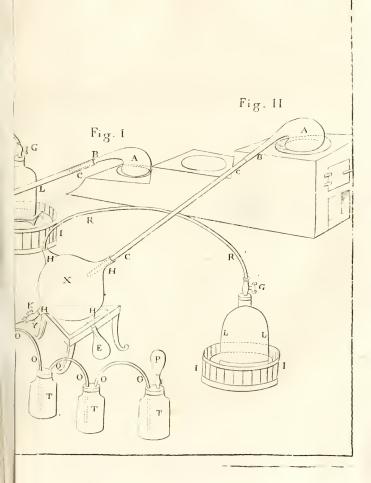
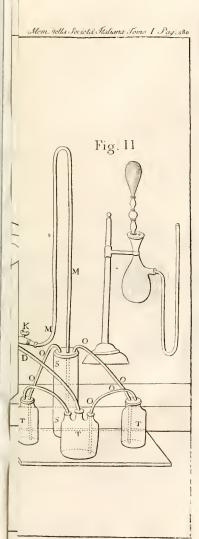
Fig. II

T I

E

nache

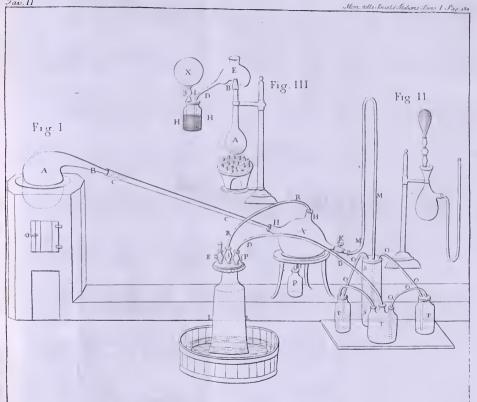
Regio
sità di

che.

miranda
rà gio-
rigene-
la vec-
prima
izione
ie ter-
lo che
a uno

Tavo-
ie per
esimo.

Fig. I
A
B
C
C
Fig. III
X
E
B
I
D
H
H
A
Fig II
R
R
H
H
X
D
D
E
P
P
K
M
M
S
S
O
O
O
O
O
O
T
T
T
L
L

RISULTATI

DI ESPERIENZE

Sopra la Riproduzione della Testa nelle Lumache terrestri (*a*)

Del Sig. Ab. Lazaro Spallanzani Regio Professore di Storia naturale nell' Università di Pavia.

Articolo I.

Descrizione anatomica della testa delle Lumache.

A Persuadere più facilmente di questa ammiranda riproduzione il dotto e curioso Lettore sarà giovevolissimo il far vedere che la novella testa rigenerata non differisce punto ne' suoi componenti dalla vecchia recisa. Ma ciò conseguir non possiamo se prima col lume dell' anatomia non venghiamo in cognizione delle parti onde è formata la testa delle lumache terrestri, la quale trovasi assai più composta di quello che a prima giunta si sarebbe creduto. Ogni qualvolta uno

(*a*) La presente Memoria è tratta dal mio Libro sopra le *Riproduzioni Animali*, che a quest' ora sarebbe già pubblicato, se non restassero da ultimarsi alcune Tavole di Figure troppo necessarie per la piena intelligenza del medesimo.

di questi rettili (*b*) è quanto lo può essere fuori del guscio nativo, mette in vista tutta la lunghezza del collo, e del capo, dal quale ultimo spuntano nella parte d'avanti le quattro corna, cioè a dire le due maggiori per di sopra, e le due minori per di sotto; le quali quattro corna, allungate pienamente che sieno, finiscono in un globettino portante nelle due maggiori un punto nero che comunemente si crede esser l'occhio. Al di sotto immediatamente delle due corna minori appariscono i labbri, che quando si aprono, e che mangia l'animale, manifestano i piccioli denti. Coteste parti, compreso anche il collo, sono tutte quante seminate di picciole glandolose granella somiglianti in certo modo a quelle d'una fragola, o fatte, come diremmo noi, a *sagrino*. Solamente questo sagrino alle corna, e alle labbra è più fino che su la testa, e sul collo. Per l'opposito la parte inferiore della lumaca non è niente granellosa, ma affatto liscia, e sfuggevole, quella cioè che da alcuni Naturalisti non impropriamente chiamasi *piede*, per appoggiarsi ad essa l'animale quando si strascica. E questo è ciò che può espiare la vista senza il soccorso del coltello anatomico, al quale però siamo astretti di ricorrere, volendo noi penetrare l'interno della testa, che è l'oggetto delle nostre ricerche. Ma noi non possiamo notomizzare la lumaca viva. Al solo lievemente toccarla, di allungata che era, si contrae tutta, si ritira precipitosamente nella sua casetta, e vi si nasconde. Che se rompasi essa casetta per esaminarla, il capo, e le corna trovansi allo-

(*b*) Chieggo perdono ai Signori Linneani se non mi sento disposto di annoverar le lumache tra i *Vermi*, siccome vuole il loro venerato Maestro. Non è di questo luogo il mostrare quanto siffatto pensamento poco si accorda con la Natura. Piuttosto cadrà il destro di farlo in un mio scritto omai compiuto, nel quale tra l'altre cose si ventilerà se alla Storia Naturale sieno stati più svantaggiosi che utili i moderni Sistematici, e Nomenclatori.

ra rannicchiate dentro del corpo in maniera, che riesce difficilissimo l' esplorarle come conviene. Il mezzo più acconcio a conseguire l' intento si è quello che suggerito viene dal grande *Swammerdamio* nell' eccellente suo Trattatello su le lumache, voglio dire di farle morire lentamente dentro dell' acqua. Allora dunque si trovano quasi sempre col collo, e col capo fuori interamente del guscio, e spuntano altresì più o meno le corna. Tagliata longitudinalmente per di sopra in tal vantaggiosa situazione con sottili affilate forficette la pelle del capo, si presenta subito all' occhio il cervello della lumaca diviso in due lobi, i quali nella parte inferiore danno origine alla midolla allungata, e nella superiore a dieci nervi, quattro de' quali s' impiantano dentro alle quattro corna, ed estendonsi fino alla loro sommità, e gli altri sei vanno a mettere, e a diramarsi in varie parti del capo, come ai muscoli della pelle, alla bocca, alla gola, al palato.

Lo *Swammerdamio* è stato il primo, per quanto io mi sappia, ad osservare che il cervello della lumaca è mobile; e la sua mobilità nasce in grazia di alcuni muscoli, cui resta attaccato, mercè i quali ora si accosta alle parti anteriori della testa, ora da esse allontanasi, secondo i diversi movimenti del corpo. Quando poi la lumaca è sporta assai bene del nicchio, poggia il cervello ordinariamente sopra l' esofago.

Dicea più sopra che quel punto nero, che trapela alla cima delle corna maggiori, viene comunemente creduto esser l' occhio della lumaca; e tal credenza a me sembra ragionevolissima. Di fatto l' inarrivabile sagacità del più volte nominato Naturalista Ollandese, secondata dal vantaggioso mezzo di buone lenti, ha saputo trovare in questo punto le parti più principali che lo caratterizzano per l' organo della visione, cioè a dire l' uvea, i tre umori, e l' aracnoide involgente il cristallino. A me pure è riuscito di scoprire con sufficiente chiarezza queste parti, a riserva dell' umore ac-

queo, e del vitreo, che non potetti fcernere nettamente; quantunque poi la non apparenza di quefti due umori io la rifonda più prefto nella mia poca perizia nel difcoprire tai minutezze, che nella non efiftenza delle medefime. Dei quattro nervi, che dal cervello vanno a piantarfi dentro alle corna, due, che chiameremo gli *ottici*, fi attaccano agli occhi, allargandofi fotto di effi in una fpecie di bulbo fatto a zucchetta offia a pera. Ma quefti quattro nervi fono accompagnati dai loro mufcoli, dall' azione de' quali a beneplacito dell' animale fi arrovefciano le corna sì grandi, che picciole, e fi occultano dentro del corpo: ed in grazia di quefto arrovefciamento e fucceffivo occultamento vengono gli occhi a guarentirfi, e a metterfi in falvo dalle eftrinfeche ingiurie.

Levato il cervello, apparifce l' efofago membranofo, lavorato a fottili crefpe longitudinali, di un livido cenerino, e di pareti graciliffime, il quale fi va reftrignendo a proporzione che fi accofta alla bocca. Queft' apertura, con cui la lumaca prende l' alimento, è corredata del fuo palato nella parte fuperiore, e di una callofa mafcella, a cui è tenacemente attacato un dente di foftanza quafi cornea, di colore caftagno, foggiato a mezza luna, e terminato da più punte taglienti, ed acute, formanti in certa guifa altrettanti picciolifsimi denti, quantunque propriamente non ne fia che uno; e quefto è anzi quel folo dente che ha la lumaca. Nel piano inferiore della bocca è fituata la lingua fornita alla fua eftremità di un corpiccino come corneo, e radicata con la bafe in una incavata cartilagine femicircolare. E quefte fono le parti più precipue del capo, prefcindendo da una quantità di mufcoli movitori di effe, la defcrizione de' quali non fembrandomi neceffaria, ho creduto, fenza commettere un peccato d' ommiffione, di poterla lafciare.

ARTICOLO

ARTICOLO II.

Riproduzione delle Corna o Antenne.

Quando io ſcoperſi il primo che le lumache rigenerano le corna, e la teſta reciſa, più d' un Curioſo mi ricercò da quai motivi o ragioni io era ſtato indotto a penſare che queſte parti poteſſero per ventura riprodurſi, ogni qualvolta venivano eſſe a mancare. E non è difficile che ad alcuno de' miei dotti Lettori venga in mente la medeſima inchieſta, ai quali farò io brevemente quella riſpoſta, che fu da me fatta altra volta. Prima di dar opera alla riproduzione delle lumache eſſendo io occupato in quella de' lombrichi terreſtri, di cui ritrovaſi un Capo nel mio *Prodromo ſopra le Riproduzioni Animali*, più fiate ebbi occaſion di oſſervare quanto alla riproduzione di queſti vermi contribuiſca l' eſſere i medeſimi difeſi dagli urti dell' aria sfogata, e libera, col reſtare appiattati dentro alla morbida terra, oppure al concime. Queſta facile oſſervazione mi richiamò alla memoria lo ſtato delle lumache mutilate in qualche parte del corpo, le quali io aveva veduto rinſerrarſi per molti giorni nella propria portatile caſetta, e chiuderne la porta con quel loro coperchio formato dal viſchioſo ſugo che geme dal corpo, in grazia del qual coperchio difficilmente concedeſi l' ingreſſo all' aria. Rifletteì allora che una lumaca mutilata nelle corna o nel capo, e chiuſa col coperchio dentro al ſuo nicchio, ſi trovava in circoſtanze ſimili a quelle d' un lombrico ripoſto dentro alla terra bagnata, o al concime, al quale ſia ſtata tagliata la teſta. A quel modo adunque che un lombrico ripara queſta parte perduta, volli vedere ſe ſuccedeva lo ſteſſo nelle lumache, cominciando le mie ſperienze dalla reciſion delle corna, eſſendo eſſe, come ognun ſa, un' appartenenza del capo.

Affinchè riefca bene il taglio delle corna, egli è d'uopo che fieno interamente ufcite del capo, il che fuccede ogni qualvolta la lumaca è confiderabilmente fuori del gufcio. Allora tutte quattro effendo pienamente fviluppate, fi poffono fino alle radici comodamente recidere. Tagliatene due, per efempio le maggiori, la lumaca ritira di prefente dentro al capo le minori, ed anche fi nafconde in parte nel gufcio, ma d'ordinario poco appreffo ritorna fuori, facendo ricomparire effe corna minori; quindi è che l'une dopo l'altre fi poffono bene fpeffo recider tutte quattro, fe così aggrada all'Efperimentatore. E ciò non oftante la lumaca così mutilata non lafcia fovente di ritornare col collo, e con la tefta fuori del gufcio, come facea quando era intatta.

In quel che la forbice tronca le corna, efce dalle parti troncate una gocciolina, e talvolta fchizza un zampilletto di liquor trafparente che tira al ceruleo, che non è che quello che albergava ne' corpi glandolofi delle corna, rotti allora dal tagliente metallo. Facendo offervazione alle tefte private allora delle corna, fi veggono i quattro tronconi all' eftremità fuperiore appuntati, e la punta ci accorgiam che deriva dalla corrugazione, e dal riftringimento della radice delle corna, feguíto nel luogo dove fi è fatto il taglio. Se pofcia rivolgeremo lo fguardo alle corna feparate dal capo, e che tante volte rimangono aderenti al piano delle forbici, fi offervano le feguenti cofe. Effe corna immediatamente dopo l'effere ftate ftaccate dalla lumaca, s'ingroffano, a motivo di farfi confiderabilmente più corte; la pelle nel fito, ove è feguita la recifione, o fi corruga a fegno che quafi non apparifce più il piano del taglio, oppure fi allarga in maniera che ne lafcia ufcir fuora il nervo ottico, e i mufcoli movitori del corno. Se il corno recifo è dei maggiori, feguita a manifeftare alla fua fommità l'occhio nereggiante; qualche volta però queft'occhio fi perde, non già perchè fi ab-

bia a temere che reſtato non ſia nel corno reciſo, ma per eſſerſi internato, e ſepolto nel medeſimo, ſiccome lo fa vedere il coltello anatomico.

Sappiamo che alcune parti di diverſi animali ſeguitano a vivere, e a muoverſi per un dato tempo dopo l'eſſere ſtate ſeparate dal loro tutto. Così fanno le ſcolopendre, e i lombrichi terreſtri, ed acquatici reciſi a brani, ma ſopra tutto le code delle lucertole, e dei ramarri, le quali, malgrado l'eſſer rotte in più pezzi, ſeguono per qualche tempo a muoverſi, a divincolarſi, e a ſaltellare. Ma ci è noto altresì che in un numero immenſo di altri animali ſuccede tutto il contrario, talmente che le loro membra, ſeparate che ſieno dal corpo, perdono quaſi ſubito ogni apparenza di vita, e di moto. Le noſtre lumache partecipano di queſti ultimi viventi. Appena che le corna ſono ſtaccate dal capo; ſi rendono immobili, o tutt'alpiù leggeriſſimamente ſi contorcono per alcuni ſecondi, indi non danno più verun ſegno di vita o di moto, eziandio con punta irritate.

Se le lumache così mutilate ſi viſitino dopo 20. oppur 25. giorni, non è rado il trovare un principio di riproduzion nelle corna. Ma tal riproduzione è aſſai diverſa da quella che ſi oſſerva in altri animali; e queſto ſi è uno di que' molti utiliſſimi caſi che c'inſegnano a diffidare degli argomenti analogici. L'illuſtre *Reaumur* è ſtato il primo a far vedere, che comincia a manifeſtarſi il principio della riproduzione delle gambe nei granchi d'acqua dolce, coll'apparire al centro del troncone un picciol cono, la cui baſe è ſenza paragone più picciola di quella del troncone, e che ſolo in proceder di tempo ſi fa grande al pari di lui. Un ſomigliante fenomeno è ſtato oſſervato dal celebre *Bonnet* ne'lombrichi terreſtri, e ne' ſuoi vermi d'acqua dolce. Le medeſime apparenze ſono ſtate a me pure manifeſtate dai girini delle rane, e dalle ſalamandre acquajuole nel rifabbricare

la coda, e le gambe (*a*). I raggi delle ſtelle di mare, ſe o caſualmente o dal morſo di qualche animale, oppure dagli uomini vengano in parte tronchi, e ſeparati dal corpo, mettono eſſi pure ſul mezzo del troncone un tenue cono o linguetta, che non è che il germe ſviluppanteſi della mancante porzione: ed io nel mio Viaggio ſul Mediterraneo nella State del 1781. ho veduto più ſtelle, da' cui raggi reciſi pullularono coteſti coni più o meno creſciuti, in quella ſpecie ſegnatamente detta dal Linneo *aſterias rubens*; alcune delle quali conſervo in queſto grandioſo Muſeo d'Iſtoria Naturale della Regia Univerſità di Pavia. Ma ſu le corna troncate delle lumache la faccenda non va così. Il troncone ſteſſo rotondaſi in un bottoncino di colore alquanto sbiadato. Il bottoncino in ſeguito ſi fa più grande, il colore più carico, e in cima al bottoncino, ſe ſi parli delle corna maggiori, ſalta fuori un punto nero, che non è che l'occhio della lumaca. Intanto la parte riprodotta ſi allunga, e dopo un tempo diſcreto il corno novello pareggia l'altro compagno non mutilato. La riproduzione accade in ſimil guiſa nelle corna minori.

Che ſe invece di levar via le interne corna, ſiccome fin qui è ſtato per me ſuppoſto, ſe ne levi una metà, un terzo, un quarto ecc. ſe ne ottiene per egual modo la riproduzione con l'accompagnamento ſteſſo di circoſtanze di ſopra indicato. E queſto è l'andamento che il più tiene la natura nella riproduzion delle corna. Talvolta però interviene che in vece di ritondarſi il troncone, ſi appunta, e ſi allunga. La punta però in progreſſo di tempo ſi allarga, e ſi conforma in globetto, e il reſtante ſi eſeguiſce poſcia nella maniera teſtè accennata.

La lumaca fa quell'uſo ſteſſo delle corna nuove, che

(*a*) Prodr. cit.

facea delle vecchie, o si riguardi lo spingerle fuori del capo, e l'allungarle, o il ritirarle dentro di esso, e il nasconderle, o il manifestare in loro quel senso vividissimo e pronto, per cui ad ogni picciol tocco le arrovescia subitamente, e le mette in salvo.

Tutti questi fatti sembravano assicurarmi che il numero dei componenti la porzione tagliata si trovasse nè più nè meno nella porzione riprodotta. Volli tuttavia accertarmene maggiormente co' più minuti anatomici esami. Si sono adunque da me aperte per lo lungo con sottile ferruzzo tagliente più corna riprodottesi, ma non ho saputo trovare in che il nuovo rigenerato potesse differire dal vecchio reciso. La medesima pelle fatta esteriormente a sagrino, e internamente ripiena di ghiandoline, i medesimi muscoli moventi le corna, i medesimi nervi andanti alle loro estremità, e quivi allargantisi in un bulbo ovale, le medesime parti in fine onde risulta l' occhio stesso; talmente che sarebbe stato impossibile il distinguere le corna nuove dalle vecchie, se quelle vedute non si fossero nascere e crescere, e se dove avevano cominciato a pullulare restato non fosse talvolta su la pelle un leggiere affossamento, e tal' altra un picciolo sporto o rilevato, per cui si conosceva il sito preciso, dove aveva avuto principio il corno novello.

Ad ottenere questa riproduzione vi si richiede un sufficiente calore. Il temperato non basta, ma vi vuol per lo meno il grado decimo terzo nel Termometro del *Reaumur*. Quindi è che nella Lombardia, e in diverse altre parti dell' Italia si devono cominciar le esperienze a primavera spiegata, e quel ch' io dico del calore in riguardo al rifacimento delle corna, lo dico in riguardo a quello della testa, di cui or ora a ragionare intraprendo. Venendo poi la state, le corna si rifanno più prontamente. E se mi fosse chiesto il tempo presso a poco necessario per questa completa riproduzione, di-

rei ch' essa d' ordinario addimanda quasi due mesi, poca o molta che sia la parte delle corna, che dee ripararsi. Dirò in oltre che quantunque tal riparazione frequentemente non manchi, pure evvi stata qualche rara volta che non mi è riuscito di ottenerla, malgrado lo aver conservate per anni intieri le lumache così mutilate.

Articolo III.

Riproduzione della testa dimezzata.

Una pelle fatta a sagrino, due labbra, e due mandibole con un dente lunare attaccato alla superiore, la lingua impiantata in una cartilagine semilunare, una porzione di esofago, il cervello diviso in due lobi, e pullulante in dieci nervetti, oltre a quattro corna di grandezza diversa, veduto abbiamo essere questi i componenti precipui della testa delle lumache. Queste pratiche notizie però non bastano per andar sicuri che le nostre esperienze intorno alla decapitazione di questi rettili sieno state rettamente instituite. Se coteste parti venissero a formare una testa simile a quella dei più degl' insetti, voglio dire fatta a globo, o conformata in un corpo facilmente distinguibile dall' altre parti dell' animale; si vedrebbe subito dov' ella comincia, e dove finisce, e conseguentemente sapremmo senza equivoco dove precisamente la forbice, o il coltello, per la recisione di essa passar dovesse. Ma la testa nelle lumache non è foggiata così: allorchè queste sono fuori del guscio, il loro corpo (se si prescinda dalle corna) imita rozzamente un cono, che è di minor diametro nella parte anteriore, e di maggiore nella deretana, che confina con l' apertura del guscio. E' cosa certa che la testa risiede nell' anterior parte del cono, ma la difficoltà consiste nel sapere quanto essa precisamente ne oc-

cupa, per ſapere quanto ſe ne poſſa con ſicurezza tagliare. A dir vero non ſi può dar regola certa per lo continuo allungarſi e reſtrignerſi, ingroſſarſi e impicciolirſi dello ſteſſo cono quando la lumaca è in moto. Pure allorchè la medeſima è quanto lo può eſſere fuori del guſcio, ho trovato che ordinariamente ſi eſtende dalla punta ottuſa del cono fino al di là della radice delle corna maggiori per il breve intervallo di una linea all' incirca; e fin lì è conceduto il taglio, con ſicurezza di avere per lo più reciſa ſoltanto la teſta. Ma ſe ſi oltrepaſſano queſti limiti, ſiccome allora in un con la teſta vengono a reciderſi altre parti del corpo, così ſiamo preſſochè certi della morte dell' animale. Le lumache da me con felice ſucceſſo ſperimentate ſono ſtate di tre ſpecie, l'*helix pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*, per valermi de' vocaboli del Nomenclatore Linneo. Più individui di una di queſte ſpecie ſono al naturale eſpreſſi nella Tavola anneſſa.

La figura I. rappreſenta queſta lumaca chiuſa ancora nel guſcio, diſponenteſi però ad uſcirne.

La II. quando comincia a mettere in viſta il capo, e le corna.

La III. allorchè ha allungate le corna di più, ma poſta in ſituazione contraria.

La IV. quando è quaſi fuori del guſcio quanto lo può eſſere.

La V. fa vedere la porzione di cono comprendente unicamente la teſta, la qual porzione, per dare ad intendere meglio la coſa, ſi rappreſenta già ſpiccata dal collo.

La figura VI. moſtra la lumaca, cui è ſtata levata queſta porzione, apparendo ſul tronco ne' quattro punti che denotano il luogo delle quattro corna.

Dopo l' aver ottenuto nelle lumache la riproduzion delle corna, mi nacque in penſiero di vedere coſa foſſe per accadere recidendo loro la teſta. Ma dubitando

che dal levarla tutta, anzi che rifarla, periffero, cominciai i miei tentativi col troncarne una porzione soltanto, quella cioè che fi eftende efclufivamente fino alle corna maggiori, e che comprende le labbra, le mandibole col dente, la lingua, e le due corna minori oltre gl' invogli mufculofi, o integumenti, che vogliam nominarli, la qual porzione per fervire alla brevità chiamerò quindinnanzi *tefta dimezzata*. Viene effa rapprefentata nella figura IV. per le lettere *a*, *c*. Per reciderla a dovere facea che la lumaca l' aveffe fpinta in fuori quanto più può, e allora procurava di levarla di netto con la forbice, facendo la fezione perpendicolare all' affe del cono. Ma l' operazione non veniva fempre a bene, ficcome avrei defiderato. La tefta della lumaca, ficcome abbiam detto, è mobiliffima, e appena che fe la fente toccare l' accorcia di fubito, e la ritira: di più allorchè l' allunga, la piega fovente in diverfi fenfi, a deftra, a finiftra, in alto, al baffo. Quindi è che il taglio riufcendo male talvolta, cioè a dire fatto obliquamente, la tefta dimezzata non recidevafi precifamente. Ma perchè io riputava dell' ultima importanza per l' efattezza dell' efperienze il fapere quali parti unicamente venivan recife, per vedere fe in feguito fi riproducevano tutte (in evento che tal riproduzione aveffe avuto luogo in natura); però in quefti tentativi io dovetti pigliarmi una fatica, che pigliata non m' era nelle riproduzioni di più altri animali, e quefta fu di anatomicamente efaminare ogni tefta dimezzata, fubito che era ftata recifa, e di riporre in altrettanti piccioli vafi le lumache decapitate, facendone toccar una a ciafcheduno col fuo numero affiffo, che trovandofi il medefimo nel mio Giornale, veniva quivi accompagnato da una breve anatomica defcrizione dei componenti ciafcuna tefta levata. Così tolto reftava qualunque fofpetto di prendere equivoci nelle mie efperienze; e d' altronde io poteva venire in cognizione, fe le parti rifabbricate

fabbricate corrifpondevano precifamente nel numero, nella forma, e nella grandezza alle parti recife. Dietro a quefte notizie che ho creduto bene il far conte, perchè nota fia la maniera da me praticata nelle fperienze, paffo alla narrazione dei rifultati.

Seguíta l'amputazione, la lumaca immediatamente appreffo fi ritira con fomma rapidità, e nafcondefi dentro del gufcio, e foventemente nell'atto del ritirarfi mette un fottil fifchio, proveniente dalla difficoltà che trova l'aria nel venir fuora del canale della refpirazione per efferle allora in parte contefo il varco dalla fubita contrazione del corpo. Malgrado quefto enorme taglio egli accade talvolta che la lumaca ritorna poco dopo fuora del gufcio, e comincia a ftrafcinarfi da luogo a luogo, ficcome facea quando era intatta. La figura VII. ci fa vedere una lumaca, alla quale è ftata tagliata la tefta a metà, e che dopo il taglio è ufcita volontariamente del gufcio. I due punti *R*, *S* denotano il fito dov'erano le corna minori. Le maggiori fono più picciole del folito, per non averle quefto rettile fpinte fuori abbaftanza. Ma il più delle volte fuccede il contrario. Vi è però un mezzo affai facile per obbligar la lumaca ad ufcire, ad oggetto di poter vedere, ed efaminare il taglio prodotto, e quefto mezzo confifte nel rompere a leggeriffimi colpi d'una chiave, o della coftola d'un coltello una picciola parte del gufcio di dietro; giacchè allora la lumaca da quella viva impreffione irritata fi determina a fpuntar per d'avanti, poca o molta che fia ftata la recifione del capo. E qui noterò in paffando per evitar le inutili ripetizioni, che di un tal efpediente mi fono valuto ogni qualvolta le lumache ricufavano di comparire, e che a me premeva di offervare o la recifione fatta di frefco, ovvero i principj, e i progreffi della tefta riproducentefi. Efaminato adunque il troncone, dopo l'aver recifa la tefta dimezzata, fi fcorge ufcire da effo una porzione di quel liquore, che nel-

la lumaca tien luogo di ſangue ; il qual liquore però ceſſa ben preſto, a motivo del troncone che non indugia a corrugarſi, e ad impicciolirſi, anzi qualche volta ſino in apparenza a perderſi, entrando in ſuo luogo un picciolo incavo o affoſſamento, dove non appariſce indizio del taglio. Intanto le lumache così decapitate ſi attaccano per lo più ai vaſi dentro cui ſono riposte, ſi naſcondono nella loro caſetta, otturandone la bocca con quel ſottile e bianco coperchio prodotto dal tegnente umore che ſtilla dal corpo, e quivi entro immobilmente quetano per più ſettimane e talvolta per meſi intieri.

Facendole uſcire dopo 30 ovvero 40 giorni, alcune moſtrano il nudo troncone ſenza apparenza di riproducimento ; ma altre, ſe la ſtagione ſia piuttoſto calda, cominciano a far vedere verſo il mezzo del troncone un globettino in apparenza carnoſo, aſſai tenero, e di un bianco cenerognolo, che eſaminato però sì eſternamente, che al di dentro, non laſcia ſcorgere all'occhio niente di organizzato. L'organizzazione però dopo altri 8 oppur 10 giorni principia a manifeſtarſi in eſſo globettino già di molto accreſciuto, apparendo i rudimenti delle labbra, delle corna minori, della bocca, e della lingua, con di più un corpicello membranoſo di colore oſcuro, che per eſſere attaccato alla mandibola ſuperiore, e fraſtagliato ai lombi, induce l'Oſſervatore nella facile credenza che ſia il dente rigeneranteſi della lumaca. Trattanto ne' giorni conſecutivi queſte parti ſi vanno ſvolgendo, e manifeſtando di più, occupando ſucceſſivamente ſpazio maggiore nel troncone; e dopo due o tre meſi al più la teſta dimezzata ſi è riſatta in guiſa, che a riſerva del colore alquanto più tenero non ſi diſtingue punto dalla vecchia. Oltre l'iſpezione eſterna, ce lo perſuade, e fa chiaro la notomia. Conciossiachè aperta, ed eſplorata per di dentro la teſta novella, ſi ravviſano in lei quelle parti, corriſpondenti appuntino nel numero, nella forma, nella grandezza, che preeſi-

ſtevano nella vecchia teſta, e che erano ſtate da me ſcrupoloſamente ſu' miei Giornali notate in ciaſcuna decollazione. Io non ſaprei porgere a' miei Lettori un' idea più ſenſibile di queſta riproduzione, che con l'eſempio d'un fiore per ancor non aperto. Conſiderato ne' ſuoi principj egli è un bocciuolo, o picciol globo riſultante da membrane sì avviluppate fra loro, e sì aggrovigliate, che non arriviamo punto a diſtinguere la forma delle foglie o come diciamo dei petali. Queſti petali ſoltanto in progreſſo ſi diſaſcondono, dapprima con qualche oſcurità, e confuſione, poi diſtintamente, e con tale chiarezza, che chicheſſia lo riconoſce per un bottone d'un fiore: in quella guiſa perappunto che il compleſſo delle parti ſviluppantiſi nelle lumache arriviamo finalmente a ravviſarlo per una verace teſta rigenerata.

Queſta rigenerazione però così compiuta e tutta d'un pezzo è ben lungi dall'ottenerſi in tutte le lumache; ma in diverſe ſpuntano dal troncone due picciolíſſimi globi, che in taluna ſono i principj delle due corna minori, in tal altra l'uno di eſſi abbraccia di più i rudimenti delle labbra, della bocca, del dente, della lingua, i quali due picciolíſſimi globi in progreſſo di tempo però ſi uniſcono inſieme, e ſi conformano in un ſolo, che ſvoltoſi in ſeguito di vantaggio viene compiutamente a formare la teſta dimezzata. Non è raro che l'uno delle due corna riprodotte non aggiunga alla naturale lunghezza, o che ſia biſtorto, ovveramente che un labbro ſia dell'altro più picciolo, od anco che la teſta riſabbricata pieghi tutta da un lato, o che abbia tra il nuovo e il vecchio un incavo o foſſetta, od in fine che la teſta non ſiaſi punto riſatta, e ciò dopo ſei meſi, ed anche un anno, apparendo tuttavia il troncone nudo, allorchè la lumaca eſce del guſcio. Ho oſſervato quaſi coſtantemente, che quando il taglio è ſtato fatto perpendicolarmente all'aſſe del cono, la ripro-

duzion della teſta ſuccede perfettamente : e che quelle moſtruoſità , e quelle anomalie hanno frequentemente luogo , allorchè la reciſione è accaduta obliquamente , ovver che le forbici , per non eſſer talora troppo taglienti, non hanno recisa in un colpo la teſta dimezzata.

Le lumache in più tempi decapitate a metà ſono aſceſe al numero di 322. La teſta ſi è ottimamente rifatta in 126 . Si è fatta vedere più o meno moſtruoſa o deforme in 31 lumache ; 14 non hanno punto riprodotto, e il reſtante è perito (*a*). E però mi ſono accorto che la reciſione della teſta, benchè dimezzata, a più lumache è fatale. Tutte quelle che hanno riprodotto ſi ſono ſervite della teſta novella come facean della vecchia , tanto nei moltiplici, e bizzarri movimenti, che proprj ſono di queſta parte , quanto nel prendere quegli alimenti che loro ſomminiſtrava, come pane, inſalata, e ſimili, mercè cui di magriſſime che eran venute pria del rifacimento del capo, acquiſtata avevano la primiera carnoſa pienezza.

ARTICOLO IV.

Riproduzione della Teſta intiera.

Nel terzo Articolo ſi è veduto che i componenti l'intiera teſta delle lumache giungono fino al di là della radice delle corna maggiori pel tenue ſpazio di una linea all' incirca. Il perchè determinato avendo io in queſto corſo novel di eſperienze di ſradicar per intiero la teſta , nel mentovato ſito preciſamente ſi è cercato di fare il taglio, e ſi è procurato ſempre che foſſe perpendicolare all' aſſe del cono carnoſo formato dalla teſta, e dal collo . Ma le difficoltà incontrate nell' amputazione

(*a*) La ſcoperta della riproduzione delle corna , e della teſta così dimezzata , che intiera nelle lumache è ſtata da me fatta nella primavera , e nella ſtate del 1766.

della teſta dimezzata trovate ſi ſono le ſteſſe nell' amputazione della teſta intiera; e quindi il taglio per l'agitarſi delle lumache non ſi è ſempre potuto fare nel ſito preſiſſo, ma talvolta ha mancato o per difetto, col levar meno dell' intiera teſta, o per eccesſo, col levarne di più. Quindi ad oſſervare la dovuta eſattezza nelle eſperienze, e ad eſſer ſicuro delle conſeguenze delle medeſime, mi è convenuto ad ogni decapitazione l' intraprendere quegli eſami anatomici, che intrapreſo avea nelle teſte dimezzate, cuſtodendo medeſimamente in vaſi appartati ſingole le lumache, e tenendo un eſatto conto di ciò che elleno nell' amputazione perduto aveano. Le mutilate a teſta intiera ſono ſtate 423, ed eccone i riſultati.

Quelle lumache, a cui oltre la teſta era ſtata reciſa una porzione di collo, tutte quante ſono perite. Nè è punto a ſtupirſene, mentre che allora venivano in parte tagliati gli organi della generazione, che appunto ſappiamo avere la loro origine interiormente in un lato del collo, di dove per un forame eſcon fuora, allorchè queſti rettili vogliano dar opera alla propagazion della ſpecie. Le mutilate poi per l' intiera teſta preciſamente, o che lo erano ſtate alcun poco di meno, morivano bensì in qualche numero, ma le più ſopravvivevano a quel taglio enorme, anzi aſſai di queſte rifacevano compiutamente la teſta. Tal riſacimento per venire in molti individui accompagnato da circoſtanze diverſe, e tutte degniſſime da ſaperſi, merita d' eſſere alcun poco particolarizzato. Se ad una ſalamandra acquajuola ſi recida una gamba, o ad un lombrico terreſtre la teſta, e la coda, la riproduzione che ne naſce è un *tutto organico* intero, o vogliam dire una gamba in miniatura, una teſta, una coda, ſimiliſſima alla reciſa, a cui null' altro manca che uno ſviluppamento ulteriore. Pel contrario ſul troncone delle lumache nel modo eſpoſto decapitate non ſalta già fuori un tutto

organico intero, comprendente quelle parti tutte, che componevano la testa tagliata; ma queste parti a principio sono spesse fiate fra lor separate, anzi talvolta pullulano le une qualche tempo appresso che hanno pullulato le altre, e solamente dopo uno spazio più o men lungo si attaccano tutte insieme, si consolidano, e vengono a formare un tutto organico, poco o niente dissimile dall' antica testa. Da alcuni esempii che recherò in mezzo s' intenderà più agevolmente la cosa.

Talora dunque la nascente riproduzione è una carnosa pallottolina aderente in pochi punti al mezzo del troncone, e come spiccata da esso, la qual contiene i rudimenti delle due labbra e delle corna minori unitamente alla bocca, alla lingua, e al dente già rifattosi della lumaca. Le altre parti, come le corna maggiori, e il restante del capo mancano interamente. Il troncone d' altra lumaca mostra un corno maggiore già fornito del suo occhio, e al di sotto in rimota parte e isolata spuntano i primi lineamenti delle labbra. La riproduzione in altre è un gruppo di tre corna, due già arrivate alla naturale lunghezza, e grossezza, il terzo giacente ancora a fior di pelle. Chi non riproduce da principio che un bottoncino, che attentamente spiato, si scorge esser le labbra in sestesse ravviluppate e ristrette. Chi è già fornita dell' intiera testa, a riserva d' uno o più corna mancanti. Chi finalmente lascia apparir sul troncone le due sole corna maggiori, oppur le minori, ovveramente un maggiore, e un minore.

Tutti questi parziali riproducimenti però, congiunti ad altri che appariscono in seguito, coll' andar del tempo concorrono insieme, siccome io diceva, ed unisconsi, e formano una sola riproduzione, cioè a dire una testa novella, in molte lumache in nulla dissomigliante dalla vecchia, a riserva del colore men carico, in grazia del qual colore anche i meno veggen-

ti fanno riconofcere la porzion riprodotta, ficcome più d' una volta ho praticamente veduto. La figura VIII moftra una di quefte lumache, che hanno rifatta compiutamente la tefta, non però ancora adombrata del naturale colore. E lo fteffo fi è della figura IX, fuor folamente il non aver rifatte quefta lumaca le due corna maggiori, ficcome qualche volta fuccede. Per altro a tempo più inoltrato anche la tefta novella prende la tinta medefima della vecchia, e la prima foltanto feguita a diftinguerfi dalla feconda per una linea cenerognola perpendicolare all' affe del collo, la quale fedelmente indica il fito dove pafsò la forbice nel mutilar le lumache. Sebbene l' indizio di un tal fito non è coftantemente una femplice linea. Egli è talora un incavo profondo, di colore però fempre bianchiccio, perpendicolare all' affe del collo, fe perpendicolare ne fia ftato il taglio, ed obliquo, fe con obliquità fiafi recifa la tefta. Anzi in queft' ultimo cafo qualche volta accade che dalla parte dove è ftata tagliata più tefta, l' incavo fia maggiore: ed in qualche lumaca vedefi un enorme fquarcio da un lato, niente non apparendo nell' altro, o folamente l' accennato indizio della linea di color cenericcio. E quantunque la diuturnità del tempo cancelli gl' incavi, pure il fegno del taglio, cioè la nominata linea, fi appalefa ful collo di alcune lumache eziandio dopo due anni. Dirò di più. Dopo sì lungo intervallo la riproduzione della tefta in qualche lumaca non è completiffima, o perchè mancante di uno o più corna, o perchè le corna giunte non fono, almen tutte, al neceffario ingrandimento, ovveramente perchè fono bernoccolute, e moftruofe. E di quefte apparenti moftrofità ne ho rifcontrato non rade volte, le quali fofpetterei volentieri che traeffer l' origine dalla condizione del taglio più o meno obliquo, più o meno avanzato.

Il cibarfi che facevano le tefte riprodotte fembrava

un argomento ſicuro della rigenerazione veriſſima delle parti, onde è compoſta la teſta; pure ho voluto vie maggiormente accertarmene con l' infallibile ſcorta dell' anatomia, la quale mi ha inſegnato che le teſte nuove (almen quelle che all' eſterno ſembravano riprodotte interiſſimamente) erano corredate di tutti que' componenti che trovati avea nelle teſte vecchie, e che in ciaſcheduna decapitazione erano ſtati da me marcati, per non ſoggiacere ad equivoci, o errori in queſti fiſici eſami. Aggiugnerò che ciaſcuna parte nuova ſi univa, e ſi combaciava sì eſattamente ne' più ſottili ſuoi ſtami colla vecchia, che le lumache che avean riprodotto non avremmo mai giudicato che foſſero ſtate mutilate, ſe indicato non lo aveſſe la linea cenericcia, che loro correva attraverſo del collo.

Qui non debbo però laſciar di avvertire, che a quel modo che alcune lumache, cui levato avea la teſta dimezzata, non hanno riprodotto mai nulla, eziandio dopo un tempo lunghiſſimo, lo ſteſſo è avvenuto a diverſe di quelle, cui era ſtata reciſa l' intiera teſta. Di fatto delle 423 mutilate a teſta intera, ne ho contato 32, che dopo un anno non manifeſtavano il più picciol principio di riproduzione; 93 non potevano aver riprodotto meglio. La teſta di 145 ſi era rigenerata con moſtroſità, e le reſtanti lumache erano morte. La teſta intiera per riprodurſi eſige preſſo a poco quel tempo che la teſta dimezzata.

Che ſe chieſto mi foſſe, donde ſia che in diverſe lumache la riproduzione è nulla, tanto del capo, che delle corna; confeſſerei ingenuamente di non avere intorno a ciò che ſemplici conghietture. Eſſendo così le riproducenti lumache, come le non riproducenti della medeſima ſpecie, dir non poſſiamo che altre abbiano il dono di riprodurre, ed altre no. Opinerei piuttoſto che la virtù riproduttrice non poteſſe ſortire in alcune il ſuo effetto per lo ſtato ſoverchiamente morboſo di que-
ſte

ſte lumache, avendo quaſi ſempre oſſervato, che oltre al notabiliſſimo dimagramento di eſſe, l'eſteriore del corpo prende una sfumatura giallognola, che ſembra inſeparabil compagna delle lumache affette da malattia, e bene ſpeſſo ſoggette a perire.

Avutaſi la riproduzione della teſta, era troppo naturale il penſare che le lumache riprodurrebbono altre parti meno di quella eſſenziali. Tali ſono quell' eminente collare che cinge e adorna la ſchiena delle lumache, quando ſono fuora del guſcio, e quel piano, e largo piede, ſu cui appoggiaſi il lor corpo, quando ſi muovono. Queſte due parti reciſe ſi reſtaurano ottimamente, rifabbricando la natura molto o quel poco, che dalla forbice era ſtato levato.

Riunendo in un ſol punto di viſta quanto ſinora abbiam detto intorno alla riproduzione delle lumache, chiaro appariſce che eſſe ſanno primamente riparare le corna, o queſte in parte ſoltanto, o per intiero vengan reciſe. Secondo che riſanno la teſta quando è ſtata loro reciſa a metà. Terzo che la riſanno egualmente, ove tutta quanta ſtata ſia loro troncata. Quarto che riproducono il collare, ed il piede, poco o molto che lor venga tolto. Dal che ſi fa chiaro che queſti rettili ricuperano quelle parti preciſamente, che avean perdute, la qual coſa non è però sì propria di eſſi, che non s'eſtenda eziandio ad altri animali riproducenti. Se ad una ſalamandra venga a mancare un terzo, oppure un quarto di coda, non ne riſa che un terzo, od un quarto. E lo ſteſſo vuol dirſi della metà, anzi di tutta quanta la coda. Un fenomeno ſomigliantiſſimo ha pur luogo così nelle gambe anteriori, che nelle poſteriori di queſto anfibio. (*a*). E cotal tenore di rigenerare le parti ſol-

Gggg

(*a*) Prodr. cit.

tanto mancanti ſi eſtende invariabilmente ai lombrichi terreſtri, ed aquatici, come altresì alle rane aventi ancora la maſchera di verme o girino (*b*). Anzi conſultando gli Autori che parlato hanno della riproduzion delle membra in altri animali, trovo aver luogo la medeſima inalterabil legge: di maniera che ſtabilir poſſiamo qual canone generaliſſimo (ſe preſcinder vogliaſi da alcune accidentali anomalie) che negli animali forniti della prerogativa di riprodurre la natura non rimette mai ſe non ſe quelle parti, o quegli organi, che per qualunque cagione o accidente erano ſtati lor tolti.

ARTICOLO V.

Coſe relative alla riproduzione della teſta nelle Lumache.

Diam compimento alla preſente Memoria col riferire alcune nuove eſperienze, accompagnate da varie rifleſſioncelle, le quali per riſguardar davvicino, e per mettere in maggior luce queſto intereſſante ſoggetto, non riuſciranno forſe diſcare, ſiccome ſpero, ai lettori.

Si è veduto tre eſſere ſtate le ſpecie di lumache da me cimentate, *pomatia*, *nemoralis*, *lucorum*. Ma ſono elleno queſte tre ſpecie ſole, che godono della riproduttrice virtù? Per le ſperienze fatte da alcuni Naturaliſti d'oltremonti veggo eſſervene altre partecipi di tal privilegio. Dirò io però con amica ingenuità di averne ſperimentate altre ſpecie, ma preſſochè con inutilità di ſucceſſo, concioſſiachè o non hanno punto rifatto la teſta, nè le corna, o hanno ſoltanto manifeſtato un primo principio di riproduzione, che in ſeguito è andato a finire con la morte dell'animale.

(*b*) L. c.

Ma donde è mai che alcune qualità di lumache hanno il potere di riprodurre, ed altre no? Se fatto mi fosse simil quesito, candidamente confesserei di non aver tanto in mano, onde sciorlo. Se le riproducenti avessero struttura organica assai diversa dalle non riproducenti, assegnar potrebbesi qualche ragione, o a parlare più filosoficamente qualche disparità tra le une e le altre; ma tale diversità, nelle parti almeno constitutive del capo, non ho certamente saputo trovarla nelle varie specie di lumache con esito così buono, che cattivo da me cimentate.

Questa quasi medesimezza di organismo in lumache specificamente diverse, la quale ciò non pertanto ci guida a risultati affatto contrarj, quali sono il riprodurre, e il non riprodurre, ci ammonisce utilmente che qui non possiamo punto valerci dell'analogia, coll'argomentare da specie a specie, ma che per aver dati sicuri siamo astretti d'intraprendere tanti esperimenti, quanti sono gli animali specificamente diversi. E la forza di questa per noi umiliante verità si rende anche più palese, e più chiara, volendo noi gittare una fuggitiva occhiata sopra diversi di quegli animali, che in varj tempi si è scoperto da' Naturalisti esser dotati di riproduttrice virtù. Quando per la prima volta svelati furono al filosofico mondo dall'immortale *Trembley* i prodigj del polipo, si pensò che la semplicissima struttura sua concorsa fosse massimamente a crearli. Di fatto l'essere cotal verme privo di cuore, di vene, di arterie, e per conseguenza di vera circolazione di umori, il non trovarsi in lui nè cervello, nè spinale midollo, nè nervi, nè verun altro accompagnamento di quelle parti, che si riscontrano in una infinità d'altri animali, ma l'apparir tutto formato d'una sostanza gelatinosa, e omogenea, seminata per ogni dove non d'altro che d'una quantità di granellini, tutto ciò dava a pensare, che la semplicità della struttura concorresse a far sì che ogni

particella tagliata dal polipo ſi conformaſſe in un polipo intiero; a quel modo che prima della ſcoperta del citato Ginevrino Filoſofo ſi era penſato, che ſtante la ſempliciſſima loro ſtruttura ſuccedeſſero nelle piante que' maraviglioſi fenomeni, che ſi ſono in ſeguito oſſervati ne' polipi. E il riparamento delle parti perdute in altri eſſeri animati di ſtruttura aſſai ſemplici, quali ſono le ortiche, e le ſtelle di mare, e diciam anche i gamberi di fiume, avvalorava cotal penſamento. Ma l'eſſerſi trovato dappoi che certi vermi d'acqua dolce malgrado l'eſſere di molto più compoſti dei polipi, tagliandoli a pezzi, rigermogliano in altrettanti vermi completi (*a*), ha dato a vedere, che la ſemplicità dell'organizzazione non è una condizion neceſſaria al riparamento delle parti perdute. E ciò ſi è anche verificato in modo più luminoſo ne' lombrichi terreſtri, dappoichè il *Reaumaur* ha trovato che reciſi a brani moltiplicano come le piante, verità fiſiologica negata da alcuni Naturaliſti, e che verrà da me poſta fuor d'ogni dubbio, e conſiderabilmente ampliata nelle mie *Riproduzioni Animali*. E quando io nomino il lombrico terreſtre intendo parlar di un vivente a mille doppj più compoſto del polipo nell'organiſmo, per trovarſi in lui circolazione di ſangue, e in conſeguenza vaſi arterioſi, e venoſi, e canale degli alimenti, e ſpinal midolla, e nervi, e unione dei due ſeſſi, per eſſere ermafrodito (*a*). Della qual complicata ſtruttura va pur fornito il mio lombrico d'acqua dolce *a batello*, non oſtante che non ceda punto al lombrico terreſtre, e ai vermi d'acqua dolce per la facoltà del riprodurre (*b*).

Sebbene dei ſurriferiti vermi quanto ſono ſituati più alto nella ſcala dell'animalità per l'organica loro ſtrut-

---

(*a*) Bonnet *Traitè d' Inſectologie*.
(*a*) Prodr. cit.
(*b*) L. c.

tura e la lumaca terreſtre, e la ſalamandra acquajuola? Laſciando a parte la prima, per averne già parlato abbaſtanza, fermiamci per un momento a contemplar la ſeconda. Quantunque la ſalamandra acquajuola meritamente ſi annoveri dai Naturaliſti tra gli amfibj, per queſto però non laſcia d'eſſere un vero quadrupede, avendo in piccolo moltiſſime di quelle parti che hanno i quadrupedi in grande. Aſſaiſſimi di queſti ſi trovano avere corredara la coda di vertebre oſſee, incaſtrate le une dentro alle altre, e ſucceſſivamente più picciole in ragione dell'aſſottigliarſi della coda. E di vertebre medeſimamente oſſee, e in ſimil guiſa conformate va provveduta la coda delle ſalamandre, oltre le parti ſolide molli, cioè a dire il midollo allungato che ſora ciaſcuna vertebra, e arriva fino alla più ſottile, i nervi, i muſcoli, le vene, le arterie, il cuore, e una numeroſa famiglia di glandole, da cui ſcappa quel liquore lattato, ed acre, che ſi ſparge ſu la pelle, quando la ſalamandra viene irritata. Similmente le gambe così anteriori, che poſteriori hanno preſſo a poco quella ricchezza di parti ſolide molli, e di parti ſolide dure, oſſia di oſſa, che ſi oſſerva ne' grandi quadrupedi, e preſſo a poco anche in noi. Finalmente come queſti le mandibole del noſtro amfibio vanno armate d'un oſſo rozzamente circolare, che le circonda, e le termina, da cui riſalta una ſelvetta regolare di acutiſſimi denti. Trovato queſto apparato di tante parti, e tanto fra loro diverſe, chi creduto avrebbe che tal quadrupede abbia il dono di ripararle tutte, ogni qualvolta tutte vengan reciſe? Eppure non evvi niente più vero di queſto, ſiccome ho ſcoperto io il primo aſſaiſſime volte. Il perder le quattro gambe ad un colpo è per la ſalamandra quaſi un nulla, giacchè ſa ripararle tutte quattro, e ripararle perfettamente. Sonomi preſo la pena di numerar tutte le oſſa, che entrano in eſſe quattro gambe; ed ho veduto che aſcendono a 99: e 99 ſi ſono pure da me tro-

vate nelle quattro gambe riprodotte, allora quando tutte quattro erano ſtate diſarticolate dal tronco. Che più? Levate per intiero le quattro gambe, e inſiememente tutta la coda, e le due mandibole, la ſalamandra oltre al reſtauramento delle gambe, rifa nel tempo ſteſſo e mandibole, e coda. Queſta verità, che ha tutta l' aria di paradoſſo, e che anzi a prima giunta ci ſembra più favoloſa della famoſa idra di Lerna, l'ho io replicatamente veduta, e fatta vedere a più miei Amici, non ſenza ſorprendimento di tutti. E tanto più la ſalamandra acquajuola è oggetto di maraviglia, quantochè non defrauda mai delle moltiplici ſue riproduzioni l'avido Sperimentatore, la qual coſa ſi è veduto non ſucceder ſempre nelle lumache, alcune delle quali ricuſano di riprodurre.

Ecco adunque come cominciando dal polipo, indi paſſando a più vermi, poi alle lumache, e da ultimo alle ſalamandre, che è quanto dire progredendo da animali ſempliciſſimi ad altri men ſemplici, e da queſti ad altri eziandio più compoſti, chiaro appariſce aver luogo la riproduzione, ſenza che l' organiſmo più o meno ſemplice, e più o meno compoſto produca verun divario eſſenziale.

Queſti fatti provan del pari che la tenerezza della fibra, o delicatezza che vogliam nominarla, non è altrimenti una condizion neceſſaria per le riproduzioni animali. Qual divario nella mollezza tra il corpo d'un polipo, e la coda, o le gambe d'una Salamandra? Eppure sì l'uno che l'altra non riproducon del pari? Senza che quanti animaletti teneriſſimi quanto il polipo, ed anche di più, ed eſſi pure acquatici come lui, invece di riprodurre, ſe vengan tagliati, vanno a perire, ſiccome ho io ſteſſo potuto accertarmene per replicati tentativi ſopra loro intrapreſi?

Conviemmi però l'avvertire che quegli animali, che atti eſſendo per lor natura al riprodurre, dotati ſono

nel tempo ſteſſo di fibra più tenera, hanno ſopra gli altri più d'una notabile prerogativa. Primieramente le loro mancanti membra cominciano a ripararſi più prontamente. Un polipo tagliato per lo traverſo in molte parti, principia a moltiplicarſi in altrettanti polipi in poche ore. Un verme, ſia di terra, ſia d'acqua, eſige più giorni per la ſua iniziale riparazione. Una lumaca all' oppoſito, e una ſalamandra addimandano più ſettimane. Secondamente il completo riproducimento nei primi ſi ottiene in un tempo conſiderabilmente men lungo, che nei ſecondi. Pochi giorni pel conſeguimento di queſto ſi richieggon dal polipo: i ſuddetti vermi eſigono il corſo d' intiere ſettimane; più meſi vuole la lumaca per rifare la teſta, e un anno intero non baſta alle ſalamandre perchè le gambe novelle acquiſtino la naturale grandezza delle vecchie. In terzo luogo lo ſteſſo animale dotato della qualità riproduttiva, quanto più è giovane, e in conſeguenza di fibra più cedente, più tenera, tanto più preſto rimette perfettamente le parti perdute. Oltre l' averlo io toccato con mano nelle ſalamandre, ho avuto l' agio di vederlo nelle lumache, le quali decollate rimettono il capo in meno d'un meſe e mezzo, e lo rimettono molto prima, ſe mutilate ſieno più giovani ancora. Da ultimo la fibra in qualche animale ſe venga a ſminuire la nativa mollezza, la riproduzione vien meno. Ne abbiamo un parlante eſempio ne' ranocchj. Quando ſono ancora girini, ma che cominciano però a metter le gambe, ſe loro vengan reciſe coteſte gambe, certa coſa è per le oſſervazioni mie ſteſſe, che le rifanno interiſſimamente. Ma la coſa non va così ogni qualvolta le medeſime vengano tronche, acquiſtato che abbia il girino le ſembianze di rana. Allora dunque non è mai o quaſi mai che il troncone rimetta una gamba novella. Ma donde un fatto tanto diverſo nelle medeſime membra di queſto amſibio? Diremo noi che quella virtù, quella potenza

di riprodurre, che avea l'animale essendo girino, l'abbia egli perduta, facendosi rana? Siccome ad onta di tal metamorfosi seguita egli ad essere lo stesso animale (*a*), questa idea sembrami poco filosofica. Trovo più confacente al vero il pensare, che nella rana continui ad aversi la potenza riproduttrice; ma che laddove tal potenza nel girino veniva all'atto, a motivo della tenerezza grande della fibra, le sia in seguito ciò conteso per l'induramento di questa. Tentiamo di schiarire di più tal pensiero. La rana sotto forma di girino non esce mai fuori dell'acqua: che anzi uscendone perirebbe. Solamente a quando a quando dal fondo si lancia alla superficie, e per un momento mette fuora il muso per espellere dai polmoni l'aria vecchia, e per assorbirne della nuova. Il troncone adunque delle gambe recise rimane in quel tempo in uno stato di somma mollezza, per trovarsi sempre immerso nell'acqua, e da essa in ogni punto bagnato. La gambina adunque sotto forma di germe potrà forare, diciam così, il troncone, ed uscirne, e svolgersi liberamente. Non così le accaderà, ove la rana acquistato abbia le proprie, e permanenti fattezze; giacchè allora restando il più fuori dell'acqua, e per poco d'ora attuffandovisi solamente alle presenza di qualche insidia, o pericolo, il troncone dovrà soggiacere alle vive impressioni dell'aria, e quindi si cicatrizzerà, e in grazia della cicatrice contratta non permetterà al germe riproduttore di rompere, e svilupparsi.

La mutilazione delle lumache, di cui ho fin qui ragionato, è stata per lo più da me fatta a primavera alquanto inoltrata, veduto avendo che per ottenersi in esse la riproduzione non vi vuol meno del grado decimo

(*a*) Dissertaz. di Fisic. Animal. e vegetab. T. II.

mo terzo del termometro del Reaumur, il qual grado nelle contrade di Lombardia non ſuole averſi prima di detta ſtagione. E fatta allora la decapitazione ſi è ſicuro che prima del verno le lumache, almen molte, riſanno perſettamente la teſta. Ma che accaderà egli adunque fatto il taglio verſo la metà di Settembre o in quel torno, quando cioè il mentovato grado di calore non ſuole eſtenderſi preſſo di noi al di là d'un meſe, per le ſopravvegnenti pioggie autunnali? Ho inſtituito più eſperimenti per lo ſvolgimento di queſta curioſa queſtione, e ne ho ottenuto i ſeguenti riſultati. Se le lumache già mutilate io le faceva ſtare nel tepor d'una ſtufa, eguale o ſuperiore al grado ſuddetto, era ſicuro di una perfetta riproduzione aſſai prima del finir dell' inverno. Se le cuſtodiva in una ſtanza, il cui freddo per alcuni giorni giunto foſſe al grado della congelazione, la più parte andava a perire. Se poi il freddo era minore, riſtavano per tutta quanta l' avverſa ſtagione di riprodurre, e ricomparita la primavera, il capo o le corna, già cominciate ſopra inverno a ſvilupparſi, ſeguitavano a farlo fino all' intiero loro compimento. Che ſe da ultimo la decollazione ſeguiva nel principio del verno, e d' altronde ſi aveva l'avvertenza che non periſſer di freddo, ſenza però tenerle dentro a una ſtufa, in tal circoſtanza ſul piano del troncone non appariva mai durante l'inverno verun principio riproduttore, e ſolamente queſto cominciava a farſi paleſe in Maggio, e proſeguía poi a ſvilupparſi, e ad ingrandirſi ne' meſi eſtivi.

E queſto tenor di procedere, che pratica la natura nelle riproduzioni delle lumache, lo pratica in quelle del pari delle ſalamandre, e de' lombrichi terreſtri, ed acquatici, con tal differenza però che queſto genere di vermi riproduce anche, ſebben lentamente, nel grado del temperato: queſto poi derivi o per la mollezza gran-

de della fibra, onde ſono compoſti, o a cagione della ſingolare loro natura.

Quando era occupato ſu la riproduzione dei lombrichi, mi preſe voglia di ſapere, ſe la forza riproduttrice veniva ad eſaurirſi nella prima riproduzione: e trovai il contrario. Anzi alla ſeconda riproduzione tagliata ne ſuccedeva una terza, levata queſta ne ſottentrava una quarta, indi una quinta ecc. Nè ſolamente ſi ottenevano tali ſucceſſive riproduzioni levata via unicamente la porzione di mano in mano riprodotta, ma fatto il taglio la ſeconda volta entro la riproduzione prima, la terza entro la riproduzione ſeconda, la quarta entro la riproduzione terza, ecc. Quindi io veniva ad avere come una ſcala di riproduzioni unite al vecchio troncone, ſempre più giovani, più ſottili, e di colore a mano a mano più aperto.

Queſte riproduzioni di riproduzioni ſi ottenevano egualmente nella coda de' girini, e ciò che è più ſorprendente in quella delle ſalamandre, e nelle loro gambe, malgrado l'andar fornite queſte due qualità di membra di parti tanto fra loro diſſomiglianti. Se adunque la coda, e le quattro gambe riprodotte ſi ritagliavano ad una ſalamandra, rigermogliavano per la ſeconda volta altre quattro gambe, ed un' altra coda, e un tal giuoco ſi poteva tirare avanti per molto tempo. Di fatto nelle ſalamandre giovani, in cui la riproduzione è prontiſſima, nei meſi di Giugno, Luglio, ed Agoſto furono da me ottenute ſei ſucceſſive riproduzioni delle quattro gambe, oltre ſei riproduzioni della coda. E in una di queſte ſalamandre tra le oſſa della coda riprodotte, e quelle delle gambe, nei tre meſi accennati giunſi a contare 687 oſſa rifatte.

In virtù adunque di queſte riproduzioni di riproduzioni ne' lombrichi terreſtri, ne' girini, e nelle ſalamandre, fui voglioſo di ſapere, ſe altrettanto ſi otteneva dalle lumache. Il perchè avendone io mutilate diverſe,

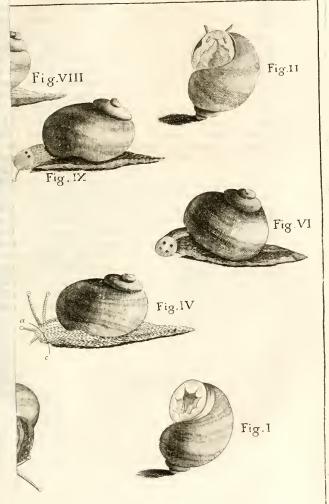
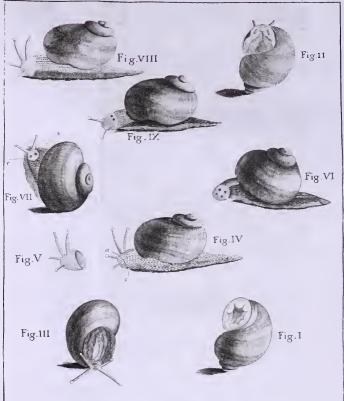
parte con la recision delle corna, parte con quella del capo, quando levato a metà, quando tolto per intiero, subito che queste parti si erano rinnovate, io le recideva in quel sito precisamente, dove erano state troncate le vecchie. Questa seconda riproduzione non lasciò di aversi, e nella maniera stessa con cui si era avuta la prima, e lo stesso fu di una terza riproduzione, ma la morte sopraggiunta alle lumache mi vietò spinger più oltre questo curioso genere di tentativi.

Per altro lo scioglimento di questa questione me ne fece nascere un' altra, e questa fu, se l' esaurimento nelle riproduzioni veniva in fine ad aversi, oppure se esso non succedeva giammai, di modo che gli animali seguissero a riprodurre finchè seguivano a vivere. E questo saggio di esperienze poteva instituirsi per preferenza nelle salamandre, sceltene delle più giovani, per essere questo genere di amfibj e più facile a mutilarsi delle lumache, e di vita più dura, e di più agevole riproduzione. Ma mi è mancato l' ozio per questi ultimi tentativi, i quali, se venissero da qualche sperto Naturalista intrapresi, non sarebbero sicuramente vuoti di utili conseguenze, e potrebbero forse valere un novel Capitolo di Fisiologia.

In tutto il decorso di questa Memoria ho riferito i risultati delle mie sperienze, sopprimendone quasi sempre i dettagli. Se avessi voluto esporli partitamente, e come si trovano su' miei Giornali, nato sarebbe un volume, non che una Memoria. Ma premeva a me troppo di cercar d' istruire il lettore, senza punto annojarlo per lunghi dettagliati racconti. Spero tuttavia di essermi procacciato tanta confidenza presso del Pubblico, per esser creduto. D' altronde pressochè tutti questi risultati ho la compiacenza di vederli confermati da diversi insigni Naturalisti, come apparirà da una seconda Memoria su la Riproduzione della testa delle lumache, nella quale si darà un compendio degli scritti

pubblicati a favore della mia scoperta, e nel tempo stesso un altro di tutti quelli, per cui si è cercato d'impugnarla. I confermatori, a mia notizia, sono i Signori *Turgot*, *Lavoisier*, *Tenon*, *Herissant*, *Bonnet*, *Senebier*, *Schaeffer*, *Roos*, *Muller*, *Scarella*, *Troilo*, oltre a tre altri Italiani pubblici rinnomati Professori di Notomia, i quali recentemente ripetute hanno queste mie sperienze, e trovate avendole veracissime, si affrettano di comunicarmene graziosamente le loro Memorie. Gl' Impugnatori sono i Signori *Murray*, *Wartel*, *Cotte*, *Bomare*, *Adanson*, *Schroeter*, *Argenville*, *Presciani*. In questo secondo mio Scritto esaminerò con filosofica imparzialità quale sia il valore di queste impugnazioni, senza lasciar di pesare quale sia il merito degl' Impugnatori. Io sono ben lungi dal pensare che questo mio scoprimento sia per far epoca nella naturale Filosofia. Piuttosto potrebbe far epoca nella Storia dello spirito umano il vedere come in una esperienza sì comoda, sì facile, quale si è quella di conseguire la riproduzione del capo nelle lumache, fallita l' abbiano tanti Fisici, e ciò che più sorprende in un Secolo sì illuminato, sì cauto, e che sembra esser quello delle Osservazioni, e delle Esperienze, se d' altra parte non fosse notissimo, che lo sperimentare comunque è mestiere di tutti, lo sperimentare a dovere è sempre stato, e sarà sempre di pochi.

Fig.VIII
Fig.II
Fig. IX
Fig.VI
Fig.IV
a
c
Fig.I

Fig.VIII
Fig.II
Fig.IX
s
r
Fig.VII
Fig.VI
Fig.IV
a
c
Fig.V
Fig.III
Fig.I

MEMORIA

INTORNO ALLA MAGGIOR PERFEZIONE

DELL' ARGANO

Del Sig. Ab. LEONARDO XIMENES Matematico di S. A. R. il Granduca di Toſcana.

NOn vi è macchina più comune, e più ovvia dell' argano, del quale ſi fa uſo quotidiano nell' Architettura civile, nella Militare, e nella Nautica. Qualunque peſo conſiderabile, che debba elevarſi per decorare con ornato pietrame le fabbriche civili, qualunque reſiſtenza, che debba ſuperarſi per traſportare le macchine militari ancora per l' erto delle montagne, qualunque peſantiſſima áncora, che un vaſcello da guerra debba ritirare dal fondo del mare, in una parola qualunque operazione ſi faccia, che ſia di qualche rilievo, per tutto chiamaſi in ajuto l'energia dell' argano. L' importanza però di tale ordigno non corriſponde alla ſua perfezione. Pareva ben naturale, che già da gran tempo ſi foſſe ſtudiato da' Meccanici per condurlo alla ultima ſua perfezione. Ma egli è accaduto tutto al contrario, che le perſone di talento rivolte tutte alle più ſublimi teorie, hanno abbandonata sì importante macchina alle più baſſe maeſtranze, le quali col natural talento l' hanno condotta a quello ſtato, in cui eſſa ſi trova, non eſſendo eſſe capaci di conoſcere, ſe ſiano grandi, o piccole le ſue reſiſtenze, ſe vi ſia argomento di ſcemarle, e quali ſieno le maniere per un oggetto così rilevante.

Quando l'anno 1739. la *Reale Accademia delle Scienze di Parigi*, per lo zelo che essa fomenta non solo per le Scienze più sublimi, ma ancora per le arti le più comunali, propose il premio in favore di chi *ritrovasse un Argano, il quale avesse il vantaggio dell' antico senza averne i difetti*. Ma non avendo trovato nelle Memorie, che le furono inviate, quelle condizioni, che essa esiggeva, sospese per allora il suo giudizio, e ripropose il premio doppio per l' anno 1741 per il medesimo Problema. Fra le nuove Memorie, che in detto anno furono all' Accademia trasmesse, niuna in realtà potè soddisfare alle dotte mire della medesima. Ma ritrovandosi in esse delle nuove teorie, ed insieme de' notabili miglioramenti nella macchina proposta, fu ripartito il premio a quattro Memorie, e le altre tre furono pubblicate sotto il titolo di *accessit*. Tanto è vero, che ancora negli ordigni più semplici, e più dozzinali s' incontrano gravissime difficoltà per emendarli, e migliorarli, e che non servono gli studj più indefessi di Meccanici accreditati.

La ragione, per cui questa macchina ha ricevuto un assai mediocre miglioramento, consiste secondo il mio parere nel piccol progresso, che ha fatto dalla fine del passato secolo fino agli anni correnti l'altra non meno importante ricerca intorno alle resistenze degli attriti, alle quali sono soggetti tutti i nostri solidi. In qualunque modo si modifichi un argano, sempre però dee con esso superarsi non solo la resistenza del grave peso, che dee salire contro la direzione de' gravi, ma ancora quella degli attriti, che l'argano dee risentire nell' elevare il detto peso. Questa estranea resistenza si è sempre valutata di $\frac{1}{3}$ del peso da elevarsi. E qualche volta le circostanze son tali, che essa giugne ancora alla metà. Sicchè la forza motrice era destinata a superare la metà di più della resistenza della pura gravità. Anzi quando ancora la resistenza semplice si supponesse di $\frac{1}{3}$ se-

condo il ſentimento del Sig. d' *Amontons* (*a*), reſterà però da aumentare la potenza non ſolo del terzo, ma di una ſerie di frazioni, che ſi eſporranno a ſuo luogo, per le quali poi alla fine la vera miſura della potenza eſſer doveva la metà di più, che non eſigeſſe il peſo del grave ſenza le reſiſtenze. Poichè per ſuperare quell' $\frac{1}{3}$ vi voleva una nuova forza, che è di $\frac{1}{9}$, e per ſuperare queſto $\frac{1}{9}$ ve ne voleva un' altra, che è di $\frac{1}{27}$, e così diſcorrendo all' infinito; indi è, che i cambiamenti immaginati in favore dell' argano, incontrando tutti così ſenſibili reſiſtenze, ſempre reſtava la potenza motrice ſoggetta ad eſſer troppo aggravata. Che ſe poi ſi voleſſe diminuire la detta reſiſtenza con aumentare aſſai la proporzione tra 'l vette dell' argano, ed il raggio del ſuo cilindro, allora potrebbe certamente alleggerirſi indefinitamente la potenza motrice; ma tale alleggerimento cagiona un nuovo inconveniente, che conſiſte nel gran conſumo del tempo, che allora ſarebbe neceſſario, giacchè ſempre tra' tempi e le potenze vi deve eſſere una determinata proporzione, dimoſtrandoſi nella Meccanica, che il viaggio del peſo reſiſtente al viaggio della potenza motrice ſtia come il valore di queſta al valore del peſo, cioè che ſtia il tempo al tempo, come il viaggio al viaggio, cioè come il valore al valore. Per il diſpendio delle operazioni meccaniche è la ſteſſa coſa, che un lavorante impieghi due ore di tempo per alzare un dato peſo, o per vincere una qualunque reſiſtenza, ovvero che due lavoranti ve ne conſumino un' ora ſola. E perciò l' aumentare la ragione del vette al ſemidiametro del cilindro non porta quel vantaggio, che alle prime apparenze ſi crederebbe.

Conveniva adunque alla ricerca dell' argano perfetto premetterne un' altra ſulle *minime reſiſtenze degli attriti*,

---

(*a*) *Memorie dell' Accademia Reale di Parigi* anno 1699.

ſenza di cui poco vantaggioſi ſempre ſaranno i concetti, e compenſi de' più valenti Meccanici.

Eſſendomi io applicato da tre anni in qua a fare gran numero di eſperienze appunto ſulla reſiſtenza degli attriti, ed avendo già ritrovato, che in alcune combinazioni di ſolido con ſolido, di ſuperficie con ſuperficie, di peſo con peſo, tali reſiſtenze potevano aſſaiſſimo diminuirſi, ſino a ridurle dalle centeſime 33 per cento alle ſole 3 centeſime, ed ancora aſſai meno (come ſi trova dimoſtrato in un mio Trattato ſu queſta materia); indi è che mi ſi è aperto così un campo per poter perfezionare aſſai più, che non è ſtato fatto fin' ora, la macchina dell' argano. Queſto è ciò, che io dimoſtrerò nella preſente Memoria. E per venirne a capo la dividerò in quattro parti.

La prima racchiuderà la deſcrizione dell' argano ordinario, ed il ſuo ſolito maneggio, cogl' inconvenienti che eſſo racchiude.

La ſeconda eſporrà la teoria di detto argano tanto ſenza la reſiſtenza degli attriti, quanto con la conſiderazione de' medeſimi.

Nella terza deſcriverò, come, ed in qual modo poſſa perfezionarſi l' argano in ciaſcuna ſua parte.

E nell' ultima dimoſtrerò, in qual modo nell' argano ridotto ſi tolgano gl' inconvenienti dell' ordinario, e quanto in eſſo ſi diminuiſcano le reſiſtenze degli attriti.

Parte I.

Deſcrizione dell' argano ordinario, ſuo maneggio, ed inconvenienti che s' incontrano.

L' argano ordinario, ſe voglia riferirſi alle macchine ſemplici della Meccanica, può ridurſi alla macchina *del Vette*, ovvero all' altra chiamata *Axis in Peritrochio*. Eſſo conſiſte

consiste in tre parti, delle quali è composto, cioè della sua cassa, o castello *M*, *M*, *M*, (*fig. I*) il quale è fatto per reggere, e sostenere le altre parti del suo *fuso*, detto altrimenti *Albero AB*, e finalmente delle sue *Manivelle GE*, *HF*.

Il fuso si fa girare sul suo pernio inferiore *Pp*, che ricavasi dal medesimo fuso, assottigliandolo alquanto. Tal pernio è ricevuto da un concavo simile ricavato dalla panchetta inferiore *Hb*, e sopra di essa riposa quel risalto, che lascia il pernio. La parte intermedia col fuso racchiusa tra le due panchette si fa di figura cilindrica *Bb*; alla medesima si avvolge per due, o tre volte il canapo, che colla sua estremità *D* va ad elevare il peso proposto, e nell' altra estremità *C* è ritenuto a stretta col fuso, per mezzo di uno, o due lavoranti *Ll*. Essi devono fare una tal forza, che il canapo resti sempre obbligato al fuso dell' argano colla vicendevole scabrosità del legno, e del canapo, giacchè se detto canapo girasse da sè attorno al fuso, non sarebbe possibile l' elevazione del dato peso. Il collo dell' argano *Nn* ancor esso è cilindrico, ma di minor diametro del subbio, o del fuso, giacchè deve esso girare sul concavo formato nella panchetta superiore *Oo*, colla quale esercita i suoi attriti insieme col pernio inferiore. Indi è, che tra 'l pernio ed il collo dell'argano formasi la resistenza relativa a' sopraddetti attriti. Vi è finalmente la testa dell' argano *Aa*, la quale si fa di forma quadrata, ed in essa si scavano due trafori pure quadrati per inserirvi le manivelle *GB*, *HF* della stessa figura, ma scantonata nelle quattro estremità per meglio adattarsi alle mani de' lavoranti.

La detta testata dee sostener la forza di quattro, e più lavoranti, che operano col potente momento del lungo vette. Indi è, che essa va fasciata tanto nell'estremità superiore, che inferiore di due cerchj di ferro di proporzionata grossezza, affinchè essi sostengano le forze

de' lavoranti, i quali ſenza un tal ſoccorſo ſquarcerebbero ben preſto la teſtata dell'argano, che è indebolita per mezzo de' due nominati trafori.

Il legname tanto del caſtello, quanto del fuſo, e manivelle ſi adopera del più forte, che ſi trovi, come di noce, di quercia, di leccio, o altro ſomigliante.

Il maneggio dell'argano conſiſte nelle rivoluzioni delle manivelle, e del fuſo, giacchè rivolgendoſi le prime *G*, *H*, *E*, *F* obbligano il ſubbio a girare attorno al ſuo aſſe, ed eſſendo a queſto ſubbio riſtretto il canapo, eſſo pure dee rivolgerſi attorno al fuſo, e perciò accoſtandoſi ſempre il punto *D* all' argano quando ſia preponderante la forza motrice, dee tirare il peſo, o la reſiſtenza che dee ſuperarſi.

Un tal ſemplice maneggio ci preſenta gl'inconvenienti, che ſi ſoffrono in tal macchina. Poichè primieramente il canapo nell' atto, che gira, ſarà obbligato o a ſcendere verſo la panchetta inferiore, o a ſalire verſo la ſuperiore, ed in tal diſceſa, o ſalita, eſſo ben preſto ſi troverà a ſtretta con dette panchine, e così l'operazione reſterà tutta ſoſpeſa. Per continuarla adunque convien legare, o allacciare il canapo con funicelle addoſſo alle taglie o ſemplici, o doppie, e tale operazione diceſi in termine d'arte *ammagliare*. Così l'argano reſterà libero, e ſgravato, e perciò il canapo ſi fa o ſalire, o ſcendere ſecondo il biſogno, per ricominciare da capo l'operazione interrotta. Un tale interrompimento accaderà più, e più volte nelle lunghe operazioni, e perciò eſſe ſaranno ſempre aſſai ritardate non ſenza ſcapito dell'Erario o pubblico, o privato; giacchè mentre il pontajo va ad ammagliare, e ſoſpendere la forza dell'argano, gli altri operanti, che ſpeſſo ſono in buon numero, ſtanno aſpettando inutilmente.

Un tale inconveniente rendeſi ancora più ſenſibile nella Nautica, e ſpecialmente nell'operazione importantiſſima di ſalpar le ancore in un vaſcello da guerra. Poi-

chè a tal fine principalmente sopra il primo ponte si costruisce un argano fortissimo, che si tiene nel secondo ponte per le operazioni meno rilevanti. Devesi perciò sospendere nell' argano doppio l' operazione di salpare un'ancora per elevare, o abbassare il canapo sulla superficie cilindrica del subbio, per poi ricominciare l'operazione.

Ma essendo le gomene de' vascelli così grosse, così rigide, e poco maneggevoli, che non è possibile il piegarle sul fuso dell'argano, si usa il compenso di un canapo secondario (a) che sia pieghevole per avvolgerlo al subbio. Un tal canapo si lega alla gomena fuor del vascello, e le sue cime si portano all'argano per avvolgerle al medesimo. Così rivolgendosi l' argano, la gomena per mezzo del canapo si trae verso il vascello. Quando essa però è già pervenuta colla sua legatura al bordo del medesimo, allora è necessario sciogliere il canapo, e volgere l' argano all' indietro, ed andare a far la seconda legatura in un punto inferiore per continuare l' operazione. Indi è, che dopo più e più interrompimenti tanto per regolare il canapo sul subbio, quanto per isciogliere, e rilegare il canapo a' punti inferiori della gomena, si perde un tempo prezioso, che qualche volta mette in pericolo il bastimento.

Al primo inconveniente si aggiunge il secondo già accennato, che è quello delle estranee resistenze degli attriti, le quali per le particolari circostanze sono assai considerabili. Si mettono a contrasto le fibre longitudinali del legno colle trasversali, come appunto succede tanto sul pernio, che nel collo dell' argano, e tal circostanza molto accresce le resistenze. Inoltre il cilindro dell' argano nella sua base si fa strisciare attorno alla

Iiii ij

(a) Il qual dicesi nella marina Francese *Tournevire*.

panchetta inferiore *Ff*, sulla quale riposa, e questi contatti sono sparsi per una notabil superficie, che consiste in una fascia circolare ben larga tra la panchetta ed il piede del subbio.

Il collo dell'argano *Ss* ancora esso ha una notabil superficie, che viene a contatto contrastando col concavo cilindrico escavato nel tavolone superiore *Ss*

Ordinariamente i lavoranti collocati all'estremità delle leve *G, H, E, F* talmente si aggravano sulle medesime nell'atto, che girano, che producono una nuova resistenza sul pernio inferiore dell'argano, e su quella fascia circolare.

Considerando tutte insieme le estranee resistenze degli attriti, esse ordinariamente oltrepassano la metà del peso resistente, ed assai spesso giungono a $\frac{3}{4}$ del medesimo. Indi è, che essendo proposto ad elevare coll'argano comune un peso di libbre 4 mila, in realtà per le imperfezioni di esso, e del suo maneggio vi vuole una forza motrice equivalente a 6, ed a 7 mila libbre. Indi è, che la spesa dell'operazione viene a ricrescere nella stessa proporzione del 4 al 7, e non di rado del 4 all'8.

Quantunque si possano dire estranei all'argano i bozzelli, e le taglie semplici, o doppie, pur nondimeno esse sempre accompagnano il maneggio del medesimo. Poichè la direzione del canapo dalla direzione orizzontale *DD* deve rivolgersi alla rusticale πP, deve poi passare per le taglie, dalle quali va a legarsi al dato peso per elevarlo. Ora i bozzelli, e le taglie regolate secondo il solito, risentono ancor esse una notabile resistenza per i loro particolari attriti. E tal resistenza unita a quella dell'argano comune assai spesso esigge una potenza motrice più che doppia di quella, che occorrerebbe senza la giunta delle resistenze. Sicchè in questa parte la meccanica dell'Architettura riesce assai difettosa.

PARTE II.

Teoria dell' argano ordinario, tanto ſenza le reſiſtenze, che con includervi le medeſime.

Quanto è ſtato fin' ora eſpoſto generalmente, convien dimoſtrarlo colla teoria. Or queſta ſenza l' ipoteſi delle reſiſtenze è aſſai ſemplice. Poichè facciaſi, come il braccio della leva al ſemidiametro del ſubbio, così il peſo da elevarſi al quarto termine: queſto, come ſi ſa, ci rappreſenterà il valore della potenza per metterſi in equilibrio col peſo reſiſtente. Onde aggiungendo alla potenza qualche valore di più, eſſa ſarà in grado di elevare il peſo contro la direzione de' gravi. (*a*)

Per paſſare alla ſteſſa teoria nell' ipoteſi delle reſiſtenze degli attriti, ſi contentano alcuni di aggiungere alla potenza una ſua terza parte, ſupponendo col Sig. *Amontons*, che tal parte ſia quella, che compete a queſto genere di reſiſtenza.

Così ſe il dato peſo da elevarſi foſſe di libbre 4000, ed il braccio del vette al ſemidiametro del cilindro foſſe come il 20 : 1, facendo, come il 20 : 1 = 4000 al quarto termine, queſto ſarebbe di libbre 200, e tale eſſer dovrebbe la potenza motrice ſenza l' uſo delle reſiſtenze. Se adunque queſte equivalgono alla terza parte del peſo, vi vorrà per eſſe la terza parte di più della potenza motrice, cioè altre libbre *66. 66* centeſime. Onde la potenza accreſciuta per ſupplire alle reſiſtenze degli attriti eſſer dovrebbe di libbre 266. *66* centeſime.

Una tal teoria è erronea per due maniere. Primiera-

(*a*) Avvertaſi, che al ſemidiametro del ſubbio intendeſi aggiunto quello del canapo.

mente, perchè accrefciuta che fia la refiftenza di quel terzo, effo genera la fua particolar refiftenza, e quefta ne genera una terza, e poi la quarta, la quinta, all'infinito, come già è ftato accennato.

Tutte quefte refiftenze formano una ferie, la quale bifogna fommare, e tal fomma è quella, che dee aggiugnerfi alla potenza motrice. Sia il pefo da elevarfi $= P$, fia la refiftenza $= a$. Onde farà $\frac{P}{a}$ il primo termine della refiftenza. A quefto devono aggiungerfi tutti gli altri $\frac{P}{a^2}$, $\frac{P}{a^3}$, $\frac{P}{a^4}$ ecc. Intorno a tal ferie nel mio Trattato fulle refiftenze degli attriti dimoftrafi, che $\frac{P}{a-1}$ è uguale alla fomma di tutti i termini decrefcenti all'infinito. Indi è, che facendo $a = 3$, farà $a - 1 = 2$. Onde la refiftenza degli attriti farà $= \frac{P}{2}$ cioè farà uguale alla metà del pefo da elevarfi.

Onde nell'ideato efempio il valore della potenza farà non già di $266 \frac{2}{3}$, ma bensì di 300 parti, o libbre.

Il fecondo equivoco di quella teoria confifte in ciò, che la proporzione del vette al raggio del cilindro non è la fteffa, che quella del medefimo vette al femidiametro del pernio, giacchè quefto fi fa fempre minore di quello del fufo, o del cilindro. E dall'altra parte la refiftenza degli attriti fi valuta ful pernio, e ful collo dell'argano, e non già ful cilindro. Indi è, che dovendo diminuirfi la refiftenza, effa dee fcemare nella ragione del vette al raggio del pernio, e non già a quella del cilindro. Sia adunque quefta feconda ragione come il 25:1 e facciafi come il 25 : 1 = libbre 1333 al quarto termine, quefto farà di libbre 55, che aggiunte alla potenza fanno libbre 255, e non 266. E' ftato adoperato

il terzo termine dell' analogia di libbre 1333 ſupponendo la terza parte di libbre 4000.

Ma per correggere il primo errore deve adoprarſi $\frac{1}{2}$ P, cioè libbre 2000. Onde l' analogia ſomminiſtrerà per parte degli attriti l' aumento della potenza

di libbre 80.	80
e per il momento del peſo reſtano libbre	200
Onde la potenza colle reſiſtenze ſarà equivalente a libbre	280.

Non è ſtata però ancora incluſa in queſto calcolo la particolar circoſtanza delle fibre del legno, che contraſtano ſcambievolmente. Non è ſtata conſiderata la ſuperficie di tanti contatti tanto nel piede, che nel collo dell' argano, per cui io credo che la reſiſtenza debba valutarſi non già di $\frac{1}{3}$ ma di $\frac{1}{2}$, e qualche coſa di più. Ora in tale ipoteſi la ſerie $\frac{P}{a-1}$ ſarà uguale a $\frac{P}{2-1}$ $= \frac{P}{1}$, cioè la reſiſtenza riferita al pernio dell' argano ſarà uguale al peſo da elevarſi, cioè alle libbre 4000. E diminuendole nella ragione del 25 : 1, ſi dedurrà la reſiſtenza riportata alla potenza di libbre 150, che unite al valore della potenza ſemplice di libbre 200, forma la potenza totale colle reſiſtenze di libbre 350.

L' operazione dell' argano è affatto indiviſibile da quella di più pulegge, le quali per mezzo di un canapo rivolgono le direzioni del peſo traente. E quantunque le reſiſtenze di tali pulegge ſieno eſtranee a quelle dell' argano, pure eſſe ne ſono inſeparabili. Nella fig. I. oſſerviſi, che il canapo dal ſubbio dell' argano dee portarſi alla puleggia π, e per mezzo di eſſa dee ſalire alla ſeconda puleggia P, per la quale paſſando, dee diſcendere per attaccarſi al dato peſo PP'. Indi è, che la potenza motrice per ſuperare il peſo PP', elevandolo al

punto destinato di una fabbrica, dee trasmettere la sua azione prima per l' argano, e poi per le due pulegge π,P. Ma nell' operazione delle due pulegge incontrasi la sua resistenza, che sarà bene rintracciarla per complemento della presente materia.

Convien dunque osservare, che non solamente il peso PP' è aggravato sul pernio della puleggia P, ma la forza, colla quale il canapo opera dalla parte opposta, eguaglia almeno lo stesso peso. Indi è, che se il peso PP' facciasi di libbre 4000, il pernio almeno sosterrà il doppio di detto peso. Ho detto *almeno*, perchè detto canapo non solo deve equilibrare il peso PP', ma dee ancora superare la resistenza. Ma sia per ora il carico del pernio di libbre 8000; e sia secondo il consueto la resistenza di $\frac{1}{3}$ del peso. Ma per le ragioni dianzi addotte invece di $\frac{P}{3}$ deve adoperarsi l' altra frazione $\frac{P}{2}$. Onde sarà $\frac{8000}{2} = 4000$.

Dovendo adunque riportare una tal resistenza dal pernio della puleggia alla sua circonferenza, essa va diminuita, come ognun sa, nella proporzione del di lei diametro al diametro del suo pernio. Secondo le comuni pulegge una tal proporzione rilevasi, come il 5 : 1. Ma per favorire piuttosto il caso delle resistenze, ci gioverà di adoperare la proporzione del 6 : 1. Ed in tale ipotesi essa sul giro della puleggia si troverà ridotta a libbre 666 $\frac{2}{3}$. Indi è, che il canapo $P\pi$, non solamente sarà aggravato, e forzato colle date libbre 4000,
ma eziandio dalle altre libbre . . . . . . 666 $\frac{2}{3}$

Sicchè il totale sarà equivalente a libbre 4666.66 cent. E con tal forza esso va a passare nella seconda puleggia π, avvolgendosi in essa, non già per la sua semiperiferia, come nella prima, ma bensì per un arco di quadrante.

Pertanto

Pertanto dovremo prima raddoppiare la predetta pressione, e poi diminuirla nella ragione del diametro del cerchio alla corda del quadrante.

Raddoppiandola pertanto, essa sarà di libbre 9333.33

Essendo prossimamente la proporzione del diametro alla corda del quadrante come il 1000 : 707 prossimamente, avremo la seguente analogia:

Come 1000 : 707 = 9333 . 33 al quarto termine. Questo tornerà di libbre . . . . 6598 . 66
che prossimamente può farsi senza error sensibile di libbre . . . . 6598 . 00

La cui metà sarà di libbre . . . . 3299 . 00

Or supponendo di bel nuovo, che la proporzione della seconda puleggia a quella del pernio sia come il 6 : 1, dividendo il sopraddetto numero per il 6, avremo per la resistenza della seconda puleggia libbre 549 . 5

Sicchè sommando le resistenze degli attriti col dato peso da elevarsi sarà

Resistenza per la prima puleggia *P* lib.	666 . 66 cent.
Resistenza per la seconda puleggia .	549 . 50
Valore del peso da elevarsi	4000 . 00
Totale per la forza del canapo, che portasi all' argano libbre	5216 . 16 cent.

Dal che deducesi, che la potenza motrice applicata all' argano deve superare libbre 1216 di più, che non sarebbe per superare il peso PP', che si propone ad elevarsi.

Resta ora a calcolare il valore della potenza motrice per superare le due resistenze del peso, e degli attriti.

Ritornerà la serie già descritta $\frac{P}{a-1}$, la quale nel caso presente è uguale a $\frac{P}{2}$

Onde pigliando la metà della descritta somma, ed

aggiungendola al totale, si formerà il valore del peso, e degli attriti, che debbono vincersi dalla potenza motrice.

Sarà dunque l' antecedente pressione di libbre 5216, come più prossima togliendo la frazione.

Sua metà 2608

Somma delle due partite 7824

Avvertasi però, che non essendo uguale il pernio dell' argano al diametro del cilindro, per riportare le due resistenze all'estremità della leva, converrà adoperare due diverse proporzioni. La prima delle quali esser dee quella dianzi adoperata come il 20 : 1. Onde facciasi

Come il 20 : 1 = 5216 al quarto termine, il quale ci tornerà di libbre 260.80

Per la seconda proporzione dee valere l' altra analogia come il 25 : 1 = 2608 al quarto termine . . . . , ... 104.32

Onde il vero valore della potenza sarà di libbre . . . . 365.12 cent.

Quando senza le calcolate resistenze essa era di libbre 200.00

Sicchè per le resistenze si aumentano libbre 165.12

Per accostarci meglio alla solita proporzione degli argani, invece della parte ventesima, più si adatterebbe la parte decima, ed invece della parte venticinquesima, la sua metà cioè il $12\frac{1}{2}$ sarebbe molto più al caso. In tal nuova ipotesi basterà raddoppiar le partite.

E perciò il valore della potenza senza alcuna resistenza esser dovrebbe di libbre 400.00

Ed includendovi le due resistenze delle pulegge, e quella dell' argano, la predetta potenza deve ascendere al valore di libbre . . . . 730.24 cent.

Dal che comprendesi, quanto di più la potenza deve aggravarsi per superare le tre resistenze degli attriti, cioè di due semplici pulegge, e del fuso dell' argano, le quali importano libbre . . . . . 330 . 24 cent.

Troppo di più importerebbono, se invece delle semplici pulegge si adoperassero le taglie doppie, come assai spesso succede.

Calcolo delle resistenze dell' argano senza l' annesso delle pulegge.

Quantunque sia inseparabile l'uso dell' argano da quello delle pulegge, pure per qualche rarissimo caso gioverà il calcolo delle resistenze del solo argano. Il che si farà nelle stesse ipotesi già maneggiate.

Essendo adunque il peso P di libbre 4000, ed essendo nel caso presente $\frac{P}{a-1} = \frac{1}{2}P$, è manifesto, che la prima proporzione sarà

Come $10 : 1 = 4000$ al quarto termine, che importerà libbre . . . . 400. Ed essendo la seconda proporzione, come $12\frac{1}{2}$: $1 = 200$ al quarto, questo ci tornerà di libbre . . . . 160. Onde il valore della potenza esser dovrebbe lib. 560.

Nelle altre ipotesi maneggiate sul principio di questo articolo la potenza è stata calcolata di lib. $266\frac{2}{3}$

Di libbre 255

E finalmente di lib. . . . . . 280, come potrà vedersi. Ma essendo doppie le proporzioni del vette al semidiametro del fuso, ed a quelle del pernio, se in esse si sostituisce la prima come 10:1, e la seconda come $12\frac{1}{2} : 1$, allora il valore della potenza ne' tre casi esaminati sarebbe doppio, e così

Nella prima ipoteſi ſarebbe di libbre . . 533 $\frac{1}{7}$
Nella ſeconda 510
E nella terza di libbre . . . . 560, che coincide coll' ultimo calcolo. Queſto è il più giuſto, correggendo la teorica. Onde ſempre ſarà notabiliſſima la reſiſtenza, che ſoffre l' argano, benchè ſi tralaſcino le reſiſtenze delle pulegge, che ſempre, o quaſi ſempre accompagnano le operazioni meccaniche.

PARTE III.

In qual modo poſſa ridurſi, e perfezionarſi l' argano in ciaſcuna ſua parte per diminuirne le reſiſtenze.

Supponendo le reſiſtenze valutate di $\frac{1}{3}$ de' peſi aggravati ſecondo la regola comune, la Meccanica non ha compenſi per diminuire le reſiſtenze, ſe non che cambiando le proporzioni, che corrono tra 'l braccio della leva ed il ſemidiametro del cilindro, tra la ſteſſa leva ed il ſemidiametro del pernio, tra 'l diametro delle pulegge e quello de' loro pernj. La prima proporzione, come è ſtato avvertito, non può aumentarſi per il conſumo del tempo maggiore. Lo ſteſſo diceſi della ſeconda a motivo, che facendoſi il pernio dello ſteſſo legname del cilindro, con un minor diametro, ſe queſto ſi diminuiſca non reſiſterà alla violenza dell' argano, al quale aſſai ſpeſſo ſi applicano otto lavoranti. Suppongaſi il braccio della leva di pollici 60, cioè piedi 5 parigini; la ſua parte venticinqueſima non ſarà più di pollici 2 $\frac{2}{5}$. Onde il diametro ſarà di pollici 4 $\frac{4}{5}$, che certamente non può farſi minore ſenza il pericolo di ſtroncarſi nel più forte maneggio degli argani.

Per aumentare una tal proporzione, altro non reſterebbe, ſe non che formare il detto pernio di ferro, e farlo girare al di ſotto nel ſuo rallino di metallo, che così potrebbe farſi il diametro di pollici 2, ed il ſe-

midiametro di 1. Indi è che la reſiſtenza ſarebbe diminuita aſſai più di prima, cioè nella ragione del 60 : 1, e non già del 60 : $2\frac{2}{5}$. Convien però riflettere, che non così può farſi al collo dell' argano, il quale dee reſtare nello ſteſſo fuſo di legname, e non può diminuirſi più del conſueto. E ſiccome in detto collo ſi appoggia ora la metà, ed ora quaſi tutto il peſo, come ſuccede quando il canapo è ſalito alla ſua eſtremità; indi è, che il vantaggio ſarebbe tenue, e la reſiſtenza ſarebbe varia nel ſalire, che fa il canapo dall' infimo al ſupremo punto del fuſto cilindrico. Quando tal canapo ſi trovaſſe nell' infima ſua rivoluzione, la reſiſtenza ſarebbe la minima, perchè il tutto quaſi ſi aggraverebbe al pernio di ferro; ma quando la rivoluzione ſaliſſe all' altezza maggiore, la reſiſtenza ſarebbe la maſſima, perchè ivi tutta la forza ſi appoggia al collo dell' argano, che reſterebbe come prima.

Potrebbono ancora aumentarſi le proporzioni delle pulegge, le quali potrebbono farſi come il 10 : 1 invece del 5 : 1. Ma convien conſiderare, che le pulegge devono eſſer maneggevoli, e di peſo mediocre, affinchè i pontaj poſſano traſportarle da un luogo all' altro, e maneggiarle con facilità. Se adunque una puleggia invece del diametro di pollici 5 lo aveſſe di 10, molto ſi accreſcerebbe il ſuo peſo unito a quello della ſua caſſa, che ancor eſſa deve aumentarſi.

Indi è che conſiderato il tutto, e conſideratolo ſecondo la pratica, poco profitto può ſperarſi dal modificare le accennate proporzioni, e troppo vi vuole per diminuire notabilmente il valore delle reſiſtenze calcolato nelle libbre 263.

Sul rifleſſo di tali ragioni io ho conchiuſo, che tutta l' induſtria meccanica debba impiegarſi nella diminuzione delle aſſolute reſiſtenze, le quali invece di eſſere del 33 per cento, ſi riducano al 10, all' 8, al 5 per cento. Per tale oggetto io ho intrapreſa una fa-

tica di anni tre, ne' quali ho tanto variate le combinazioni de' noſtri ſolidi, che finalmente con qualche combinazione più felice mi è riuſcito di ridurre le reſiſtenze alle ſole tre centeſime, ed ancora meno, come ho accennato nell' introduzione.

Il riſultato delle mie lunghe eſperienze ſarà pubblicato in un Opuſcolo a parte ſu queſta materia. La più felice combinazione de' noſtri ſolidi ſi è quella, nella quale ſi metta a contraſto la ſuperficie del ferro pulito colla ſuperficie dell' olivo ſalvatico perfettamente ſtagionato, ma coll' untuoſità del ſego, o di ſimil altra materia. Indi è che la reſiſtenza, che io adopererò, non ſarà di $33\frac{1}{3}$ centeſime del peſo aggravato che ſia di libbre 100, ma bensì di ſole libbre 3

Da tal nuova proporzione naſce, che dato un qualunque peſo da elevarſi, o qualunque reſiſtenza da ſuperarſi, la reſiſtenza aſſoluta ſarà $= \frac{P}{33\frac{1}{3}}$. E ſiccome nella formola per ſupplire alla ſerie delle reſiſtenze deve toglierſi l' unità per eſſer la ſomma $= \frac{P}{a-1}$, indi è che facendoſi $a = 33\frac{1}{3}$ ſarà $\frac{P}{a-1} = \frac{P}{32\frac{1}{3}}$, e per abbondare in cautela ſi farà la ſerie $= \frac{P}{32}$. Da queſto primo aſpetto argomentaſi il vantaggio rilevante delle ſperimentate reſiſtenze, giacchè invece della formola $\frac{P}{2}$ ſi adopera ora l' altra formola $\frac{P}{32}$, cioè le reſiſtenze ſi riducono alla parte ſediceſima delle antiche, e comuni, in parità di circoſtanze.

Serve di aver premeſſo queſti nuovi Elementi delle

resistenze per poter comprendere le ragioni delle variazioni da me introdotte nell'argano. Gli effetti di tali mutazioni saranno poi dimostrati nell' ultima Parte.

Incominciando adunque a descrivere qual sia la miglior forma dell' argano, quali i compensi meccanici per renderlo più perfetto, esso vien rappresentato dalla fig. II, nella quale potrà osservarsi in primo luogo, che il telajo inferiore *M*, *M*, *M*, *M*, il qual forma la pianta, e la base di questa macchina, è stato da me tenuto di grossezza, e stabilità maggiore del consueto. In secondo luogo, che ho raddoppiato le cosce dell' argano *Ee*, *Ee*, *Ee*, *Ee*, le quali non solamente sostengono l' argano dalla parte destra, ma eziandio dalla sinistra, ricevendo nel centro, e non già da una parte, come è consueto, il fuso dell' argano *AB*. Tal cambiamento ho introdotto, per avere osservato, che nell' argano ordinario, quando il canapo si trova ne' punti superiori del cilindro, come nel punto *K* (*fig. I*), allora la resistenza del peso da elevarsi, e degli attriti da superarsi viene a rovesciar l' argano, il quale, come si sa, verso la parte opposta al peso dee raccomandarsi, e fissarsi a certi paletti piantati in terra, affinchè resti perfettamente immobile nell' operazione architettonica. Or tal' accidente non può mai succedere nel nuovo argano della fig. II, giacchè essendo esso fiancheggiato tanto dalla parte anteriore *MM*, quanto dalla parte posteriore *M'M'*, ne viene in conseguenza, che esso non può restar mai ribaltato, e rovesciato da qualunque forza de' pesi da elevarsi. Vi è ancora l' altro comodo, che esso può rivoltarsi, come si vuole, mettendolo in azione o dall' una, o dall' altra parte.

La panchetta superiore *CD* va formata di tutta stabilità, e di noce durissima, per tener fermi gl' incastri delle cosce *EE*.

Dovendo fare il fuso dell' argano o di noce, o di quercia, o di altro legname forte, ho creduto necessa-

rio di diminuire la gran reſiſtenza, che fa il legname, quando contraſta con altro legname, faſciando con un liſcio cerchio di ferro la concavità della panchetta *CD*, ſulla quale deve aggirarſi il collo dell' argano in *aa*, avendo dalle mie nuove ſperienze rilevato, che il ferro liſcio combinato con legname forte, e con unto di materie graſſe, ſpecialmente di ſego, ſoffre piccoliſſima reſiſtenza. La minima di tutte ſi è quella del legname di ulivo ſalvatico, del quale potrebbe formarſi il ſuſo dell' argano.

La medeſima cautela e diligenza va oſſervata nel pernio inferiore dell' argano *Uu*, il quale deve farſi poſare al di ſotto ſu di una lamiera di ferro, correggendo in queſto gli argani comuni, ne' quali vien traforata totalmente la panchetta inferiore *Oo*, facendo contraſtare ſulla ſuperficie della medeſima il labbro inferiore dell' argano *bb*. Oltre al pernio inferiore deve neceſſariamente la ſua ſuperficie laterale venire a contatto colla concavità cilindrica della panchetta; e perciò una tal concavità dee ſimilmente faſciarſi con cerchio ben limato di ferro, la cui altezza non oltrepaſſi la miſura di un pollice. Con tal coſtruzione l' orlo inferiore del fuſo contraſſegnato *bb* non può mai venire a contatto colla ſuperficie ſuperiore della panchetta *Oo*, ma il pernio *Uu* o deve poſare ſul piano inferiore della lamiera, o deve appoggiarſi ſul deſcritto cerchietto di ferro.

Allo ſteſſo modo la teſtata dell' argano per la parte ſua inferiore *mm* dee reſtar ſollevata ſopra il piano *CD* della panchetta ſuperiore; e così il collo dell' argano *aa* non dovrà riſentire altro ſoffregamento fuori di quello, che proviene dalla ſuperficie del cilindro appoggiata alla ſuperficie del cerchietto di ferro.

Per ovviare al graviſſimo inconveniente degli argani ordinarj, ne' quali, come è ſtato avvertito, il canapo deve ora ſcendere, ora ſalire ſul fuſo del medeſimo, obbligando così a ſoſpendere il lavoro per rimettere il canapo

napo ne' punti opportuni, mi è fovvenuto il compenfo meccanico di fafciare il detto cilindro con una fafcia curvilinea di legname *Ff*, fulla quale avvolgendofi il detto canapo, effo fcende, o fale per una piccola altezza; fulla quale poi non potendofi foftenere a motivo della curvità, che lo porta fui pianetti molto inclinati, effo da sè medefimo o fale, o fcende per rimetterfi ne' punti intermedj delle curve, e perciò fenza mai fofpendere l' operazione meccanica, il canapo rimettefi da sè medefimo ne' medefimi punti. Qualche volta, fecondo le circoftanze, gioverà d' ajutare lo fteffo canapo con un piccolo martello di legno, affinchè difcenda più prefto, che fia poffibile.

La detta fafcia concava fi rapprefenta nella figura II in maggior proporzione col titolo *curve del fufo*. Di tali curve fe ne formano otto, o dieci fecondo il bifogno, e con effe fi fafcia il fufo cilindrico inchiodandole al medefimo con chiodi acciecati nel legname, affinchè non facciano alcuna refiftenza, e non confumino il canapo.

Sulla teftata dell' argano fegnata *A* fi formano i due trafori quadrati, per i quali devono paffare le due manivelle *Pp*, *Hh*, le quali devono effere di lunghezza tale, che i lavoranti girando attorno all' affe dell' argano poffano facilmente fcanfare il fuo telajo *MM*, *MM*.

E quantunque la loro lunghezza poffa giovare per follevare la potenza motrice, diminuendo così la fpefa di più lavoranti, contuttociò non dovremo eccedere in tal lunghezza, effendo cofa evidente, che quanto più effa fi eftende, tanto è maggiore il tempo, che efigge il giro maggiore de' lavoranti, i quali fi avanzano fempre con paffo uniforme. Confiderando tutte le circoftanze di quefta macchina, e di quefto lavoro, io ho rinvenuto coll' efperienza, che la proporzione, che corre tra la lunghezza della leva ed il femidiametro del fufo, ful quale il canapo fi avvolge, può tenerfi fra i due

limiti della parte decima, o al più della quindicesima, cioè il semidiametro del fuso facciasi di pollici 4, la lunghezza della leva *AH* potrà farsi di pollici 40, e potrà ancora farsi giugnere a pollici 60, che fanno piedi 5 parigini. Nel primo limite la potenza motrice ridurrassi alla parte decima del peso da elevarsi, colle sue resistenze, e nel secondo, e più alto limite detta potenza motrice sarà di una parte quindicesima.

Vero è, che nell' atto del lavoro non può osservarsi una precisa proporzione, giacchè i lavoranti, quando son raddoppiati, operano con leve maggiori, o minori, secondo i diversi punti delle manivelle, a' quali essi vanno applicando le loro mani, e non possono tutte riunirsi in un punto solo. Indi è, che per mettersi al sicuro dell' impresa, dovrà sempre l' architetto formare il suo calcolo sul vette minore, per non trovarsi deluso nell' atto dell' operazione.

Lascerò di descrivere minutamente alcune altre minori avvertenze, le quali saranno ben note agli architetti, e solamente risolverò il dubbio, che potrebbe nascere sulla fascia concava già descritta *Ff*.

Domandasi adunque in qual punto del cilindro debba essa collocarsi, cioè, se torni bene di collocarla nel punto intermedio fra la panchetta inferiore e superiore, ovvero in altro punto inferiore verso *B*. Il punto intermedio gioverebbe per distribuire ugualmente le due resistenze, la prima delle quali consiste nel pernio inferiore dell' argano, e la seconda nel collo superiore *aa*. Poichè è notissimo per la Meccanica, che le due pressioni restano in ragion reciproca delle distanze de' due punti del contatto dal punto della potenza. Così, se il canapo, ovvero la fascia *Ff* si facesse salire sull' estremità superiore del cilindro addosso alla panchetta *CD*, allora la massima resistenza la soffrirebbe il collo dell' argano *aa*, mentre la minima si porterebbe al pernio inferiore *bb*. E per converso, se si facesse scendere la fa-

ſcia concava verſo il punto B, allora la maſſima reſiſtenza tornerebbe ſulla punta inferiore dell'argano, e la minima ſul collo ſuperiore.

In ordine al valore delle due reſiſtenze poco, o punto vi corre, ſe la faſcia ſi collocaſſe nel mezzo, ovvero ſe ſi portaſſe ne' due eſtremi punti, o ſuperiore, o inferiore. La giuſta ſoluzione di tal problema dipende dalla ſerie delle reſiſtenze reſpettive, delle quali ora non occorre ragionare: e perciò per riſolvere il preſente dubbio ſoggiugnerò ſolamente, che in pratica torna aſſai comodo, che detta faſcia ſia collocata piuttoſto verſo la parte inferiore B, e ciò a motivo, che i lavoranti nelle loro rivoluzioni attorno all' aſſe dell' argano poſſano più facilmente cavalcare il canapo FQ ſenza il minimo perdimento di tempo. Si ſa, che il canapo da una parte va verſo il primo calceſe, o puleggia π (*fig. I*). Onde queſta parte di canapo DD deve ſaltarſi da' lavoranti, che vanno attorno dell' argano. L' altra eſtremità oppoſta alla prima è ſoſtenuta da una potenza Ll, la quale tiene a ſtretta detto canapo, affinchè non giri liberamente ſul ſubbio, e perciò i lavoranti ſono obbligati a cavalcare ancora ſulla ſeconda eſtremità del canapo. Quando adunque queſto canapo ſi collocaſſe ad un' altezza notabile, i ſucceſſi, e continui ſalti de' lavoranti, tanto da una parte, che dall' altra verrebbero a ritardare il lavoro. Ma non così ſuccede, quando il canapo quaſi rade il terreno.

Ora rifletaſi, che nell' argano ordinario, ſalendo il canapo dal punto inferiore al ſuperiore, dovrà ſempre ſuccedere l' inconveniente del ritardamento, o almeno nelle maggiori altezze del canapo, e tale inconveniente pure ſi toglie nel nuovo argano, tenendo più baſſa la faſcia curvilinea.

Non laſcerò ancora di avvertire, che alcune volte il fuſo dell'argano rieſce di tal diametro, che in eſſo può eſcavarſi quella faſcia curvilinea, ſenza i riſalti de' re-

goli incurvati, i quali portano nella coſtruzione un lavoro più lungo.

Mi ſi domanderà finalmente di qual qualità, e natura eſſer poſſano quelle curve, dal cui rivolgimento vien generata la ſopraddetta faſcia. Riſponderò, che ſenza entrare in un eſame lungo, ed inutile potremo formare dette curve di archi circolari alquanto minori di un mezzo cerchio, come ſarebbe di gradi 140, o poco più, giacchè in tal graduazione s' incontrano ſempre tali inclinazioni, che baſtano per far ſalire, o diſcendere i canapi, che è l' unico oggetto di ſomigliante coſtruzione. Nel caſo preſente la ruvidezza della ſuperficie maggiore, o minore fa sì, che il canapo ſalga ora ad altezza maggiore, ed ora minore; ſempre però le ordinarie reſiſtenze ſon tali che quando il canapo dal vertice della curva è ſalito per gradi 50, ovvero 60, ricade da sè medeſimo, ritornando allo ſteſſo punto del vertice, e perciò eſſo non ſale giammai verſo i gradi 70.

Premeſſa adunque la nuova coſtruzione dell' argano, reſtano evidenti i ſuoi vantaggi ſopra l' argano comune, cioè

Primieramente, che le ſue reſiſtenze riduconſi alla parte ſediceſima, e ancor meno, delle reſiſtenze comuni.

Secondariamente, che non mai s' interrompe il lavoro per abbaſſare i canapi, ammagliando le taglie, come ſuccede nel metodo ordinario.

In terzo luogo, che eſſendo il fuſo dell' argano ſoſtenuto a deſtra, e ſiniſtra, ſi ſugge il pericolo che ſia roveſciato.

In quarto luogo, che reſtando il canapo aſſai baſſo preſſo il terreno, vien rimoſſo l' inconveniente de' ſalti de' lavoranti per cavalcarlo.

In quinto luogo, che eſſendo ſoſtenuto il pernio dell' argano ſul fondo della panchetta con laſtra di ferro ſi sfuggono così i gran contatti, che ſoffre l' argano co-

mune, arrotandosi, e strisciando sulla superficie della panchetta inferiore.

L' altro inconveniente, che è tutto proprio dell' architettura navale per le grosse gomene, che in essa si adoperano nella maggior parte delle operazioni nautiche, e specialmente nel salpar le ancore, non pare che possa totalmente sfuggirsi, o rimediarsi, giacchè non essendo possibile, che la gomena per la sua grossezza, e ruvidezza si avvolga al fuso dell' argano doppio, riuscirà sempre indispensabile, che alla detta gomena ora si attacchi, ed ora si sciolga quel canapo secondario, chiamato nella marina francese *Tournevire*, che nel nostro volgare direbbesi *gira e tira*. Indi è, che per tale inconveniente altro compenso non potrebbe rinvenirsi, se non quello di facilitare, ed abbreviare l' operazione, che si fa di legare, e poi sciogliere dalla gomena il canapo secondario. Ripensando adunque a tal meccanismo, mi parrebbe, che potesse molto diminuirsi il tempo per via di due mezzi cilindri imperniati con opportune cerniere, e scavati al di dentro secondo le spire della gomena, i quali mezzi cilindri potessero facilmente aprirsi, o serrarsi per mezzo di due viti di ferro. Se adunque si fissasse il canapo secondario a' detti due mezzi cilindri, essi potrebbono trasportarsi da' punti superiori a' punti inferiori della gomena con aprire solamente, o con serrare due viti di ferro. Il che certamente si ottiene in pochi secondi di tempo. Ma non così succede nel metodo presente, nel quale il canapo secondario deve prima legarsi alla gomena con funicelle dette comunemente *garzette*; e quando queste colla gran forza si sono fortemente annodate, convien poi disciogliere per rimetterle ne' punti inferiori della gomena, e continuare così l' operazione di salpar l' ancora.

Affinchè il mio meccanismo più chiaramente s' intenda, sia nella fig. III la gomena *AA'*, intendendo, che

l'eſtremità A corriſponda al baſtimento, che ſalpa l'ancora, mentre l'altra eſtremità A' corriſponde all'ancora, che ſi giace ſul fondo del mare. Secondo il preſente metodo il canapo ſecondario legaſi alla gomena coll' uſo delle garzette, per eſempio, nel punto mm', e ciò per fiſſare al detto punto il canapo ſecondario mn, $m'n'$, il quale colle due eſtremità nn' portaſi all'argano doppio del baſtimento. Or quando coll' operazione del medeſimo i punti mm' ſon già arrivati al bordo della nave, allora conviene ſciogliere la legatura, e poi riportarla di bel nuovo verſo la parte dell' ancora per far la ſeconda legatura, e la ſeconda operazione. Pertanto faccianſi due mezzi cilindri di forte legname Cc, Bb, nel mezzo de' quali, laſciandovi una ſufficiente groſſezza di legno, ſi eſcavino le ſpire concave Pp, Pp ecc. in modo tale, che la parte conveſſa della gomena poſſa combagiare colle ſpirali concave de' cilindri. Si adattino a' medeſimi in quattro ſtaffe di ferro non ſolamente le due cerniere Hh, ma eziandio i quattro braccioli Dd, Ee, in forma tale, che ne' due primi reſti eſcavata la madrevite, e ne' due ſecondi i maſchj della medeſima Gg, i quali abbiano la loro gruccia, o manico per ſerrargli con forza addoſſo a' due braccioli Dd. Se ora ſi concepiſca, che tal macchinetta ſi adatti alla gomena, faſciandola per mezzo delle cerniere Hh, e poi ſerrandola addoſſo colle due viti Gg, eſſa reſterà fortemente fiſſata addoſſo alla gomena ſenza poter traſcorrere a motivo delle ſpire, che reſtano ſerrate l'una coll' altra, cioè le parti concave colle reſpettive conveſſe. Attaccando pertanto a tal macchinetta il canapo *tournevire*, inſiem con eſſo potrebbe facilmente traſportarſi, e fermarſi nella gomena con un ſemplice giro della vite, che può allentarſi, e riſerrarſi in poche battute di polſo. Perciò detta macchinetta potrebbe acconciamente chiamarſi il *conduttor nautico*, non già conduttore di materie elettriche, o fulminee, come la moder-

na Fisica va speculando, ma bensì conduttor materiale della gomena, che con esso è trasportata dal fondo del mare nella nave. Questo è uno de' compensi per abbreviare notabilmente il tempo ben lungo, che nel metodo ordinario rendesi necessario per salpare un' ancora. Forse da tal meccanismo altri ne nasceranno più brevi, e più semplici; ma il presente conduttore non mi pare nè molto lungo, nè molto composto. Sono sempre necessarj de' tentativi, affinchè da essi risulti il miglior meccanismo adattato al bisogno.

PARTE IV.

Che l' argano nuovamente ridotto tolga gl' inconvenienti dell' antico, e che in esso le resistenze riescano tenuissime.

Da quanto è stato esposto nella terza parte apparirà, che co' compensi presi vengano a togliersi, o almeno diminuirsi notabilmente gl' inconvenienti, che incontra l' argano comune. L' esposizione medesima de' vantaggi dell' argano ridotto basta per convincer tutti di tal verità. Onde per non dilungarmi di vantaggio solamente dimostrerò col calcolo quanto siano tenui le resistenze, che resterebbono nell' argano ridotto. E' stato accennato, che le resistenze antiche a quelle del nuovo argano siano nella ragione del 16 : 1, cioè, che queste siano sedici volte minori. Il che nasce dalla formola $\frac{P}{a-1}$, la quale nell' argano comune è di $\frac{1}{2}$, e nell' argano ridotto è di $\frac{1}{32}$. Ma non così succede in tutte le operazioni dell' argano, essendo diversa tal proporzione, quando si aggiungono le taglie, o pulegge, che sempre, o quasi sempre si adoperano. La teoria è la medesima, che dianzi è stata maneggiata nella parte *II*, e solamente varia il valore della resistenza. Onde sarà

Calcolo delle resistenze dell' argano ridotto secondo le nuove sperienze includendovi le due pulegge.

Sia, come dianzi, il peso *PP'* di libbre 4000. E' manifesto per le ragioni addotte, che il pernio della puleggia *P* resterà aggravato da una doppia pressione, equivalente a libbre 8000. Per le nuove sperienze esse dovranno dividersi per 32, e perciò la resistenza degli attriti del pernio di detta prima puleggia sarà di libbre 250.

Ora riducendo questa resistenza alla circonferenza della puleggia, facciasi, come il 6 : 1 = 250 al quarto termine, che sarà di libbre . . . . 41.33 centesime.

Passando pertanto l' energia del peso unita a quella della resistenza alla seconda puleggia π essa sarà di libbre . . . . 4041.33 centesime, e tal forza dee raddoppiarsi per avere la vera pressione della seconda puleggia, la quale sarà di libbre 8082.66 centesime. Ancor questa pressione, per dedurre la resistenza, dee dividersi per il solito divisore 32, e così resteranno libbre 252.60.

Ma perchè nella seconda puleggia π il canapo passa soltanto per un arco di quadrante, e non già per la mezza circonferenza, come già è stato avvertito; perciò il detto valore dovrà diminuirsi per le dimostrazioni del mio Trattato sulle resistenze nella ragione del 1000:707 prossimamente, e con tal diminuzione resteranno libbre . . . . 178. 58 centesime.

Queste debbono di bel nuovo diminuirsi nella ragione del 6:1 per riportare la resistenza dal pernio alla circonferenza della puleggia, e perciò resterà finalmente la resistenza di libbre . . . . 29.76 centesime.

Ora aggiungendo tal resistenza al valore di libbre . . . . : . . . . 4041. 33.

avremo la forza del canapo *DD* di libb. 4071. 09 cent.

Questa

Questa è la totale resistenza, che l'argano, o la potenza al medesimo applicata deve superare.

Essa nel caso presente non va raddoppiata, come nelle pulegge, giacchè intendesi il canapo come fisso nello stesso cilindro. Ma dee soltanto dividersi per il consueto divisore 32, e ne risulteranno libbre 127.18 centesime.

Una tal resistenza considerata finora al pernio, o collo dell'argano, deve riportarsi alla potenza motrice per il momento della leva, di cui essa è fornita, e perciò ritenendo la proporzione dell'ultimo esempio, nel quale il braccio della leva si è fatto al semidiametro del pernio, come il $12\frac{1}{2}:1$, essa ci tornerà di lib. 10.17 cent.

Ma essendo stata calcolata la resistenza da superarsi dell' argano colla sua potenza di libbre . . . 4071.09 cent.
dividendo tal numero per il 10. secondo la proporzione adoprata tra la lunghezza della leva ed il semidiametro del fuso, ci torneranno libbre . . . . 407.10 cent.

Alle quali aggiungendo le dette libbre 10.18

otterremo tutto il valore della potenza motrice per elevare il peso, e superare le tre resistenze di libbre . . . . 417.28 cent.

Dal che ne viene in conseguenza, che nell'argano ridotto secondo le mie sperienze la potenza motrice non è aggravata, se non che di libbre 17. 28 centesime di più di quello, che sarebbe, distruggendo affatto tutte le resistenze.

Volendo ora paragonare le resistenze del vecchio argano a quelle dell'argano ridotto, basterà ripigliare il numero della seconda parte, che è di libbre 730. 92 centesime, delle quali le libbre 400 appartengono alla potenza nell'ipotesi, che manchino le resistenze, e le altre libbre 330. 92 centesime ci esprimono le pure resistenze. Indi è che nella presente combinazione dell'argano con due semplici pulegge, la prima resistenza dell'

argano antico fta alla feconda dell' argano ridotto, come il numero 330. 92 centefime al numero 17. 28, cioè come il numero 191 al 10, vale a dire, che le nuove refiftenze dell' argano ridotto fiano circa una parte decima nona delle antiche refiftenze rifpetto alla combinazione confiderata nel prefente calcolo.

Calcolo della potenza motrice efcludendo l' ufo delle due pulegge.

Volendo confiderare le refiftenze dell' argano ridotto fenza l' operazione delle due pulegge, allora il pefo di libbre 400 deve immediatamente dividerfi per $a-1$, che nel prefente cafo è di parti 32. Onde avremo per la detta divifione libbre 125.00

che divife per $12\frac{1}{2}$ ci fomminiftrano lib. 10.00
alle quali aggiungendo le folite libbre . . 400.00

verremo in chiaro del valore della potenza, che farà di libbre 410. 00

cioè libbre 10 di più, che non accaderebbe diftruggendo qualunque forte di attrito.

Nella medefima ipotefi la refiftenza degli argani ordinarj è ftata calcolata nella feconda parte di libbre 160; e perciò la refiftenza dell' argano farebbe nel prefente cafo una parte fedicefima dell' argano comune, come effere deve a motivo del divifore $a-1$, che come è ftato detto è 16 volte maggiore nell' argano comune rifpetto all' argano ridotto.

Per maggior facilità aggiungerò il feguente riftretto, affinchè in un' occhiata fi veggano le differenze delle diverfe ipotefi, e de' due argani infieme paragonati.

Riftretto delle diverfe potenze motrici di un argano, col quale debba elevarfi un pefo di libbre 4000. *in diverfe ipotefi.*

Prima ipotefi, che non vi fia alcuna refiften-

za, e che il braccio della leva ſia al ſemidiametro del fuſo dell' argano nella ragione del 10: 1; potenza motrice libbre 400.00

Seconda ipoteſi dell' argano comune con due pulegge, ſecondo le diverſe proporzioni del calcolo colle antiche reſiſtenze 730.31

Terza ipoteſi delle nuove reſiſtenze con due pulegge, e ſecondo le ſteſſe proporzioni; potenza motrice 417.28

Quarta ipoteſi coll' argano ſenza pulegge, ſecondo le antiche reſiſtenze 560.00

Quinta ipoteſi dell' argano ſenza pulegge, ſecondo le nuove reſiſtenze; potenza motrice . . 410.00

Formola analitica per lo ſteſſo calcolo.

Reſta ora, che con qualche formola analitica ſi poſſa abbreviare la teſſitura del calcolo, giacchè eſſa rappreſentando tutte le ipoteſi ci ſomminiſtra una maggior facilità, perchè allora altro non occorrerà, ſe non che applicare le altre ipoteſi, che ſi voleſſero, ſoſtituendo i nuovi numeri alle eſpreſſioni delle lettere.

Calcolo analitico delle reſiſtenze.

Il peſo, che deve elevarſi dicaſi $=P$, la frazione ſarà $=\frac{P}{a}$, che rappreſenta la reſiſtenza aſſoluta. Onde la ſerie delle reſiſtenze ne' caſi, in cui conviene, ſarà $=\frac{P}{a-1}$

La prima puleggia avrà la reſiſtenza $=\frac{2P}{a-1}$. Convien raddoppiare il valore di P, perchè il pernio è aggravato dal canapo dall' una parte, e dall' altra. Sia il diametro della puleggia a quello del pernio come $D:d$.

Onde la resistenza riportata alla prima puleggia sarà $= \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}$

Passando alla seconda puleggia, essa sarà aggravata da $2\,P + \frac{4\,d\,P}{D(a-1)}$. Giacchè ancor essa risente il carico dall' una parte, e dall' altra. Per avere la sua resistenza convien prima moltiplicarla per la stessa frazione $\frac{1}{a-1}$, e sarà $\frac{2\,P}{a-1} + \frac{4\,P\,d}{D(a-1)^2}$

Ma perchè nel caso della seconda puleggia il canapo resta solamente a contatto col semplice quadrante della rotella, convien di bel nuovo diminuirla nella proporzione del diametro al quadrante. Dicasi tal proporzione come $\Delta : \delta$. Onde sarà $= \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2}$

Passando dunque il canapo dalle due pulegge all' argano, sarà aggravato del peso P, più la resistenza delle due pulegge la quale si trasfonde insieme col detto peso. Onde l' argano sarà aggravato dal valore

$$P + \frac{2\,P\,d\,\delta}{\Delta D(a-1)} + \frac{4\,P\,d^2\,\delta}{\Delta D^2(a-1)^2} + \frac{2\,d\,P}{D(a-1)}.$$

Per maggior brevità l' espressa formola facciasi $= F$

E sia la ragion del vette al semidiametro del subbio come $b : 1$

Sia pure la ragione dello stesso vette al semidiametro del pernio dell' argano, e del suo collo, come $g : 1$

Onde volendo dedurre la potenza motrice, che dicasi uguale a y, avremo la seguente equazione

$$\frac{F}{b} + \frac{F}{g(a-1)} = Y.$$

Per applicare la presente formola a' casi particolari,

ſuppongaſi prima ſecondo le mie ſperienze $a-1=32$, e ſi laſcino le altre proporzioni, come ne' paſſati calcoli. Riducendo adunque in numeri la formola, ſarà

$$F=4000+\frac{8000}{6\times32}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times32}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times1024}.$$

Fatte le opportune diviſioni ſarà

Il primo termine . . . $= 4000$
Secondo termine . . . $= 41.66$
Terzo termine . . . . $= 29.32$
Quarto termine . . . . $= 0.11$

Somma ſarà di libbre 4071.09 centeſime $= F$

Onde ſarà $\frac{F}{h}=\frac{4071.09}{10}=407.109$ milleſime

Avremo $\frac{F}{g(a-1)}=\frac{4071.09}{400}$,

che ſarà uguale a libbre . . . . . 10.177. milleſime

Onde finalmente avremo $Y=417.286$. Un tal valore rieſce maggiore del calcolo
antecedente, che era libbre . . 417.28. centeſime

La piccola differenza di ſei parti milleſime naſce dalla maggior preciſione della formola, la quale racchiude più frazioni, che non è ſtato fatto nel primo calcolo.

Applicazione della ſteſſa formola nell' ipoteſi delle antiche reſiſtenze.

Con ugual facilità potrà applicarſi la medeſima formola alle antiche reſiſtenze, purchè ſolo ſi cambj il valore di $a-1$, che in queſto caſo ſarà $=2$. E perciò avremo

$$F=4000+\frac{8000}{6\times2}+\frac{8000\times707}{1000\times6\times2}+\frac{16000\times707}{1000\times36\times4}.$$

Onde ſarà $F=$ a' ſeguenti termini, cioè

Termine I. = ... 4000
Termine II. = ... 666.66
Termine III. = ... 471.33
Termine IV. = ... 78.55

Valore di F = ... 5216.54 centesime

Perciò sarà $\frac{F}{h}$ = ... 521.654 millesime

Sarà $\frac{F}{g(a-1)} = \frac{5216.54}{12.5 \times 2}$ = ... 208.660

Unendo l' antecedente termine . . . 521.654

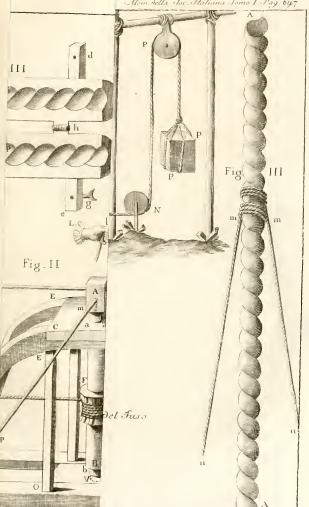
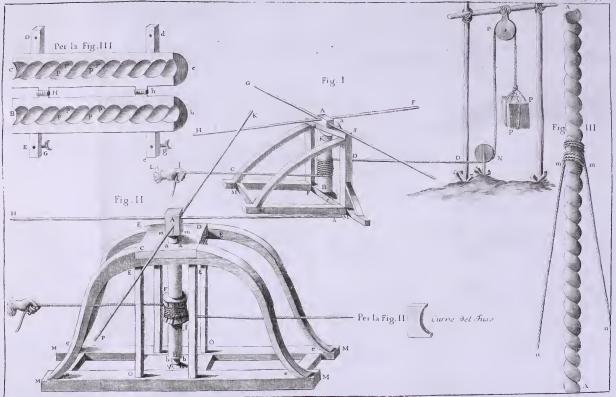
Sarà Y = ... 730.314 millesime

Confrontando il presente resultato con quello dell' antecedente calcolo alla Parte seconda, che è di libbre 730.24 . . . . 730. 24, si troverà la piccola differenza di 7 parti centesime, la qual nasce come dianzi, per essere state trascurate in detto primo calcolo alcune frazioni.

Per la qual cosa essendo stati dimostrati i vantaggi del nuovo argano, e particolarmente quello di aver ridotte le resistenze degli attriti ad una quantità pressochè insensibile, come quella che non giugne a libbre 18 in paragone delle libbre 330. prossimamente delle antiche resistenze, ora altro non resta all'intelligente Architetto, se non che di fare eseguire la costruzione di detto argano secondo i nuovi principj, adoperando per diminuire le resistenze quelle combinazioni di materie, che sono state da me esaminate, e proposte.

E quando egli abbia così costituiti i suoi argani, le sue pulegge, le sue taglie, ed altri ordigni di questo genere, allora il dispendio delle sue fabbriche in ordine alle operazioni, e numero de' manuali scemerà nella stessa ragione, in cui diminuiscono le resistenze, computandovi i pesi aggravati, cioè la spesa co' soliti argani al-

A
P
d
III
h
P
P
P
N
g
e
L
l
m
m
Fig. II
Fig. III
A
E
m
C
a
E
F
del Fuso
P
n
n
B
b
V
O
A

Per la Fig. III
Fig. I
Fig. II
Fig. III
Per la Fig. II
Curve del Fuso

la ſpeſa cogli argani ridotti ſarà come il numero 730 al 417 proſſimamente. E ſe ſi voleſſe aggiungere, che il contraſto di due legni rozzi, come ſono negli argani comuni, cagioni un attrito aſſai maggiore del terzo, ſi conchiuderà, che il diſpendio delle comuni reſiſtenze giunga quaſi al doppio di quello delle reſiſtenze trovate colle mie ſperienze.

Vero è, che non eſſendo ſtate ancora da me pubblicate le nuove ſperienze, le quali diminuiſcono le reſiſtenze degli attriti alle tre parti centeſime de' peſi aggravati, vi saranno delle perſone, che difficilmente ſi capaciteranno di così inſigne vantaggio in favore della Meccanica. Ma io ſpero che le mie lunghe, e reiterate ſperienze, le quali ſaranno ampiamente deſcritte nel mio Opuſcolo, rimuoveranno ogni qualunque dubbio ſu queſto importante ritrovato.

Io ſo, che tutti i Meccanici, che finora hanno ſcritto, altro non hanno fatto, che muovere de' dubbj ſulle diverſe teſſiture de' noſtri ſolidi, e ſulle diverſiſſime reſiſtenze, che indi debbono produrſi. Ma ſe con queſta incertezza di ſuperficie, e di ſcabroſità ſi ritrovano de' ſolidi, i quali combinati inſieme con alcune cautele, e diligenze ſomminiſtrano coſtantemente, ed in tutte le circoſtanze una tenuiſſima, e quaſi inſenſibile reſiſtenza, con queſto ſolo la Meccanica farà quell' acquiſto, che ſi deſidera, cioè che le reſiſtenze degli attriti rendanſi almeno ſedici volte minori, che non ſono a tenore delle ſperienze del Sig. *Amontons*, e di altri inſigni Scrittori.

In queſta Memoria io ho applicata la dottrina delle nuove reſiſtenze all'argano, ed alle pulegge, che lo accompagnano; ma ſarà facile di applicarla a tutte le altre macchine o ſemplici, o compoſte, che ſi mettono in opera nell' Architettura Civile, Militare, e Navale.

LETTERA

Del Sig. FELICE FONTANA Direttore del Real Museo di Fisica, e di Storia Naturale di Firenze
Al Sig. ADOLFO MURRAY Professore d' Anatomia a Upsal

Scritta il dì 20. di Ottobre 1781.

IN questi giorni mi è capitato tra mano il secondo Tomo degli Opuscoli Chimici del Cavalier *Bergman*. Gli ho letti con quel trasporto, con il quale aveva letti gli altri Opuscoli del medesimo Autore, che sono nel primo Tomo; e mi son comparsi anche questi degni della grande riputazione, che si è meritamente acquistata quel valentissimo Chimico. Quasi tutto è originale quello, che sorte dalla penna di quel grand' uomo; e vanno del pari la scelta delle esperienze, la sagacità nel farle, e l' esattezza nelle conseguenze. Credo che si possa dir di lui, per rapporto delle cose chimiche, quel che diceva *Cicerone* della latinità di *Cesare*. *Ineptis gratum fortasse fecit ... Sanos quidem homines a scribendo deterruit*, tanto pareva inimitabile nel tempo che era originale ed eccellente.

Ma fra le molte bellissime verità, che c' insegna quell' uomo illustre, trovo tre punti che principalmente anderebbero esaminati nel più gran dettaglio. L' uno risguarda la teoria del calore, e della formazione dell' aria deflogisticata, con cui spiega egli le revivificazioni delle calci metalliche; la seconda la deflogisticazione del sangue sopra le arie respirabili; la terza l' aria fissa dell' atmosfera, o dell' aria comune. Sono più anni, che travaglio sopra le medesime materie; ma il tempo, e le

le mie occupazioni mi hanno fin qui impedito di pubblicare le mie esperienze, che sono numerosissime, nè per ora sono ancora in istato di farlo, almeno così subito.

Permettetemi però di staccare dalla mia opera quello, che ho osservato sopra i tre articoli accennati colla lusinga, che volendo voi comunicare le mie esperienze all' illustre Chimico Svezzese, e vostro amico, come io rilevo da questo stesso volume, dove parla del vostro merito, e sapere, il facciate pure liberamente; e vi assicuro, che non ho altro in vista, che di essere illuminato, se sono nell' errore, e di vedere stabilite le nuove teorie sopra ragioni solide, ed inconcusse. Questo è quello, che io devo aspettare da un Filosofo ingenuo, ed illuminato, come il Cavalier *Bergman*. Che se le mie esperienze possono aver qualche forza sul suo animo, nessuno è più in istato di lui per darci una teoria più vera, e de' principj più certi non senza vantaggio della Chimica, e della Fisica, che deve essere il solo scopo di chi ama la verità.

Le nuove opinioni del valente Chimico Svezzese sono in origine le medesime del famoso *Scheel*, che si può chiamar lo scopritor degli acidi moderni, ma sono più sistematizzate nel primo, più estese e corredate da nuove ragioni ed esperienze. Elleno meritano un esame particolare, si tratta dell' uso più importante del polmone, si tratta dell' aria principio sì necessario alla vita, si tratta in fine delle funzioni più grandi dell' economia animale.

L' altra parte ha per oggetto le operazioni più delicate della Chimica moderna, cioè la natura, e la formazione delle arie non assorbibili dell' acqua, e la revivificazione delle calci metalliche, che tiene a tutta la Chimica.

Il nuovo sistema rovescia tutte le idee fin qui ricevute, ed è sottilmente legato insieme coi fatti, e coll'

esperienze le più seducenti, talchè non mi maraviglio punto, che sia stato immaginato e sostenuto nelle loro opere da quei valenti Chimici, e che faccia de' proseliti anche appresso gli esteri.

Il Sig. *Bergman* prova con diverse esperienze e ragioni, che la flogisticazione dell'aria comune non ha luogo nel polmone, ma che anzi il polmone assorbe, e spoglia del suo flogisto le arie, che s'introducono in quel viscere col mezzo della respirazione; l'aria poi che rimane dopo quella funzione è aria spogliata del flogisto secondo lui, al contrario di tutti gli altri Filosofi moderni, che la credon ricca di quel principio.

Egli prova questa sua teoria colle seguenti ragioni, che meritano un esame tutto particolare. Ha trovato per esperienza che l'aria respirata dagli animali in vasi chiusi non è punto diminuita. La mancanza poi di $\frac{1}{500}$ d'aria, in cui lasciò morire un sorcio, conviene attribuirsi (dice egli) al calore dell'animale, che deve averla fatta sortire dal vaso dove era situato sul mercurio quando vi fu introdotto. E' già noto che il flogisto diminuisce le arie respirabili; onde è falso, conchiude egli, che dal polmone esca il flogisto per unirsi all'aria comune.

Il Sig. *Bergman*, dopo di aver così sostenuto che nella respirazione non si produce dal polmone flogisto alcuno, cerca di provar per l'opposto, che l'aria, in cui si è lasciato spegnere un lume, non è sensibilmente alterata nella sua bontà, benchè si trovi molto diminuita dal flogisto escito del lume, che mescolato coll'aria, e fatto calore sorte attraverso i pori del vetro, talchè l'aria pura sorte allora dal vaso unita al flogisto sotto forma di calore, e da questo e non da altro si trova l'aria del vaso diminuita. In quest'aria un animale ci vive quasi così bene che nell'aria comune di prima.

Ma una prova ancora più forte, perchè più diretta,

egli la deduce da una ſua eſperienza particolare, e bella, che merita tutta la conſiderazione del Filoſofo. Quel valente uomo ſcoſſe del ſangue dentro di un vaſo ſul mercurio, in cui vi era aria comune, e trovò che l'aria non fu punto diminuita, benchè una candela non poteſſe più ardere in quell' aria. Non eſce adunque, dice egli, il flogiſto dal ſangue, ma piuttoſto il ſangue ne aſſorbe, e per queſto l'aria ſi trova peggiorata, cioè privata di flogiſto.

Finalmente egli portava una eſperienza di *Scheel* ſull'aria infiammabile, che egli ha voluto ripetere, ed è che l' aria infiammabile ſi reſpira impunemente dall' uomo per 20, e più volte dentro una veſcica, e dopo ſi trova incapace di più infiammarſi, o di laſciarvi arder un lume. Il che dimoſtra, dicono que' due valenti Chimici, che il polmone l' ha ſpogliata del ſuo natural flogiſto, tanto è contrario che quel viſcere ne abbia dato a quell' aria.

Al primo argomento io poſſo opporre 37 eſperienze, o riſultati fatti ſu i ſorci, 452 ſu i piccoli uccelli, e 179 ſu i minimi porchetti d' India, e minimi cunigli. Il riſultato delle eſperienze fatte ſopra de' ſorci è che tutti hanno diminuito l'aria comune ſul mercurio dentro vaſi, dove ſono morti, e che l' aria era diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{23}$ del totale. L'aria comune di cui mi ſervivo era dodici pollici. Sette uccelli hanno un poco accreſciuta l' aria, due altri non l'hanno nè creſciuta, nè diminuita ſenſibilmente; tutti gli altri poi l' hanno diminuita da $\frac{1}{30}$ fino ad $\frac{1}{21}$ in circa. Cinque porchi d'India hanno un poco aumentata l'aria, e così ancora han fatto tre cunigli, tutti gli altri l' han diminuita da $\frac{1}{27}$ fino ad $\frac{1}{9}$ incirca. In generale poi ho oſſer-

vato, che le arie sono tanto più diminuite, quanto più lungamente sono state respirate dagli animali. Nell'aria deflogisticata le diminuzioni sono moltissimo maggiori, e possono arrivare fino ad un quarto dell' aria primitiva, e più ancora. Non parlo dell' aria fissa, che si è formata in quelle esperienze, ch'è molto più delle quantità diminuite, e specialmente nell' aria deflogisticata.

Nè deve parere strano se qualche volta si trova in qualche caso particolare l'aria piuttosto accresciuta, che diminuita, perchè quando l'animale viene chiuso ne' vasi ha dell' aria ne' suoi polmoni, e può esser coperto dai vasi nel momento dell' inspirazione, onde averne anche di più. Questa aria polmonare può nelle diverse circostanze dell' animale sortir più e men dal polmone dopo morto l'animale, e mescolarsi nell' aria del vaso, e supplire alla diminuzione dell' aria seguita dal flogisto polmonare, e fino parer d' esser cresciuta. Va considerata ancora l' aria che si attacca ai peli degli animali, ed alle piume degli uccelli, che non sempre riesce di staccar tutta perfettamente, nè anco allora, che s' introducono ne' vasi facendoli passare attraverso il mercurio, che è il metodo da me osservato; e questa mancanza d' attenzione può aver benissimo indotto in errore i Filosofi Svezzesi che non hanno fatto uso di questo metodo, almeno per quel che pare da' loro scritti. Per altro se si fanno le esperienze sull' acqua, e non sul mercurio, le diminuzioni appariscono anche maggiori a motivo dell' aria fissa, che viene assorbita allora dall' acqua. Non par dunque che si possa dubitare, dopo le numerose esperienze da me fatte sopra le arie respirabili, in cui si lascian morire gli animali, che segue una vera diminuzione, e che in conseguenza esce dal polmone del flogisto. E questo serva per rispondere alla prima difficoltà.

Trovo fra' miei fogli un gran numero d' esperienze relative all' aria comune, in cui si è lasciato spegnere

un lume; e fra le molte esperienze basterà che ne accenni una, che mi par decisiva, attese le cautele da me usate, e quest' una contiene il risultato medio di tutte le altre consimili, che non differiscono fra loro.

Queste mie esperienze serviranno di risposta alla seconda difficoltà.

Feci fare un piccolo foro alla estremità chiusa di un cilindro di cristallo lungo otto poll. largo due, e legai fortemente nell' alto, dove era il foro, una vescica in modo che soffiando per la bocca opposta, ed aperta del cilindro potevano entrare nella viscica otto in dieci pollici di aria. Galleggiava ritta una candelina minima di cera sopra una gran vasca di mercurio. La candelina non era fatta che di cinque fili molto sottili, uno de' quali era tenuto un poco distante dagli altri, perchè la fiamma fosse appena sensibile nel principio, e non si comunicasse nell' istante agli altri fili. Accendevo quel filo con un altro filo sì sottile, che appena dava una fiamma sensibile, e lo faceva in un istante. Nel medesimo momento copriva il candelino col cilindro, e l' immergeva di qualche pollice nella vasca, ed allora la vescica si distendeva, e gonfiava, che prima era vuota, e compresa sul foro del cilindro. Il candelino finiva di accendersi tutto, e non sortiva punto di aria dal cilindro per tutto il tempo, che durava a bruciare. Lasciata raffreddare ogni cosa misurava l' aria del cilindro, e la trovai diminuita di $\frac{1}{30}$ o poco meno. Portata l' aria sull' acqua, e scossa diminuì di nuovo di $\frac{1}{40}$. Provata allora coll' aria nitrosa dava 135, quando la comune dava 110. Misi un calenzuolo in otto pollici cubici di quest' aria, e ci visse minuti $5\frac{1}{2}$. Ne misi un altro in altrettanta aria comune di paragone, e visse minuti sette.

Quando si volesse supporre, che qualche poco di aria deve essersi perduta nell' atto di coprire il candelino acceso per l' azione del fuoco, converrebbe diminuire un poco il $\frac{1}{30}$, e forse ridurlo ad $\frac{1}{40}$ o poco meno, che io non credo. Ma in tutte le ipotesi, che si vorran fare, sarà sempre vero, che la diminuzione è piccolissima, onde non è poi maraviglia, che l' aria sia peggiorata di sì poco, e che si possa ancor respirare dagli animali in tale stato. La pochissima aria fissa, che si è formata, è un nuovo argomento per assicurarci anche di più che si è schiuso poco flogisto dal candelino, e che in conseguenza di poco deve anche esser peggiorata l' aria rinchiusa. Io trovo qui come per tutto altrove, che l' aria resta alterata in proporzione di quel ch' è diminuita.

E' vero che un lume vi si spegne, e che un animale seguita a vivere; ma questo non prova altro, se io non erro, se non che l' aria, che lascia vivere un animale, non può lasciar ardere un lume, e che un' aria infetta è più nociva alla fiamma, che alla vita animale, talchè non altro se ne può dedurre a parer mio, se non che la vita dell' animale non è una fiamma, non è un lume acceso, e che la vita è più tenace della fiamma.

E' molto probabile, che i celebri Chimici Svezzesi non si sieno serviti del metodo della vescica da me praticato, nè di qualche altro analogo ad esso, ma che abbiano coperto il candelino probabilmente molto maggiore del mio, e già acceso molto prima col recipiente. In questi casi la diminuzione è assai più grande a motivo del calore, che rarefa l' aria avanti di coprirla col recipiente, ed esce anche più dagli orli di esso, quando si fa uso di piccoli recipienti, in cui si trova diminuita fino di $\frac{1}{4}$.

Non posso temere d' alcuno errore nella mia sperien-

za atteſo la maniera di farla, ed eſſendo tale che con eſſa ſi sfuggono tutte le difficoltà, e circoſtanze, che poſſono renderla equivoca; e poi queſta eſperienza è affatto conforme a moltiſſime altre da me fatte nelle medeſime circoſtanze.

Per riſpondere alla terza difficoltà, cioè del ſangue, che non diminuiſce le arie ſane, io accennerò qui in poche righe i riſultati di quattro eſperienze, che par che non ammettano alcuna riſpoſta. Introduſſi quattro pollici cubici di aria deflogiſticata dentro di un vaſo di vetro pieno di mercurio attraverſo del mercurio medeſimo, che era in una vaſca col vaſe roveſciato. Il mercurio era ſtato riſcaldato di prima fino al calor del ſangue umano, come ancora il vaſo. Riempii di ſangue ancor caldo una boccia calda capace di una libbra di acqua, il quale eſciva a torrenti dalle carotidi di un caſtrato; e riempiuta in modo, e coperto il collo con un dito, che non ſi vedeſſe bolla alcuna di aria nella boccia, e nel ſangue, lo introduſſi ſubito attraverſo il mercurio nel vaſo, dove era l'aria deflogiſticata. Scoſſi allora il vaſo ſul mercurio per tre minuti, e portato ſull'acqua ne feci ſortire tutta l'aria del vaſo, che era in bollicine minime, e difficili ad unirſi inſieme. Sparite le bollicine miſurai l'aria, e trovai che era diminuita di $\frac{1}{4}$ giuſto. Eſaminato la ſua bontà col mio Evaerometro ſecondo il mio metodo, trovai che dava coll'aria nitroſa cavata dal mercurio poco prima 70. 32. 66. 166. quando prima di ſcuoterla col ſangue dava 70. 33. 23. 123. Era adunque peggiorata ſenſibilmente, e nel tempo ſteſſo diminuita.

Ripetei queſta eſperienza nelle medeſime circoſtanze di ſopra, ma ſenza ſcuotere punto il vaſo, e laſciai il ſangue così a contatto dell'aria per tre minuti. Cavata allora l'aria come ſopra, trovai che non era ſenſibilmente diminuita, e colla nitroſa diede 70. 32. 40. 120. Era adunque un poco peggiorata in bontà, ben-

chè non diminuita ſenſibilmente, o pochiſſimo aſſai, ma era molto migliore, che nella prima eſperienza, dove fu ſcoſſa col ſangue.

Volli fare due altri ſperimenti nelle ſteſſe circoſtanze di ſopra, ma coll' aria comune. Nella prima di queſte due ultime eſperienze ſcoſſi l' aria comune col ſangue per tre minuti, e ritrovai che l' aria era diminuita di $\frac{1}{7}$. Trattata coll' aria nitroſa diede 126. quando l' aria comune prima di ſcuoterla col ſangue dava 111. Queſta aria era adunque diminuita, e fatta peggiore nel tempo ſteſſo.

Nella ſeconda eſperienza laſciai a contatto dell' aria il ſangue per tre minuti, ma ſenza ſcuoterlo punto. Cavata l' aria, che non trovai ſcemata, ma piuttoſto accreſciuta un poco, forſe di una bollicina, o due, coll' aria nitroſa diede 111. Queſta aria non era adunque nè diminuita, nè peggiorata.

Queſte quattro eſperienze, ſe io non erro, dimoſtrano chiaramente, che il ſangue può beniſſimo diminuir le arie reſpirabili, e renderle peggiori. E' vero che il ſangue della quarta eſperienza nè ha diminuita l' aria, nè l' ha peggiorata punto; ma convien riflettere, che l' aria non iſtette a contatto del ſangue, che tre ſoli minuti; e che non furono ſcoſſi i due fluidi inſieme, onde non ſi toccavano fra loro, che con due ſoli ſtrati ſottiliſſimi. Ed in fatti quando ſi ſcoſſero que' fluidi fra loro nella terza eſperienza, vi fu diminuzione di aria, e deterioramento di bontà, che forma una dimoſtrazione completa. Che ſe nella ſeconda eſperienza ci fu peggioramento di bontà ſenza diminuzione ſenſibile dell' aria deflogiſticata, non deve parere ſtrano, perchè la ſcala della bontà dell' aria nel mio ſtrumento, e col mio metodo è molto più ſenſibile di quel che foſſe il metodo praticato da me nel miſurare la diminuzione dell' aria prodotta dal flogiſto. Dove poi fu ſcoſſa l' aria deflogiſticata unitamente col ſangue, ſeguì maggior diminuzione

nuzione, e maggior deterioramento di bontà, che combina perfettamente con tutti gli effetti del flogisto colle arie respirabili, e coll'aria purissima. Io non so concepire esperimento, che si accosti più allo stato naturale del sangue, che passa per il polmone dell'animale vivente, di quelli da me riportati sopra. Il passaggio del sangue dai vasi nel mercurio era fatto dentro due secondi o poco più. Il sangue conservava il suo calor naturale per tutti i tre minuti. Quando era scosso, moltiplicava i suoi contatti sull'aria, come succede appunto nel polmone, e nel breve tempo di tre minuti non si può credere che il sangue perdesse nulla delle sue qualità primitive.

Si obbietterà forse che l'aria in una respirazione non sta a contatto delle vescichette polmonari, che quattro in cinque secondi, non già 20. o 30 volte di più, come nelle esperienze fatte da me, e riportate sopra; onde non esser maraviglia, se l'aria è poi diminuita notabilmente, e peggiorata. Ma si deve riflettere che una porzione dell'aria, che sorte dal polmone nella espirazione, è aria in parte delle inspirazioni fatte avanti. In secondo luogo, e questa io credo la principal ragione, il sangue nel polmone è diviso, suddiviso in infiniti vasi sempre minori, onde presenta una immensa superficie all'aria inspirata, la quale è parimente moltissimo divisa, e distesa nelle innumerabili vescichette polmonari: laonde i contatti fra il sangue e l'aria nel polmone sono incomparabilmente di più, che i contatti del sangue, e dell'aria scossi insieme dentro d'un vaso sul mercurio. Si aggiunga a tutto questo la gran velocità, con cui scorre il sangue nel polmone; e si troverà che anche per questa cagione gli effetti del sangue polmonare sull'aria inspirata devono esser grandissimi, talchè non deve parerci punto strano, che si trovi l'aria espirata sensibilmente diminuita, e peggiorata.

Una ricerca molto interessante rimane a farsi anche

dopo le quattro esperienze sul sangue e sull' aria riportate di sopra, ricerca che può avere la più grande influenza nell' economia animale, e che può mostrare i veri usi del polmone, viscere tanto necessario alla vita. Consiste in sapersi se vi è alcuna nuova produzione di aria, ossia accrescimento di fluido elastico, quando l'aria è in contatto del sangue.

L'aria delle quattro esperienze di sopra si è misurata nell' acqua, e si è scossa in essa per liberarla dall' aria fissa se se ne fosse trovata in quelle circostanze; e perchè le mie esperienze procedessero con metodo io ho creduto di dover cominciare dal lasciar l'aria, ed il sangue tranquilli dentro i vasi, per osservar quello, che può il sangue sopra l'aria col solo suo contatto, e nel tempo stesso ho cercato di misurar l'aria sul mercurio, e non sull' acqua, come avevo fatto di prima. Mi son servito di aria deflogisticata, perchè i risultati fossero maggiori, e meno equivoci. Nel far queste esperienze si richiede molta destrezza e abitudine nell' osservatore. Il sangue si coagula poco dopo introdotto nel vaso anche sul mercurio caldo, onde riesce poi difficile di cavarne tutta l'aria, come conviene, per misurarla. Unitamente coll' aria tende ad escire il sangue coagulato, che bisogna in qualche parte rompere, perchè esca l'aria sola; esce in ogni modo coll' aria un poco di sangue, o di siero rosso ancora sciolto. Io soglio mettere una rete di ferro fitta nel fondo del vaso, dove è il sangue dopo i tre minuti dell' esperienza, per impedire che non escano le parti coagulate, e ricevo l'aria dentro d'un bicchiere pieno di mercurio, ed immerso nella vasca medesima, dove è il vaso, che contiene il sangue, e l'aria. Fatto questo immergo sotto il mercurio delle carte succianti, e sottili, e fo in modo, che restino private di quel poco di aria, che potevano avere attaccata in minime bollicine sulla superficie. Il peso del mercurio, ed un leggier moto delle carte basta per far tut-

to questo. Fo allora passare queste carte nel bicchiere, e tutto il sangue, o umido rosso resta assorbito nel momento. Levate dal bicchiere le carte colla mano, resta l' aria asciutta, ed in istato di misurarsi.

Introdussi in un vaso pieno di mercurio sei poll. cub. di aria deflogisticata della seguente bontà 75. 45. 35. 125. Il mercurio ed il vaso avevano il grado del calor del sangue.

Riempii di sangue colante dall' animale la solita boccia prima riscaldata, e lo feci passare nell' istante attraverso il mercurio nel vaso dell' aria. Lo tenni in questo stato per tre minuti, e lo cavai nel modo accennato di sopra, e lo misurai esattamente. L' aria era cresciuta di più di $\frac{1}{5}$. La portai allora sull' acqua, e la agitai un poco per ispogliarla di aria fissa, e l' aria scemò non solo del quinto, di cui era cresciuta, ma ancora di un settimo della prima sua quantità. La sua bontà era 78. 55. 125. 255. cioè molto peggiorata.

Questo esperimento dimostra, che il sangue non solo peggiora la bontà dell' aria col puro contatto, e la dispone ad esser diminuita sull' acqua, come si è veduto ancora nelle altre esperienze riportate di sopra, ma di più accresce il volume dell' aria primitiva almeno di $\frac{1}{5}$ d' aria fissa estranea, oltre un altro settimo della quantità primitiva, che si trova essere anch' essa aria fissa.

Questi nuovi ed inaspettati risultati hanno di che sorprendere il Fisico, è vero, ma sono affatto conformi ai moltissimi altri da me scoperti sull' aria fissa, che si produce dagli animali chiusi dentro vasi di aria deflogisticata a contatto del mercurio. Queste mie esperienze furono fatte a Londra nel 1778, e 1779; e prima a Parigi, e furon quelle che mi fece dire al mio Amico, e valente Filosofo Sig. *Ingen-houtz* che dal polmone sortiva dell' aria fissa, la qual mia opinione, come molte altre, è stata attaccata con ragionamenti puri e non con esperienze.

Benchè questo non sia il luogo di dare alcun dettaglio di esse esperienze sopra questa materia, essendo riservate per un mio Trattato particolare *sulla respirazione degli animali*; ciò non ostante mi si permetterà qui di accennare un risultato generale, perchè si vegga sopra quali fondamenti io ho permesso che si avanzasse quella mia idea nell' Opera del mio Amico, e quanto è uniforme ai risultati dell' esperienze di sopra fatte sul sangue. Questo resultato, che è cavato da più di 100 esperimenti, tende a dimostrare che una parte dell' aria fissa, che si trova nei recipienti, in cui si sono lasciati morir gli animali, si deve al polmone, e non già al solo flogisto polmonare, come si è creduto fin ora. Il Sig. Cavalier *Landriani* celebre Professor di Fisica sperimentale in Milano ha creduto di dovere impugnare la mia opinione dell' aria fissa, che sorte dai polmoni, e che si unisce all' aria inspirata dagli animali; e l' ha fatto con alcune sue particolari ragioni, che noi esamineremo scorrendo, giacchè egli c' invita gentilmente a farlo. Mi si permetta che io porti le sue medesime parole per conservare in tutta la sua forza le difficoltà da lui proposte. Alla pag. 76. 77 della sua opera, che ha per titolo *Opuscoli Fisico-Chimici*. Milano 1781. scrive „ Nelle mie ricerche Fisiche intorno alla salubrità dell' „ aria ho fatto osservare, che l' aria dopo d' essere pas- „ sata per li polmoni intorbida l' acqua di calce, arros- „ sa la tintura di turnesole... in somma presenta tutti „ quanti i fenomeni conosciuti dell' aria fissa. E con- „ chiusi quindi che quest' aria fissa era generata nella „ respirazione dal flogisto, che perspirando dai polmo- „ ni si unisce all' aria atmosferica, e la cangia in aria „ fissa nello stesso modo, con cui l' aria atmosferica negli „ altri processi flogisticanti viene cangiata. Ma il Sig. „ Ab. *Fontana*, siccome almeno viene annunziato dal „ chiarissimo Sig. *Ingen-houtz*, è d' opinione che quest' „ aria fissa, di cui trovasi caricata l' aria dopo essere

„ paſſata per i polmoni , non derivi dal flogiſto , che
„ ſi ſvolge da eſſi, e che unendoſi all'aria atmosferica
„ la cangia in aria fiſſa ; ma pare che egli piuttoſto
„ inclini a credere che una gran quantità di aria fiſſa
„ ſia generata nel noſtro corpo , e che queſta eſca pei
„ polmoni nella reſpirazione . L' opinione d'un sì ec-
„ cellente Fiſiologo è per me tropo autorevole per
„ non farmi dubitare della mia opinione riguardo all'
„ origine di queſt' aria fiſſa polmonare ; ma prima di
„ ſottoſcrivere alla ſua opinione vorrei che ſi rifletteſ-
„ ſe che nei fluidi animali, e ſegnatamente nel ſangue
„ non ſi trova una gran quantità di queſt' acido mo-
„ fetico , che ſi ſuppone eſalare dai polmoni. Inoltre
„ non ſi ſa intendere , come mai queſt' aria fiſſa poſſa
„ eſſere dai polmoni depoſitata nell' aria atmosferica,
„ perchè quando anche queſta eſiſteſſe nel ſangue, par-
„ rebbe ſempre ſtrano che lo abbandonaſſe per unirſi
„ all' aria atmosferica , colla quale ha pochiſſima affi-
„ nità : altronde ſiccome ogni volta che l' aria atmo-
„ sferica ſi flogiſtica, ſi genera ſempre molta aria fiſſa,
„ parrebbe che al flogiſticamento della reſpirazione at-
„ tribuire più che ad altro ſi doveſſe queſt' aria fiſſa
„ polmonare ; tanto più che dovrebbe il volume dell'
„ aria reſpirata trovarſi creſciuto, e non diminuito, qua-
„ le ſi trova per l' addizione dell'aria fiſſa, che ſi ſup-
„ pone continuamente emanare dai polmoni. Ma il Sig.
„ Ab. *Fontana* avrà ſoddisfatto pienamente, e ſuperior-
„ mente a queſte rifleſſioni, ed attenderò dal medeſimo
„ gli opportuni riſchiaramenti circa queſto importante
„ articolo Fiſiologico.

Il Sig. *Landriani* fonda le ſue difficoltà ſopra queſto paſſo che egli cava dall' opera di M. *Ingen-houtz*. *Abbè Fontana found that an animal brething in either common or dephlogiſticated air renders it unfit for reſpiration by communicating to it a conſiderable portion of fixed*

air wich generated in our body and thrown out the lungs as excrementious.

Io era a Londra nel 1779. quando comunicai al mio rispettabile Amico M. *Ingen-houtz* il risultato di diverse mie esperienze sopra la respirazione degli animali, risultato che egli inserì nella sua bellissima opera intitolata *Experiments and observations upon vegetables.*

Il risultato delle mie esperienze si riduceva a provare, che non tutta l' aria fissa, che si trova nell' aria espirata dagli animali, era l' effetto del flogisto polmonare, ma che una parte dell' aria fissa veniva dal polmone medesimo.

Io non ho poi mai detto a M. *Ingen-houtz* in nessun luogo, nè in nessun tempo, che non si formi dell' aria fissa col mezzo del flogisto polmonare in quelle mie esperienze, che gli comunicai; ma bensì ho detto, che sorte anche immediatamente dal polmone, e che ne sorte in quantità, senza definire se sia il quarto, l' ottavo, o più o meno, nè il passo citato del mio Amico dice diversamente. Nè io so d' aver mai detto, o scritto che l' aria fissa, che sorte dai polmoni, sia generata dentro del corpo, potendo essa trovarsi benissimo nei cibi, e nel chilo.

Mi si obbietta inoltre dal Professor milanese, che non si trova nel sangue una gran quantità di aria fissa; ma quando ancora fosse dimostrato da sicure esperienze, il che sin ora non si è potuto fare per quanto a me pare, che si trovi pochissima aria fissa nel sangue, o per meglio dire nel polmone, la pochissima che si concede potrebbe bastare nel mio caso, giacchè nell' esperienze da me fatte l' animale non moriva ad un tratto, ma dopo un tempo considerabile; e si sa che il sangue, e gli altri umori scorrono nel polmone con gran velocità presentando all' aria delle vescichette una immensa superficie.

Si obbietta ancora dall' illustre Professore, che pare

ſtrano che l' aria fiſſa abbandoni il ſangue per unirſi all' aria dell' atmosfera, colla quale ha pochiſſima affinità. In queſta difficoltà ſi ſuppone, ſe io non m' inganno, che l' aria fiſſa non poſſa ſortir dai corpi in virtù della ſua propria forza, e delle ſue proprie qualità, ma ſolo per una forza eſterna; nulla di queſto ſi vede provato dal noſtro Profeſſore, ma bensì ſuppoſto.

L' aria fiſſa ſorte dai fluidi in mille caſi, ſenza che vi ſia biſogno di affinità alcuna, come tutte le eſperienze dimoſtrano. Se i cibi, ſe il chilo introduceſſero nella maſſa degli umori una più gran quantità di aria fiſſa, ch' eſſi non poſſono ritenere, l' aria fiſſa ſortirà a diſpetto delle non neceſſarie affinità, quando quei fluidi ſcorrono per i polmoni. Si ſeguita ad obbiettare, che quando ſi uniſce il flogiſto all' aria comune ſi genera aria fiſſa; e di qui ſi vuole inferire, che ſi debba piuttoſto attribuire l' aria fiſſa al flogiſto polmonare, che ad altro. Queſta rifleſſione fatta a propoſito dal noſtro illuſtre Autore è molto ragionevole, ma non ſempre quello, che pare più ragionevole, è ancora il più vero. Le mie eſperienze annichilano affatto quella difficoltà di veriſimiglianza, la quale porterebbe di più in ſul falſo, quando ſi voleſſe qui far vedere, che io abbia ſoſtenuto che tutta l' aria fiſſa deriva dal polmone, e nulla dal flogiſto.

Si ſeguita ad obbiettare dal Profeſſore contro di me, che dovrebbe il volume di aria reſpirata dagli animali trovarſi creſciuta, e non diminuita per l' addizione dell' aria fiſſa, che ſi ſuppone continuamente ſortire dal polmone, quando ſi oſſerva che è diminuita.

Io ho ſempre creduto, che quando due cagioni o principj tendono l' uno a diminuire una quantità l' altro ad aumentarla, tre caſi molto differenti foſſero poſſibili, e non già un ſolo, come qui ſi ſuppone dall' illuſtre Profeſſor milaneſe. Se per eſempio una fonte riceve continuamente dell' acqua, e ne perde continua-

mente, può l' acqua della vasca crescer sempre, scemar sempre, e può nè crescere nè scemare.

Non so vedere adunque perchè possa continuamente emanare aria fissa dal polmone, e ciò non ostante trovarsi diminuita l'aria inspirata dal flogisto del polmone.

Finisco con rilevare, che l' ipotesi che si abbraccia qui dal celebre Sig. *Landriani* sulla precipitazione dell' aria fissa dall'aria comune, non è appoggiata che a dubbie esperienze, ed inconcludenti; e che l' altra ipotesi da lui abbracciata sul flogisto, che sorte dal polmone, non comincia ad esser sostenibile che dopo gli esperimenti riportati da me contro la teoria de' Signori *Scheel*, e di *Bergman*, esperimenti, che il Sig. *Landriani* non conosceva sicuramente quando egli adottò quelle due ipotesi, come due verità di fatto, e come se fossero state dimostrate.

Il dotto Professor milanese par che si applichi seriamente da qualche tempo in qua agli studj Fisiologici; e noi ci rallegriamo di cuore con lui, perchè molto deve sperare la Fisica dal suo talento, e dallo spirito di ricerca, e di analisi che dimostra in queste materie.

Io non avrei mai pensato a rispondere a' suoi obbietti, se egli medesimo non mi avesse, quasi direi, gentilmente invitato a farlo; e se io non vedessi che tratto tratto egli si compiace nelle Opere, che va pubblicando, di onorare delle sue difficoltà le mie particolari opinioni. Della qual cosa io devo sapergli grado moltissimo, perchè così mi darà occasione subito che avrò un poco d' ozio d' intraprendere un nuovo esame delle cose da me pubblicate, e da lui combattute, e di rigettarle, se false, o di confermarle, se vere con nuovi argomenti, e con nuove esperienze. In questa maniera la verità, e la scienza ne trarranno de' vantaggi reali, e il pubblico ci saprà grado delle nostre comuni ricerche, e differenze di pareri.

Ma ritorniamo all'azione del polmone sopra dell' aria ossia

oſſia per parlare con più di eſattezza, agli eſſetti del ſangue ſulle arie reſpirabili. Si è veduto a non poterne più dubitare, che il ſemplice contatto del ſangue coll'aria deflogiſticata è ſufficiente per peggiorarla anche dopo pochi minuti, e che il ſangue ſomminiſtra una gran quantità di aria fiſſa all' aria deflogiſticata. Si ſa poi d' altronde che il flogiſto in generale diminuiſce tutte le arie reſpirabili, e le diminuiſce tanto più quanto ſono migliori, e quanto ſono migliori tanto maggior quantità ſi trova di aria fiſſa dentro di eſſe.

Non dubito adunque nel caſo noſtro che il flogiſto del ſangue non abbia diminuito ſenſibilmente l' aria deflogiſticata. Ma ſiccome reſta ignota la quantità diminuita dal flogiſto, non è poſſibile di poter dire con eſattezza quanta aria fiſſa ſia ſortita dal ſangue, e meſcolata coll' aria in quelle mie eſperienze. Noi abbiamo trovato che era creſciuta ſul mercurio l' aria introdotta di $\frac{1}{5}$; onde ſi dovrà dire, che l'aria fiſſa ſortita dal polmone in tre minuti era certamente di $\frac{1}{5}$ almeno.

Queſti eſperimenti ſul ſangue per quanto mi pareſſero ſicuri non potevano però rendermi ancor tranquillo. Erano troppo pochi da una parte, e reſtava ancora da ſaperſi, ſe le altre arie erano aumentate, o no, ſul mercurio non ſolo a ſangue tranquillo, ma ancora a ſangue agitato. Mi pareva ancora che doveſſero eſſere importanti per la Fiſica le alterazioni, che potevano ſubire col ſangue le due arie flogiſticate, ed infiammabili; mi riſolvetti adunque di far le ſeguenti eſperienze.

La mia prima eſperienza fu ſopra l' aria deflogiſticata. Le doſi delle arie, e del ſangue ſono ſempre ſtate le medeſime di ſopra. L'aria deflogiſticata, di cui mi ſervii, dava colla nitroſa 75. 45. 35. 135. Agitai per tre minuti i due fluidi ſul mercurio, e trovai che l'aria era creſciuta ſul mercurio da 14 parti a 15 $\frac{1}{2}$. Scoſ-

ſa nell'acqua diminuì d' $\frac{1}{25}$ della prima quantità. Coll' aria nitroſa diede 80. 67. 175.

E' mirabile che queſt' aria a ſangue agitato ſia aumentata di meno, che a ſangue tranquillo; così merita attenzione il vedere che è diminuita di meno a ſcuoterla nell'acqua, che nelle antecedenti eſperienze, e nel tempo ſteſſo, che ſia ſtata di molto peggiorata.

Ma quello che pare innegabile è, che il ſangue accreſce la maſſa dell'aria deflogiſticata che gli ſta a contatto, o ſi ſcuota, o no, che queſto accreſcimento è aria fiſſa, e che vi è una vera diminuzione dell' aria primitiva, come ſi oſſerva dopo levata coll' acqua, e ſpogliata dell'aria fiſſa.

L'aria comune a ſolo contatto col ſangue crebbe ne' ſoliti tre minuti ſul mercurio da 14 parti a $\frac{1}{17}$. $\frac{1}{3}$. La ſcoſſi nell'acqua, ed il reſiduo era ancora $\frac{1}{14}$ di più della primitiva quantità. Colla nitroſa diede 116, quando quella di paragone dava 111.

Ripetei l'eſperienza ſcuotendo il ſangue coll' aria comune; ma una circoſtanza fece che non poteſſi oſſervare, ſe era creſciuta ſul mercurio. Scoſſa poi nell'acqua ſcemò quaſi di $\frac{1}{4}$. Colla nitroſa diede 135. Era adunque molto più peggiorata, che nell' eſperimento di ſopra. Ma nell'una, e nell' altra eſperienza ſi vede una produzione grande di aria fiſſa.

Paſſai all'aria infiammabile, che non era diminuibile dalla nitroſa, e la laſciai a contatto del ſangue per tre minuti. Crebbe ſul mercurio di quaſi $\frac{1}{14}$. Scoſſa nell'acqua ſi riduſſe a meno ſenſibilmente del primo volume di

circa $\frac{1}{20}$ scarso. Al lume arse con esplosione. Coll'aria nitrosa diede 185.

Ripetei l'esperienza scuotendo il sangue, e crebbe da 14 a 18 $\frac{1}{2}$. Scossa poi nell' acqua si ridusse a 14 $\frac{1}{4}$. Col lume fece esplosione. Colla nitrosa diede 165.

Passai all' aria flogisticata, che lasciai al contatto del mercurio, e che non era diminuita dall' aria nitrosa. Sul mercurio crebbe da 14 a 15. Scossa nell' acqua si ridusse a poco meno del suo primo volume. Spense più volte un lume. Colla nitrosa diede 185.

Ripetei l'esperienza coll' agitare il sangue, ed appena crebbe l'aria quando fu sul mercurio. Scossa nell'acqua diminuì quasi di un sesto. Colla nitrosa diede 165.

Per rispondere alla quarta difficoltà dell' aria infiammabile, che si respira impunemente, e che perde la sua infiammabilità dopo respirata, io posso cominciare dall' assicurare appoggiato ad un immenso numero di esperienze, che l' aria infiammabile non è un veleno a respirarsi, come non lo è ancora l' aria flogisticata a differenza dell' aria fissa, che deve considerarsi come veleno, e come un fluido malfacente capace di alterar di per sè l'economia animale, anche allora ch' è unita a molta aria comune, e fino a gran quantità di aria deflogisticata la più pura, benchè il polmone possa scaricarsi di tutto il suo flogisto liberamente. Tutte queste nuove verità, e moltissime altre analoghe, sono appoggiate ad un immenso numero di esperienze fatte da me sopra la respirazione degli animali fin da quando era in Parigi, e che ho comunicato a' miei Amici di là, ed in Londra, e fra questi ai Signori *Cavallo*, ed *Ingen-houtz*, ed al Sig. *Kirwan*, senza parlare del Sig. *Giovanni Fabroni*, che gli ha veduti tutti coi proprj occhi, ed ha voluto assistervi. L'aria infiammabile adunque va considerata come non aria, per rapporto agli usi ordinarj

del polmone. Laonde se nel polmone, dopo fatta l'efpirazione, rimaneffero foli 100 poll. cub. di aria comune, fi potrà feguitare a refpirarla rinferrata in una vefcica, e ferverà alle folite funzioni per qualche tempo, benchè un poco peggiorata. L'aria infiammabile di fua natura innocente non può nuocere all'aria animale, nè può impedire, che il polmone non eferciti le fue ordinarie funzioni qualunque effe fieno; che anzi può fino effer utile in qualche maniera all'animale medefimo, perchè può diftribuire per tutti i bronchi, e per tutte le vefcichette polmonari l'aria comune, che nella noftra ipotefi era 100 poll. cub., e di cui il polmone non fi vuota mai affatto, e gonfiarne le vefcichette come prima. Laddove la fola aria comune non avrebbe potuto fare che men bene con danno dell'economia animale, giacchè fi fa che quando le vefcichette polmonari fono flacide, e fchiacciate, il fangue è arreftato almeno in parte, e la circolazione è nel più gran difordine.

Per altro è poi certo, che dopo una fortiffima, e violenta efpirazione non fi refpira l'aria infiammabile, che per poco tempo, come l'ho fatto vedere in una mia Memoria pubblicata nelle Tranfazioni Anglicane fopra di quefta materia, alla quale mi riporto intieramente. Devo però avvertire che quando io feci in Londra quella mia efperienza, in cui non potei infpirare che tre fole volte l'aria infiammabile, io dovetti probabilmente impiegar molto tempo nel far quella violentiffima efpirazione che precedette l'efperienza, e forfe ancora le tre infpirazioni furono fatte da me con lentezza, giacchè ho trovato nel ripeter quell'efperimento delle differenze fenfibili, ed ho potuto refpirar l'aria infiammabile fino fei in fette volte. Ma tutto quefto fempre più mi perfuade, che l'aria infiammabile non è nociva di fua natura, e che va confiderata come non aria. L'ifteffe efperienze ho fatto refpirando l'aria flogifticata, ed i rifultati fono ftati poco differenti. Tal-

chè questi risultati, ed i moltissimi altri fatti sugli animali chiusi dentro vasi colle arie respirabili pure, e colle medesime mescolate in diverse quantità coll' aria infiammabile, flogisticata, e fissa dimostrano l'assurdità di molte ipotesi immaginate da' Fisici moderni sopra la morte degli animali nelle arie respirabili, e nelle arie non respirabili.

Conviene ancora riflettere che 20 respirazioni si fanno in meno assai di due minuti; onde non trovo punto straordinario, che si possa respirar l' aria infiammabile per 20 volte impunemente, giacchè si può tenere il respiro per quasi due minuti, volendo usar gran forza, anche dopo seguita l'espirazione naturale.

Ho fatto diversi esperimenti sopra la mia propria respirazione ne' differenti stati del polmone, ed ho potuto fissare i seguenti risultati, che fanno molto a proposito alla materia, che abbiamo fra le mani.

I.

Posso tener la respirazione per 60 secondi e più, dopo che il polmone ha fatto la sua inspirazione naturale.

II.

Posso tenerla per 48 secondi e più, dopo che il polmone ha fatto l' espirazione naturale.

III.

Posso tenerla per 37 secondi e più, dopo che ha fatto l' espirazione violenta.

IV.

Poſſo tenerla per 65 ſecondi e più, ſe il polmone è nell' inſpirazione violenta.

Si avverta che in un minuto ſi reſpira 16 in 18 volte. Si avverta che il più piccolo affanno può accelerar le reſpirazioni a ſegno di farne fino 25, e 30 per minuto, e per l'oppoſto in altri caſi le ritarda. Si avverta che i tempi indicati di ſopra variano ſecondo i differenti ſtati della noſtra macchina, e che le reſpirazioni ſi fanno molto lente verſo la fine.

Se nelle quattro eſperienze riportate di ſopra ſi fa paſſar l'aria, che ſi eſpira, dentro di una veſcica, e ſi continua a reſpirar quell' aria per mezzo di eſſa veſcica, cangiano ſenſibilmente i tempi fiſſati di ſopra, e ſi reſpira per più tempo.

Nella prima eſperienza ſi arriva a reſpirar l'aria per 70 ſecondi e più.

Nella ſeconda, e terza eſperienza ſi dura parimente un tempo più lungo.

Nella quarta eſperienza ſi arriva a reſpirarla anche dopo 120 ſecondi.

Queſta diverſità di tempi par che dipenda dalla rinnovazione dell'aria, che ſi fa nel polmone ad ogni reſpirazione. Ad ogni inſpirazione ſi porta nelle veſcichette polmonari anche l' aria meno infetta della trachea, e de' bronchi, laddove ſenza veſcica, ed a polmone tranquillo l' iſteſſa aria più infetta, ch' era nella veſcichetta, peggiora ſempre di più, perchè non rinnovata. Vi ſi aggiunga il calore dell' aria, che è maggiore nel primo caſo, che nel ſecondo, e che porta dell' affanno al polmone, come ſi farà vedere altrove.

Nella quarta eſperienza ſi paſſa di poco i 65 ſecondi per motivo dello ſtato di violenza, e di diſtenſione indotta a tutto il polmone da una troppo eſorbitante

moſſa di aria; ma è poi chiaro da sè che in quello ſtato ſi reſpirerà più lungamente, ſe ſi fa uſo della veſcica, sì perchè la quantità dell' aria è molto di più, che nelle altre eſperienze, sì perchè non ſi porta ai polmoni, che nella quantità ordinaria, ma ſempre rinnovata.

Rifletto ancora, che la traſpirazione inſenſibile non arriva a flogiſticar l' aria comune ſenſibilmente, come mi coſta da tutte le mie eſperienze, chechè altri ne abbiano ſcritto in contrario, forſe per aver fatto uſo di cattivi Evareometri, e per avere ignorato il metodo da me tenuto.

E' vero che nelle altre ſecrezioni più groſſe vi ſi trova del flogiſto; ma queſte ſortono dall' animale a grandi intervalli di tempo, ed in qualche caſo, ed in qualche animale ſi poſſono ſoſpendere per giorni e giorni ſenza incomodo almeno molto ſenſibile; talchè parrebbe che non rimaneſſe altra via all' animale, per iſcaricarſi della eccedente quantità di flogiſto, che ſi prende col cibo, e che va ad unirſi alla maſſa degli umori circolanti, che il polmone, e ſi ſa che la parte roſſa del ſangue è ricchiſſima di flogiſto.

All' altra parte della difficoltà, che l' aria infiammabile ceſſa d' infiammarſi dopo reſpirata, io non ſaprei, ſe non ſe opporre eſperienza ad eſperienza. Non mi è ancor riuſcito di privarla affatto della ſua infiammabilità quando la reſpiravo nelle veſcichette alla maniera dei Filoſofi Svezzeſi, e molto meno quando la reſpiravo ſull' acqua, dove anderebbe ſatto queſto eſperimento, eſſendomi ſoſpette le veſciche per molte ragioni, che tralaſcio preſentemente di accennare. Ma non ſo veder genere d' eſperienza più deciſivo, che quello di far reſpirare agli animali ſul mercurio l' aria infiammabile meſcolata con altrettanta aria comune. Ho fatto uſo de' porchetti d' India, e ſon viſſuti in quell' aria ſette, otto, e ſino in nove minuti. La quantità

di ciascuna aria da me adoperata era di 12 poll. cubici. In tutte le esperienze da me fatte ho trovato che l' aria s' infiammava, benchè respirata sì lungo tempo da quegli animali, e benchè fosse respirata fino a lasciarli morire. Non so veder nulla di più semplice, e meno soggetto ad equivoci.

Rifletto ancora, che potrebbe darsi benissimo il caso, che un lume si spegnesse nell' introdurlo dentro di un tubo d' aria comune, é di aria infiammabile respirata lungamente dal polmone. L' aria comune, se è specialmente in quantità fatta aria flogisticata e fissa nel polmone, impedirà che un lume vi arda, benchè vi sia nel tubo dell' aria infiammabile, e tanto più facilmente, quanto più il tubo sarà lungo, e stretto. Si sa che l' aria infiammabile non arde senza aria comune, e che l' aria flogisticata e l' aria fissa spengono i lumi.

Ma si conceda pure ai due celebri Fisici Svezzesi che l' aria infiammabile cessa di esser tale dopo respirata, e che perde il suo flogisto, e lo dà al polmone; non per questo ne seguirà necessariamente, che il polmone assorba il flogisto dell' aria comune dall' aria deflogisticata. L' aria infiammabile certamente pregna di flogisto si trova obbligata per lungo tempo a strisciare sopra un numero infinito di minimi vasi rossi polmonari. Ma non veggo poi punto impossibile, che nel mentre che l' aria comune riceve il flogisto da una sostanza, che ne ha più di lei, come è il sangue per rapporto all' aria comune, l' aria infiammabile ne dia per l' opposto al sangue, che può avere meno di essa. Può adunque l' aria comune caricarsi del flogisto polmonare, e l' aria infiammabile essere impoverita del suo flogisto dal polmone, senza che si debba credere, che il polmone assorba il flogisto dell' aria atmosferica, quando ancora l' assorbisse dall' aria infiammabile. Questo è quello, che ho creduto di poter dire in fatti sopra le belle esperienze dei

dei due famosi Chimici Svezzesi intorno alla flogisticazione dell' aria nel polmone.

Si potrebbe qui obbiettarmi una esperienza dell'illustre Sig. Cav. *Landriani*, colla quale ha egli trovato, che l' aria flogisticata arriva ad ammazzare gli animali col solo tenerla a contatto della loro pelle senza respirarla punto. Egli assicura di avere osservato, che chiudendo una gallina dentro di una vescica piena di aria flogisticata col capo fuori del collo della vescica, la gallina muore ben presto. Io avevo chiuso dentro di un recipiente col capo fuori diversi animali in arie anche più micidiali dell' aria flogisticata, come per esempio l' aria fissa ecc., ma non avevo mai osservato, che gli animali avessero mostrato di soffrire per questo; lo stesso osservai più volte nell'aria infiammabile. Potrebbe parere ancora singolare che vi fosse un fluido aeriforme, permanente sull' acqua, che potesse uccidere sì presto col solo contatto della pelle. Ma tutte queste difficoltà non sono di nessun peso contro di una esperienza diretta. Ero adunque curioso di vedere io stesso un esperimento così sorprendente, e sì nuovo; e mi determinai di farlo più volte, e lo feci osservando rigorosamente il metodo del Sig. *Landriani*, e le cautele da lui prescritte: ma per quante volte io lo replicassi, che furono moltissime, non solo non mi morì nessuna gallina, ma nessuna mostrò nè anco di avere il menomo incomodo. Estesi le mie esperienze sopra i conigli, i porchi d' India, ed i piccioni; ma nessuno morì, o mostrò di soffrir punto in quell' aria. La vescica durava più e meno gonfia di aria flogisticata per il tempo dell' esperienza, benchè scemasse continuamente, ma poco a poco, e per gradi minimi.

Pensai di ripetere l' istesse esperienze in una maniera ancora più decisiva: desideravo che la vescica fosse egualmente piena di aria flogisticata per tutto il tempo dell' esperienza. Per questo mi servii di un recipiente di cri-

ſtallo a gran pancia capace di più di 1000 poll. cub. di aria, che aveva un'apertura nell'alto di circa un poll., e nel baſſo di 6 poll. e più.

Legai il collo di una gran veſcica al foro ſuperiore del recipiente, e fatto un taglio nella parte oppoſta della veſcica, v' introduſſi l' animale in modo che reſtaſſe tutto il capo fuori della veſcica. Fatto queſto, facevo uſcire l' aria comune dalla veſcica tenendo il recipiente immerſo nell' acqua. Quando l' acqua era vicina a entrare nella veſcica, introducevo ſucceſſivamente più migliaja di pollici di aria flogiſticata nel recipiente, e laſciavo che ſortiſſe l' aria per gradi allargando un poco la veſcica intorno al collo dell'animale a proporzione, che entrava l' aria. Quando l' aria del recipiente doveva eſſer ridotta a pura aria flogiſticata, chiudevo in modo la veſcica con preſſioni eguali, e molleggianti, che l'aria non poteſſe ſortire più almeno ſenſibilmente da eſſa, ed immergevo il recipiente nell' acqua di più pollici, perchè la veſcica foſſe ſempre ripiena di aria flogiſticata. Ho fatto le mie eſperienze nelle galline, ne' piccioni, ne' conigli, ne' porchi d'India ecc. e neſſuno mi è morto, o ha moſtrato di ſoffrire punto. Il metodo da me tenuto è ſemplice, le mie eſperienze ſono molte, onde non poſſo temere d' eſſermi ingannato. Laſciavo gli animali nell'aria flogiſticata fino due in tre ore.

Il Profeſſor milaneſe crede, che l' aria flogiſticata della veſcica uccida gli animali col ſolo contatto eſteriore, perchè s' impediſce, dice egli, con quell'aria la traſpirazione del flogiſto attraverſo la cute. Ma biſognerebbe prima di tutto che il valente Profeſſore provaſſe I. che ſi fa veramente queſta traſpirazione cutanea di flogiſto negli animali, II. che ſi fa in modo nelle galline da ucciderle in poco tempo, quando è impedita. La prima parte a noi par falſa almeno nell'applicazione, che ſe ne vuol far qui dal noſtro Autore per quanto abbia-

mo potuto rilevare dalle noſtre proprie eſperienze che daremo in altro tempo. La ſeconda è affatto inveriſimile, non appoggiata a fatto veruno, e contraddetta dalle mie eſperienze medeſime, che pubblicherò fra poco, ſopra la *reſpirazione degli animali*.

Non poſſo adunque convenire in neſſuno dei fatti riportati dall' illuſtre Profeſſor milaneſe ſugli effetti attribuiti da lui all'aria flogiſticata, e molto meno ſopra le eſperienze da lui fatte. Devo adunque pregarlo a voler ripetere le ſue eſperienze una ſeconda volta, perchè meritano la più gran conſiderazione; e tutti coloro, che amano le verità Fiſiche, e i fatti veri, gli ſapranno grado della pena, che ſi vorrà dare; e noi ſaremo i primi a convenire con lui che ci ſiamo ingannati, nè ci vergogneremo di confeſſarlo quando egli ci avrà dato quel dettaglio che è neceſſario perchè le eſperienze rieſcano anche agli altri. Chi ſperimenta può ingannarſi; ma tutto dobbiamo ſperare dalla conoſciuta ingenuità, ed amore per le verità utili del degno Profeſſore.

L'altra parte della nuova teoria ſtabilita dai due Fiſici Svezzeſi riſguarda la formazione del calore, la generazione dell'aria deflogiſticata, la reviviſicazione delle calci metalliche, e la diminuzione delle arie reſpirabili coi proceſſi flogiſtici, ed è forſe la più brillante, e dove ſpicca più il loro talento inventore. Credono adunque che la materia del calore ſia formata del flogiſto, e di aria puriſſima, e che in queſto ſtato paſſi liberamente attraverſo di tutti i corpi. Con queſti principj ſpiegano facilmente le reviviſicazioni delle calci de' metalli prezioſi, cioè col ſolo calore, e ſpiegano la formazione dell' aria pura chiamata da noi aria deflogiſticata. La materia del calore nel paſſare attraverſo i vaſi ſi decompone; il flogiſto attratto dalle calci metalliche le reviviſica in metallo; e l' aria pura abbandonata a sè ſteſſa, e fatta libera, ſorte dal collo del matraccio aria deflogiſticata.

Non ſo veder nulla di più ſemplice, e di più ingegnoſo, e ſi ſpiegano, convien confeſſarlo, colla più gran facilità le diminuzioni delle arie pure coi proceſſi flogiſtici, che ſono ſempre accompagnate dal calore.

Queſta teoria ſi trova illuſtrata con ſommo ingegno dal Cav: *Bergman*, ed applicata a quaſi tutti i fenomeni della Chimica. Non poteva trovar campione più valoroſo per ſoſtenerla; ma da quel grand' uomo che egli è non l' avanza per una verità ancor dimoſtrata, ma per una teoria, o ipoteſi, che ſpiega i fenomeni più difficili, ed eſorta gli altri Fiſici a travagliare ſopra queſta materia importante.

Io avrei però deſiderato che foſſe appoggiata a qualche eſperienza diretta, o che ſi foſſe immaginata tale eſperienza, che dimoſtraſſe all' oſſervatore imparziale, che le diminuzioni dell' aria pura proveniſſero da perdita di eſſa aria attraverſo i vaſi inſieme col flogiſto, quando diventa calore, non già da riſtringimenti, e decompoſizioni dell' aria medeſima. In ſomma mi pareva che mancaſſe uno di quegli eſperimenti, che il Gran Bacone da *Verulamio* chiamava *experimentum crucis*, e che egli deſiderava, che ſi cercaſſero dal Fiſico induſtre per iſtabilire, o per abbattere le teorie, e le ipoteſi immaginate dai Filoſofi. Non ſempre però rieſce di trovare di queſti eſperimenti, nè anco dai Filoſofi più grandi, e più conſumati, e ſuppongono un genio creatore nell' uomo; e a queſta difficoltà ſola ſi devono appunto le diſpute interminabili ſopra tanti punti importanti della Fiſica, e della Chimica, che durano ancora, e che non finiranno sì ſubito.

Frattanto mi ſi permetta di riportar qui un eſperimento, che a me pare fortiſſimo, e che rende alquanto ſoſpetta quella nuova teoria. Ecco l' eſperienza.

Si prende un' oncia di mercurio puriſſimo, e ſi mette in un matraccio di lungo collo, ed aperto al fuoco di ſabbia. Se il collo è aperto, ſi calcina il mercu-

rio per intiero dopo molti meſi, e ſi trova ch' è creſciuto di $\frac{1}{8}$ in circa del peſo primitivo. Queſto aumento di peſo viene ſicuramente dall' aria, perchè a vaſo chiuſo non ſe ne calcina ſenſibilmente, e quel poco che ſi calcina è in proporzione della quantità dell' aria, ch' è dentro del vaſo, e l' aria ſi trova allora diminuita, e peggiorata in bontà. Si revivifichi ora col ſolo fuoco la calce del noſtro matraccio, e ſi ricevano i prodotti in vaſi adattati. Il mercurio ritornerà ad un' oncia come era prima di calcinarſi, e ſortirà aria puriſſima dal collo, che peſata ſarà preciſamente un ottavo di oncia, cioè il peſo, di cui era creſciuto il mercurio per l' aria certamente, che gli ſi era unita, o per meglio dire da materia cavata dall' aria. Qui non ſi fa vedere decompoſizione alcuna di calore, perchè l' aria ſortita è uguale in peſo all' accreſcimento della calce, e non maggiore. Se vi foſſe ſtata la decompoſizione del calore, e la produzione di nuova aria pura, che è uno de' ſuoi componenti, nell' ipoteſi Svezzeſe, ſarebbe ſortita dal matraccio una più grande quantità di aria, e di un peſo molto maggiore, perchè vi ſarebbe ſtata tutta quella del matraccio, che era un ottavo di oncia, e l' altra del calore decompoſto. Non ſo coſa ſi poſſa replicare a queſta eſperienza, dove vi è certamente la materia del calore, come nelle altre revivificazioni metalliche, ſenza che vi ſia la decompoſizione di eſſo, e la produzione di nuova aria deflogiſticata.

Queſto argomento può ſervire a ſpiegare molte altre revivificazioni metalliche, e produzioni di aria puriſſima ſenza biſogno di ricorrere alla decompoſizione del calore, e ſenza ſuppor nota la compoſizione di quel principio sì poco conoſciuta ancora dai Filoſofi.

Se foſſe permeſſo di azzardar qualche penſiero ſopra queſta materia sì oſcura, potrei domandare ſe è poi un aſſurdo di penſare, che in quell' ottavo d' oncia di materia eſtranea accreſciuta nel mercurio calcinato vi foſ-

ſe tanto di quel principio, che fa revivificare i metalli, che meſſo in moto dal fuoco foſſe attratto dal mercurio, che n'è ſpogliato, e ſitibondo, quando è in ſtato di calce, e ſi repriſtinaſſe così in metallo. In queſta ſuppoſizione la materia, che è nel mercurio, privata di flogiſto ſortirà aria deflogiſticata puriſſima. Ammeſſa queſta ipoteſi, ſi rende ragione di una infinità di fenomeni non prima inteſi.

Le calci metalliche non ſono affatto prive di flogiſto. Quelle calci, in cui ſi trova aria fiſſa, non ſono nè anco eſſe affatto prive di quel principio, sì perchè l'aria fiſſa non ne è priva nè anco eſſa, sì perchè alcune calci danno l' aria infiammabile coll' acido del fosforo, sì perchè altre calci unite all'acido vitriolico danno dell' aria vitriolica, cioè un'aria fatta elaſtica dal flogiſto, che a loro ſi è unito.

Conviene ancora riflettere che colla ſemplice unione degli acidi, e delle calci metalliche ſi cavano de' fluidi elaſtici, cioè de' fluidi fatti elaſtici dal flogiſto. La poca aria deflogiſticata, che ſi ottiene da certe calci coi puri acidi, non diſtrugge punto l'oſſervazione fatta ſopra, e il valente Chimico Svezzeſe il Sig. *Bergman* ſteſſo non crede poi prive affatto di flogiſto le calci metalliche, *interim tamen non penitus ſpoliata reperiuntur*, ſcrive egli e ne adduce delle forti prove. Vi è del ferro ſpatoſo, che non è punto tirato dalla calamita; ma appena vi ſi applica il fuoco, tramanda aria infiammabile, e fiſſa, ed allora è tirato per intiero dalla calamita. Se ſi voleſſe conſiderare il ferro nel primo caſo ſotto forma di calce, converrebbe credere, che vi foſſe unito un principio flogiſtico, che revivifica la calce in ferro, e forte ſotto forma di aria infiammabile.

Tutto queſto ci farebbe credere, che l' ottava parte di peſo accreſciuto al mercurio, che diventa calce col ſolo fuoco, non è tutto ſotto forma di aria pura inelaſtica, ma bensì di un compoſto della materia di quell' aria,

e di flogisto, il quale messo in movimento dall'azione del fuoco vivo corre a revivificare il mercurio, con cui ha la più grande affinità; e l' altro componente fatto libero sorte sotto forma di aria purissima, cioè di aria privata di flogisto almeno in gran parte. Ma io non pretendo di stabilire una teoria sicura su de' principj certi, mancano le prove dirette, le esperienze decisive.

La bella esperienza riportata dal Sig. *Bergman* dell' aria, che si trova consumata nella palla, in cui egli lascia raffreddare la pasta de' tre metalli solubili all' acqua, non prova nulla in favore di quel sistema, perchè si suppone che la palla sia diminuita di peso, ma non si adduce nessuna esperienza, nessun fatto certo, che ci assicuri di questo.

L' istesso si deve dire delle ordinarie calci metalliche, che contengono dentro di sè una gran quantità della materia dell' aria, ed alla quale si deve il loro peso accresciuto, e che si cava da esse co' soliti mezzi.

Nè a me pare che provi molto in favore di quel sistema l' esperimento fatto dal Sig. *Bergman* col lume acceso, che consuma quasi affatto l' aria deflogisticata di un recipiente sul mercurio, perchè non apparisce da esso, che l' aria deflogisticata diventata calore se ne sia andata attraverso del vetro. Per l' opposto tutto concorre a far credere, che la materia dell' aria, perduta la sua naturale elasticità, si unisca al corpo, da cui è sortito il flogisto; ed in fatti si vede che allora quelle sostanze crescono di peso in proporzione appunto dell' aria diminuita, come si osserva del fosforo, del zolfo, del piroforo, che si fanno ardere nell' aria dentro vasi.

Ma poi non lasciano alcun dubbio le mie esperienze sul carbone. Queste esperienze furono da me fatte fino dai primi tempi, che ero a Parigi, e fra i molti che le videro mi basterà di nominare il Sig. *Duca di Chaulnes*, M. *Turgot* Ministro di stato, e il dotto traduttore di *Priestley* M. *Gibelin*. Si trovano dopo quel tem-

po citate da diverſi teſtimoni. *Prieſtley* ne parla in più luoghi nella ſua opera ſulle *Arie* ſtampata a Londra fin dal 1778, e riſtampata in franceſe nel 1782. dove alla pag. 77 ſi ſpiega così: *L' aſſorbition de toutes les eſpeces d' air par le charbon eſt une grande decouverte de l' Abbè Fontana qui à bienvoulù me permettre d' en faire mention.*

Si faccia accendere il carbone, e quando è bene acceſo, ed in pezzetti, ſi faccia ſpegnere dentro bocce ripiene di eſſo, e ſubito ſi chiudano. Raffreddate ſi peſino, e s' aprano poi nell' aria comune, o dentro vaſi di note quantità di aria e galleggianti ſul mercurio; le bocce dove è il carbone creſceranno di peſo, e creſceranno in ragione dell' aria diminuita ne' vaſi. Queſto carbone poi meſſo nel vuoto, o immerſo nell' acqua dà una gran quantità di aria, la maggior parte della quale è aria flogiſticata, il reſtante è aria fiſſa con poca aria comune.

Se ſi ſpegne nel mercurio del carbone acceſo, e ſi fa paſſare attraverſo il mercurio ſenza toccar l' aria eſterna in un recipiente, in cui vi ſia dell' aria comune, ſi vede nell' iſtante diminuirſi quell' aria fino a non apparirne più un atomo. Se in queſto ſtato ſi fa paſſare il carbone nell' acqua ſenza toccare all' aria eſterna, ſorte dal carbone in bolle circa $\frac{1}{5}$ dell' aria primitiva aſſorbita, la quale è perfettamente flogiſticata. Sorte ancora dal carbone dell' aria fiſſa, che viene aſſorbita dall' acqua a proporzione, che ſe n' eſce in bollicine. Il carbone arriva ad aſſorbire circa 6 volte il ſuo volume di aria in queſte eſperienze.

Si noti che il carbone aſſorbe in queſte circoſtanze di ſopra ſei volte, ed anche più di aria deflogiſticata; ma meſſo nell' acqua dà poche bollicine, e di un' aria molto migliore della comune, ma molto peggiore di prima.

Meſſo poi il carbone ſpento nel mercurio nelle arie infiammabili,

infiammabili, o nelle flogisticate, appena assorbe il proprio volume di esse, ed immerso come sopra nell' acqua non dà sensibilmente aria veruna.

Mi si permetta di dare qui alcuni risultati di esperienze fatte col carbone spento nel mercurio, e poi introdotto attraverso il mercurio in tubi alti 35 poll., larghi due, in cui si era messo una determinata quantità di aria comune. L' aria introdotta era circa 10 poll. scarsi. Mi ero accorto, che tenendo il tubo verticalmente sortiva molta aria dal carbone, la quale veniva assorbita coll' inclinar il tubo all' orizzonte. Inclinai adunque il tubo a tal segno, che l' aria fosse assorbita per intiero dal carbone. Allora situai il tubo a piombo; e lasciato così per qualche tempo, cavai dal tubo il carbone per mezzo di un filo sottile di ferro attaccato ad una rete di ferro anche essa, e introdotta nella parte più alta del tubo, che strascinava seco il carbone. Cavato adunque il carbone misurai sul mercurio l' aria rimasta nel tubo, e sortita dal carbone per tolta pressione esterna, e trovai che era 6 poll. cub. per lo meno. La portai sull' acqua, e la scossi, e ne fu assorbito mezzo pollice. Il residuo spense un lume, e diede colla nitrosa 185; onde vi erano nel carbone, che era circa due poll. cub., circa tre volte più di aria del suo proprio volume, e quest' aria era per $\frac{1}{12}$ aria fissa, ed il restante aria quasi affatto flogisticata.

Ripetei l' esperienza coll' aria deflogisticata nelle circostanze di sopra, il carbone era 4 poll. cubici, esciron dal carbone sul mercurio quattro poll. dell' aria. Il residuo scosso nell' acqua diminuì d' $\frac{1}{4}$. Coll' aria nitrosa diede 72. 42. 78. 178., quando prima dava 71. 38. 46. 90. 190. Era adunque ancora aria deflogisticata, benchè resa peggiore, e vi era con essa un poco di aria fissa.

Ripetei l' esperienza coll' aria flogisticata, ma il car-

bone, ch'era circa 5 poll. cubici, non ne assorbì, che il proprio volume. Scossi il residuo nell' acqua, e fu assorbito di $\frac{1}{6}$. Il restante non fu diminuito punto dall' aria nitrosa.

Ripetei l' esperimento coll' aria infiammabile, e con sette poll. cubici di carbone, ne assorbì il proprio volume. Misi il tubo orizzontale, si trovò che vi era tutta la quantità primitiva di aria infiammabile, come me ne assicurai con misure attuali. Scossa nell' acqua diminuì sensibilmente. Colla nitrosa non lo fu punto, ed il lume l' accese come prima.

Io ho una lunghissima serie di esperienze fatte col carbone spento nel mercurio e nel vuoto, che formano un nuovo ramo di Scienza sopra questa materia, e principalmente ho de' risultati inaspettati. Sopra le arie, che si ottengono immergendo il carbone acceso ne' differenti fluidi, come negli acidi, negli olj, e nell' acqua medesima. E' mirabile che si ottenga dell' aria infiammabile tuffando il carbone acceso nell' acqua anche distillata, e potrebbe aver l' aspetto di paradosso, se si domandasse di cavar l' aria infiammabile da un corpo coll' acqua la più fredda. Ma mi riservo di trattar questa materia nel più gran dettaglio nella mia Opera sulle arie.

Queste nuove esperienze sul carbone somministrano de' gran lumi per la teoria delle arie medesime, e ci presentano de' fenomeni nel tempo medesimo di difficile spiegazione. Non s' intende per esempio come un pollice cubico di carbone possa contenere tre volte il suo volume di un' aria, che di comune è diventata aria flogisticata, cioè un' aria, ch' è difficile ad alterarsi servendosi ancora de' mezzi più forti che la Chimica moderna somministra, e che pare indestruttibile, indecomponibile. Se essa conserva nel carbone la sua naturale elasticità, deve esser per lo meno tre volte più elastica dell' aria comune, onde non s' intende come

possa il carbone contenerla dentro di sè; se poi non è elastica dentro il carbone, come potrà escire quell' aria dal carbone subito che si diminuisce anche di poco la pressione del mercurio contro del carbone medesimo, avendo osservato che diminuita la pressione dell' aria esterna di un quarto, e di un quinto, ed anche meno assai, esce benissimo più e meno di quell' aria dal carbone? Siamo adunque sforzati di ammettere nel carbone una tal forza, che arrivi appena a vincere la forza sfiancante dell' aria, quando il carbone è premuto da tutto il peso dell' atmosfera; ma che appena si arriva a diminuire la pressione del mercurio contro del carbone, prevale la forza dell' elasticità dell' aria, e sorte colle qualità che abbiamo veduto.

Ma questa maniera di esaminare le forze secondo che i fenomeni lo richieggono, o di rappresentar gli effetti col suppor delle cause, che sieno in rapporto con essi, è piuttosto matematica, che fisica, e tende più a trovar le leggi di essi effetti, che le cagioni.

Io sono di parere che l' aria esca dal carbone, e si trovi in quella sostanza, come esce l' aria dall' acqua, e come l' aria si trova nell' acqua medesima. E quel che dico dell' aria per rapporto all' acqua, par che si debba dire di quel fluido elastico per rapporto a tutti i corpi, in cui si trova. Ho dimostrato negli anni addietro nella mia opera *Sur l' air nitreux & sur l' air deslogistiquè*, stampata a Parigi nel 1781., che l' aria comune non poteva trovarsi dentro dell' acqua in istato di elasticità. Considero l' aria nell' acqua in un vero stato di dissoluzione completa. Le molecole dell' aria in quello stato tendono in ogni istante a sortire dall' acqua per un principio, o forza che agisce instantemente contro di esse, ed escono in fatti subito che la pressione esterna sull' acqua è diminuita di tanto che prevalga la forza, che tende a farle sortire dall' acqua, così concepisco che l' aria si trovi nel carbone, cioè ridotta in mo-

lecole impercettibili non elaſtiche, ma tendenti a ſortire da quel corpo ſubito che la forza eſpanſiva, che le penetra, e che le ſtacca dal carbone, prevale. L'eſempio dell'acqua, che diventa vapore nel vuoto, e del mercurio medeſimo, che ſi riſolve in minimi corpiccioli nel vuoto più perſetto, dimoſtrano abbaſtanza, che regna queſta forza in tutti i corpi, e che la ſola preſſione eſterna dell'aria, o tolta, o diminuita, fa che ſi riducano in vapori i fluidi più inerti, e più peſanti. Io ſpero di poter dimoſtrare con tutta l'evidenza, di cui ſono capaci le verità fiſiche, la realtà di queſto nuovo principio, ed il ſuo meccaniſmo.

Comunque ciò ſegua poco importa, purchè il fatto ſia vero, e ſi convenga, che tutti quegli effetti derivano dal principio flogiſtico, ch'è nel carbone. Non ſi può adunque più dubitare, che la diminuzione dell'aria, anzi la totale diſtribuzione di tutte le arie artificiali, e naturali non ſi facciano a ſcapito dell'aria medeſima, che ſi è introdotta nel carbone.

Merita ancora tutta la conſiderazione del Filoſofo penſatore il vedere, che ſi è trovato una materia, che aſſorbe tutte le arie per intiero, ſenza reſiduo alcuno, che fin'ora non ſi è ottenuto con neſſun altro proceſſo flogiſtico, e che deve render ſoſpette le teorie di quei Fiſici, che hanno formato l'atmosfera di $\frac{3}{4}$ di aria micidiale, e di $\frac{1}{4}$ di aria puriſſima col ſolo fondamento che non ſapevan diminuire l'aria comune, che di $\frac{1}{4}$, e che il reſiduo era meſitico, oſſia aria flogiſticata. Il carbone può diminuirla comunque, ed i reſidui ſono aria mal ſana, e può fino diſtruggerla affatto. In queſto caſo converrebbe dire, che l'aria atmosferica è fatta di ſola aria deflogiſticata, di ſola aria puriſſima, che è un aſſurdo, e ch'è contrario alla ipoteſi, che combattiamo. Il carbone è di tutte le ſoſtanze, o flogiſti, il ſolo conoſciuto fin qui che aſſorba tutte le arie naturali, ed artificiali sì ſalubri, che meſitiche, che ne aſſor-

ba in sì gran quantità, che ne assorba con tanta rapidità, e che le assorba per intiero, cioè senza residuo alcuno di fluido elastico; ed in questo consiste principalmente, e non in altro la singolarità da me scoperta in quella sostanza. Nè si deve confondere il carbone con quelle sostanze, che assorbon l'aria naturale ad esse, e che hanno perduto per qualche accidente; ma la diminuzione dell'aria deve esser fatta dal solo flogisto, come è fatta dal carbone. Nè mi costa ancora da nessuna esperienza diretta, che nè anco le piante stesse in stato di vegetazione si possono paragonare col carbone per le distruzioni delle arie, e poi il principio che le produce non si prova il medesimo. Nè si creda che il carbone assorbe le arie solo a proporzione, che si raffredda, perchè fa il medesimo raffreddato comunque, e chiuso in vasi, e coperto di mercurio anche per anni.

Ma dopo ancora tutte le cose da noi rilevate contro la nuova Teoria del calore, non ero contento di me medesimo, nè tranquillo, e mi mancava una di quelle esperienze, che decidono delle controversie fisiche, e che non lasciano luogo a dubbj ulteriori.

Un nuovo esame sopra quella Teoria mi portò poco a poco a vedere, che era possibile di fare una esperienza diretta, e decisiva. Supposi adunque sciolto il problema in quistione alla maniera degli Analisti, e cercai quali erano le conseguenze immediate, che derivano, e se vi era mezzo alcuno di confermare coll'esperienza le conseguenze dedotte, e legate intieramente co' loro principj.

Supposta vera l'ipotesi che da noi si combatte, l'aria pura nell'unirsi al flogisto dentro de' vasi diventa calore. Il calore è dunque una sostanza fatta di due principj, che sono l'aria pura, e il flogisto. La materia del calore passa attraverso di tutti i corpi anche i più compatti, e si diffonde, e comunica ai corpi esterni. Si sa che l'aria è grave, e se ne conosce il peso. Noi

non isbaglieremo gran fatto a fupporre che un poll.cub. di aria comune è circa $\frac{1}{3}$ di grano, ma nel cafo noftro non abbiamo punto bifogno di precifione, e prendendo ancora i dati più fvantaggiofi vi è anche di troppo per l'applicazione, che ne facciamo. Il flogifto è corpo, e quefto bafta per crederlo pefante, benchè poi fia vero che fe ne ignora il pefo precifo, ma noi lo poffiamo trafcurare, e ci è affatto inutile. L'aria pura fatta calore col flogifto forte dai vafi in cui fi è formato il calore. La quantità della materia dovrà in quei cafi diminuire dentro di effi vafi, e quefta diminuzione farà tanto più grande, quanto maggior quantità di aria è ftata confumata per la formazione del calore.

Diverfi metodi ho io immaginato per trovare con ficurezza, e facilità la materia perduta dentro de' recipienti; ma mi contenterò per ora di accennare un folo, che ho preferito agli altri. Avevo bifogno di gran bocce, o vafi, perchè il flogifto agiffe fopra gran maffe di aria, ma nel tempo medefimo cercavo di potere afficurarmi anche delle più piccole differenze di pefo.

Per arrivare a foddisfare all'una, ed all'altra condizione ho fatto foffiare un gran numero di palloni di vetro fottili, e capaci dai 600 fino in 1000. poll. cub. di aria e più ancora. Quefte palle finivano in un collo lungo quattro in cinque pollici, per il quale introducevo le diverfe materie, di cui volevo fervirmi, e chiudevo fubito il collo ermeticamente. Allora pefavo ogni cofa colla più grande attenzione. I palloni anche dopo chiufi non arrivavano a pefar mai fei once, e la maffima parte pefavano fra le tre once, e le cinque once, e fi accoftavano più alle prime, che alle feconde. La bilancia, di cui mi fervivo, caricata dai palloni rompeva coftantemente ad $\frac{1}{10}$ di grano.

Devo confeffare con ingenuità, che nel fare quefte efperienze fono ftato più volte nel procinto d' ingan-

narmi, ed ho creduto per qualche tempo, che vi fosse una vera perdita di materia fatta dai nostri palloni. Diverse sono state le materie, che io ho creduto di dover provare, e queste erano tutte di natura combustibile, e capaci di schiudere il flogisto, e di eccitare il calore. Mi son servito della polvere d' archibuso, dell' esca comune, del zolfo, del piroforo, e finalmente del fosforo di orina. Accendevo nelle palle la polvere, e l' esca con una lente ustoria; la polvere era accesa a piccole masse, perchè il pallone non iscoppiasse, che in diverso modo succede. Applicavo ai palloni, dove si trovava il zolfo, un lume acceso, e ve lo lasciavo per 10 in 12 ore, finchè si fosse tutto sollevato in fiori di zolfo: ordinariamente mettevo una dramma di zolfo nei palloni e non più.

I palloni dove vi era il zolfo, ed il fosforo mi mostrarono per più, e più volte una costante diminuzione di peso, che arrivava fino a due grani, e più. Ma oltrechè la perdita in peso non corrispondeva punto alle diminuzioni dell' aria seguite nelle palle, era in contraddizione col peso trovato negli altri palloni, ne' quali spesso si osservava anzi una vera aumentazione.

A proporzione, che andavo moltiplicando le mie esperienze, e che usavo delle nuove cautele, ed attenzioni trovavo che l' esperienze si accordavano sempre più fra di loro, e che tendevano a provare, che non vi era nè diminuzione, nè aumentazione di peso. La temperatura esterna dell' aria, ed il calore rendevano i miei risultati ineguali; l' umidità, la polvere, il sudiciume delle mani vi concorrevano anche essi sensibilmente. Nell' esame rigoroso delle circostanze diverse, ed incostanti, che si mescolavano nelle mie esperienze, ho scoperto che il calore dei palloni medesimi poteva alterarne il peso sensibilmente, il che merita qualche riflessione.

Un giorno avevo messo circa 15 grani di esca in un pallone pieno di aria comune, e chiuso ermeticamente.

Il pallone per mezzo di un filo di ſeta era ſoſpeſo ad un braccio di bilancia, e peſava onc. 4 dan. 7 gr. 7 $\frac{1}{4}$: acceſi l' eſca nel pallone colla lente uſtoria, ed oſſervai che il pallone perdeva ſenſibilmente del ſuo peſo. Il pallone era caldo nel ſondo, e freddo nell' alto. Ripetei l' eſperimento ſopra quattro altri palloni, e trovai nelle ſteſſe circoſtanze di ſopra, che il peſo arrivava a ſcemare d' un grano, e più, ma che appena raffreddati i palloni ritornavano al peſo di prima.

Queſta diminuzione di peſo nell' atto, che brucia l' aria nei palloni pare un fatto d' eſperienza, e da non poterſene dubitare nè anco; ma d' onde viene poi queſta diminuzione? Una perſona che ſi trovò preſente ad alcune di queſte eſperienze mi fece riflettere, che ſi alzava dall' eſca un vapore denſo, torbido, il quale ſaliva con forza nelle parti più alte, e ſuperiori del pallone. Credeva adunque che quei vapori o ſumo diminuiſſero il peſo nel pallone coi loro urti entro le pareti ſuperiori, e per le vie, che ſi doveva aprire per l' aria. Non era molto difficile di rilevare l' inſuſſiſtenza dell' una, e dell' altra ipoteſi; ma volevo eſaminare ogni coſa coll' eſperienza alla mano, e volevo che i fatti medeſimi ſerviſſero a trovar la vera cauſa di quella leggerezza.

Molte eſperienze nuove io feci per queſto fine, e trovai che a proporzione che il calore diminuiva dopo bruciata l' eſca, la differenza in peſo diventava minore, e che creſceva per l' oppoſto al creſcer del calore. La qual coſa mi fece ſoſpettare che il calore applicato anche eſteriormente al palloni ne diminuiſſe ſenſibilmente il peſo.

Preſi adunque un pallone di vetro del diametro di poll. 10. e pieno di aria comune lo chiuſi ermeticamente. Era once 4 dan. 5 gr. 2 $\frac{1}{2}$. Tenendolo ſoſpeſo ad un filo lo riſcaldai coll' accoſtarlo ad un braciere di carbone acceſo. Il calore era appena ſoffribile nel fondo, ma

ma non era ſenſibile nelle parti ſuperiori. Ripeſato lo trovai diminuito di due grani in punto. A proporzione che ſi raffreddava diventava più peſante per gradi, e ridotto alla temperatura di prima, e della ſtanza, ſi trovò che aveva acquiſtato il peſo di prima.

Queſto eſperimento fu da me ripetuto molte altre volte col medeſimo eſito. Volli anche oſſervare ſe ſeguiva l' iſteſſo riſcaldando i palloni nelle parti ſuperiori verſo il collo, e non nel fondo, e ſe il medeſimo ſeguiva riſcaldato il pallone egualmente per tutto. I riſultati di tutte le mie eſperienze mi portano a creder vere proſſimamente le ſeguenti propoſizioni.

I.

Un pallone del peſo di circa quattro once, chiuſo ermeticamente, e pieno di aria comune, ſe dopo peſato bene ſi riſcalda forte nella parte oppoſta al collo a ſegno di non poterla toccare colla mano, ſi trova diminuita ſenſibilmente di peſo. Se ha 10 in 12 poll. di diametro, la diminuzione arriva fino a due grani e più: ſi avverta che il calore non ſi laſcia ſalire fino al collo della palla, il fondo della quale ſi riſcalda bruſcamente ſulle brace bene acceſe, quando ſi vuol far l'eſperienza. Dopo pochi minuti diventata fredda come prima ſi trova che è creſciuta dei due grani, che aveva perduto.

II.

Se ſi riſcalda la ſola parte ſuperiore del pallone dov' è il collo, ſi trova un poco diminuita, ma molto meno che nel primo caſo, e ſubito raffreddata ritorna al peſo di prima.

III.

Se ſi riſcalda egualmente per tutto il pallone ſopra, e ſopra ſi trova più diminuita, che al numero II, ma un poco meno che al numero I.

IV.

Le materie nell' atto di ardere dentro le palle chiuſe ermeticamente ſcemano di peſo, ma raffreddate ritornano al peſo di prima.

V.

Le diminuzioni di peſo nei palloni, in cui ſi è eccitato il calore, non deriva dai vapori, che ſi ſpargono nell' aria dai palloni.

VI.

I corpi riſcaldati dal calore poſſono apparir meno peſanti di prima.

VII.

Anderebbono ripetuti gli eſperimenti fatti dai Fiſici ſopra i corpi infuocati a motivo d' aver negletto queſto elemento.

Finiſco coll' avvertire che avendo riſcaldato un pallone aperto nel collo, trovai che peſava 27 grani meno di prima. Era riſcaldato nel fondo, e non in alto. A proporzione che ſi raffreddava creſceva di peſo, e raffreddato del tutto ritornò a peſar come prima: ma qui la cauſa è troppo patente, perchè meriti che ſe ne parli.

Dopo di avere a poco a poco conosciuti, e corretti i piccoli errori, che io commettevo nei far le mie esperienze sul peso de' miei palloni, trovai che combinavano molto bene i risultati fra di loro, ma che non favorivano punto la nuova teoria Svezzese.

Credetti di dover continuare le mie esperienze, variandole ancora in modo che i risultati fosser più grandi e più pronti, onde ancora più sicuri. In alcuni palloni insinuai delle fettucce sottili di fosforo, e dopo chiusi ermeticamente accendevo col calore d'un carbone acceso il fosforo. Spesso si rompeva il pallone anche allora, che accendevo un solo pezzetto di fosforo per volta.

Ho trovato che l' esperienza riesciva con più di sicurezza, quando soffiavo del vento freddo contro quella parte del pallone, dove il fosforo bruciava. Il freddo ritarda, e diminuisce la fiamma del fosforo, e per questo le rotture sono meno frequenti. Qualche volta in meno di $\frac{1}{4}$ d' ora l' esperimento era finito, il pallone raffreddato e riposato. Due volte sole si è acceso ad un tratto il fosforo senza rompersi il pallone, ed ho osservato che le pareti interne di esso erano gremite di una materia bianca lanuginosa finissima regolare.

In nessuna delle moltissime esperienze da me fatte bruciando il fosforo nei palloni ho trovato diminuzione di peso, come non ho mai trovato aumentazione di peso. Io le ho ripetute in diversi tempi, e luoghi procurando che il peso dell' aria, ed il calore fossero sempre i medesimi.

Se mi sono ingannato, bisogna ben dire che tutto è concorso per ingannarmi; ma frattanto mi si conceda di fissare come un Canone fisico dei più sicuri, che i corpi nelle circostanze da me esaminati non aumentano di peso, come non diminuiscono di peso.

Ho trovato che l' aria in alcuni palloni era diminuita di quasi il quarto, e questo quarto poteva salire

ſino a 200 poll. cub., talchè avrei dovuto trovare più di 66 grani di diminuzione di peſo, quando la bilancia non ne moſtrava punto.

Un altro genere di eſperienze ho voluto ancora intraprendere, le quali provano anche più direttamente la medeſima verità. Conſiſtono queſte in mettere dentro i palloni una quantità di acido nitroſo, ed una quantità di mercurio. I palloni erano fatti in modo, che verſo la metà del collo vi era una gobba da una parte, o piccolo ſacchetto di vetro chiuſo eſternamente, ed aperto internamente nel collo. Inſinuavo prima di tutto l' acido nitroſo per il collo ſenza che ne entraſſe punto nel ſacco, e ſubito dopo mettevo il mercurio nel ſacco per mezzo di un tubo ricurvo facendolo entrare per il collo. L' acido nitroſo era un poco fumante, ed in tal quantità da ſciorre abbondantemente il mercurio. Chiuſo il collo ermeticamente, lo peſavo alla bilancia, ed in tale ſituazione ſenza toccar più nulla facevo cadere il mercurio nel pallone. In pochi minuti era ſciolto il mercurio e raffreddato il pallone, e allora alzavo la bilancia per vedere, ſe vi era variazione di peſo. Queſta eſperienza rieſce in meno di 6 minuti. Il pallone non è mai toccato eſternamente, che quando s' inclina un poco per far cadere il mercurio ſull' acido nitroſo, il che ſi fa con un cencio fine. La bilancia reſta nella ſituazione di prima, onde non vi è neſſuna circoſtanza che poſſa far ſoſpettare di errore. Tutte le eſperienze da me fatte con queſt' ultimo metodo ſono ſtate uniformi; e mi hanno aſſicurato, che non vi è diminuzione alcuna di peſo nei palloni, come non vi è aumentazione, e che non ſorte dai palloni l' aria pura ſotto forma di calore, nè altra ſoſtanza qualunque ſuſcettibile di peſo. Io credo di potere avanzare queſta verità, che mi pare importante aſſai, e che mancava alla Fiſica moderna, ed alla Scienza delle arie. E' vero che è in contraddizione colla teoria dei

due valenti Chimici Svezzesi, ma è sempre un gran passo verso la verità di aver levato un ostacolo di mezzo, che poteva ritardare i progressi de' Fisici.

Sopra l' aria fissa esistente nell' atmosfera.

Avanti di esaminare con qualche dettaglio la presente quistione, io ho creduto, che convenisse prima di esaminare un' altra forse meno importante, ma che rende molto più facile la soluzione della prima. Questa seconda ha per oggetto di sapere, donde venga il residuo aeriforme, che si trova nell'aria fissa. I Fisici moderni, che hanno più lavorato intorno alle proprietà, ed alla teoria delle arie, trovano dopo il celebre D. *Priestley* che per quanta aria fissa si faccia assorbire dall' acqua, resta sempre un residuo di aria, che l' acqua non può assorbire, e che è affatto differente dall' aria fissa medesima, quando anche l' aria fissa, di cui si è fatto uso, sia della più pura, che si può ottenere coi metodi conosciuti fin ora. Si è creduto fin qui da tutti, che questo residuo di aria, che è aria comune, ma in parte alterata, e probabilmente dal flogisto, fosse naturalmente unita all' aria fissa, talchè non potesse trovarsi questa senza di quella. In quest' aria una candela può bensì arderci, ma per meno tempo, e men bene, che nell' aria comune: un animale ancora ci vive, ma per minor tempo, e non sì bene, che nell' aria comune, e l' aria nitrosa non la diminuisce che in parte, cioè meno dell' aria comune. Queste proprietà, come ognun vede, convengono coll'aria comune alterata in parte dal flogisto.

Ma d' onde venga questo residuo dell' aria fissa, e come si trovi egli unito a quell' aria, resta ancora da sapersi. Si crede comunemente che l' aria fissa non possa mai essere scompagnata da quell' aria comune, e che la prima aria non esista mai senza la seconda.

Supposta l'esistenza necessaria di una parte d'aria comune nell' aria fissa, si può domandare in qual maniera quell' aria è unita all' aria fissa, o in quale stato si trovi essa dentro l' aria fissa medesima. Una tale quistione è suscettibile di esperienze, e di esperienze dirette, talchè la soluzione pare che sia in mano del Fisico osservatore.

Si sa che l' aria nitrosa diminuisce l' aria comune, e tutte le arie respirabili. Se vi fosse dell' aria comune mescolata all' aria fissa, dovrebbe vedersi una diminuzione molto sensibile, quando si uniscono insieme aria nitrosa, ed aria fissa; e questa diminuzione sarebbe in ragione della quantità, e qualità dell' aria comune. Si sa che l' aria fissa la più pura lascia dopo scossa nell' acqua circa $\frac{1}{40}$ del suo volume; onde se sarà introdotta una quantità un poco grande d' aria fissa dentro d' un tubo assai alto, e pieno di mercurio, la diminuzione potrà essere assai sensibile. Io posso però assicurare, che tutte le volte che ho operato sopra aria fissa assai pura, non ho mai potuto accorgermi di diminuzione alcuna, almeno non mi è mai paruta sensibile, e certa; ma avevo l'avvertenza di non ricever l'aria sull' acqua, ma sul mercurio, e di non ne ricevere che dopo che ne era escita una gran parte. Questo esperimento è molto difficile, ed esige grande attenzione dalla parte dell' osservatore, e grandi cautele.

Esclusa così l' ipotesi di semplice mescuglio di aria comune nell' aria fissa, resta da vedere d' onde viene quel residuo di aria, e come si trovi nell' aria fissa dopo sbattuta nell' acqua, o ricevuta sull' acqua. Un gran numero di esperienze mi hanno fatto vedere, che quel residuo di aria comune non è una quantità costante, benchè l' aria fissa si sia cavata dai medesimi corpi, e coi medesimi mezzi; ho trovato ancora, che è più, e meno flogisticata secondo le varie circostanze e maniere

di cavarla dai corpi. In generale mi è paruto di vedere che l' aria fiſſa, che reſta molti giorni a contatto dell' acqua, laſcia un reſiduo più grande di aria comune non buona. Tutte queſte oſſervazioni potrebbero già cominciare a farci ſoſpettare, che o tutto o parte di quel reſiduo d'aria ſi produceſſe nell' atto, che l' aria fiſſa viene aſſorbita dall' acqua, cioè che una parte d'aria fiſſa in que' caſi prendeſſe la qualità d' aria comune men buona leggiermente flogiſticata.

Tutte le mie eſperienze fatte fin qui mi hanno fatto vedere, che quando l' aria fiſſa è diminuita di qualche ſoſtanza, laſcia una quantità più o meno grande di aria più e meno flogiſticata, la quale diventa aria affatto ſimile al reſiduo ordinario dell' aria fiſſa, ſe ſi sbatte lungamente nell' acqua. Queſte ſoſtanze, che diminuiſcono, o aſſorbono l' aria fiſſa, ſono di quelle che abbondano naturalmente di flogiſto. La ſcintilla elettrica medeſima rende una parte dell' aria fiſſa inaſſorbibile alle acque, come l' ho provato più volte. Premeſſo tutto queſto io rifletto, che quando ſi ſcuote nell' acqua l' aria fiſſa, l' aria fiſſa è diminuita per gradi da quel fluido, ed aſſorbita dall' acqua. L' acqua non è affatto priva di flogiſto, e può flogiſticar l' aria comune sbattuta in eſſa lungamente, e render men buona fino l' aria deflogiſticata medeſima. Deve adunque l' acqua flogiſticare in parte l' aria fiſſa nell' atto di aſſorbirla; e ſiccome queſta aſſorbizione ſi fa da noi in poco tempo, e l' acqua non ha che poco flogiſto, non ſi flogiſticherà che una piccola parte di aria fiſſa, come in fatti ſi oſſerva; e per queſta iſteſſa ragione ſi troverà una più gran quantità di aria fiſſa flogiſticata quando ſi laſcia aſſorbire dall' acqua lentamente, o quando ſi uniſce ai proceſſi flogiſtici immediatamente.

Vi è un' eſperienza che par deciſiva affatto. Ho fatto aſſorbire all' acqua una gran quantità d' aria fiſſa; ho precipitato la calce in terra calcarea colla medeſima aria

fiſſa. Nè l'acqua, nè la terra calcarea avevano certamente aſſorbito il reſiduo naturale inaſſorbibile dell'aria fiſſa. Ho cavato dalla calce precipitata, e dall'acqua l'aria fiſſa, ed ho trovato il ſolito reſiduo d'aria inaſſorbibile comune men buona. Ho cavato l'aria fiſſa dall'acqua collo ſcuoterla appena un poco, l'ho cavata dalla terra calcarea coll'olio di vitriolo. Quando ſi voleſſe ſoſpettare, che quell'aria era prima nell'acqua, ſoſpetto poco ragionevole atteſo il picciolo moto impreſſo nell'acqua nel cavarla, nulla ſi può opporre di queſto all'eſperienza della calce.

E' adunque un fatto d'eſperienza, che non eſiſte neceſſariamente una porzione d'aria comune men buona coll'aria fiſſa, e che quell'aria non comincia ad eſiſtere, che a proporzione che l'aria fiſſa è diminuita, e che le ſi uniſce del flogiſto.

Così riſoluta queſta quiſtione per quanto a noi pare, che a prima viſta poteva ſembrar più curioſa, che utile, ſi può ora dedurre da eſſa un corollario della più grande importanza: ſe quel reſiduo d'aria comune, che ſi ritrova nell'aria fiſſa, non eſiſteva prima in eſſa, ma ſi è formato in ſeguito col ſemplice ſcuoterla nell'acqua, ne ſegue che l'aria fiſſa può diventare in parte aria comune, o aria reſpirabile.

Benchè il mezzo uſato per operare queſto maraviglioſo cangiamento paja ſemplicemente meccanico, giacchè ſi può ottenere coll'acqua la più pura, o ſia coll'acqua diſtillata, io ſono però perſuaſo del contrario. Io credo che tutto queſto ſi faccia per un principio puramente chimico, e che il flogiſto ſolo operi tutti queſti cangiamenti. Certo è che l'acqua diſtillata medeſima può flogiſticare le arie reſpirabili, onde potrà ancora dar del flogiſto all'aria fiſſa medeſima. Si vedrà in altro luogo come il flogiſto poſſa render l'aria fiſſa inalterabile all'acqua, e come allora poſſa renderſi aria comune reſpirabile.

Illuſtrata

Illuſtrata in queſta maniera la ſeconda quiſtione da noi propoſta, poſſiamo ora paſſare all' eſame della prima, che è ſopra l'aria fiſſa eſiſtente nell' atmosfera.

Si crede dalla comune de' Fiſici d' oggidì, e dai più valenti Chimici, che nell' atmosfera eſiſta una gran quantità d' aria fiſſa, e credono di provarlo col farci oſſervare, che moltiſſimi corpi ſi decompongono continuamente ſulla ſuperficie della terra tanto foſſili, che animali, e vegetabili, i quali ſon pieni di quel fluido aeriforme. Un' altra prova ſi adduce da eſſi, ed è che coi proceſſi flogiſtici ſi trova una gran quantità d' aria fiſſa nell' aria comune, a cui ſi ſono uniti, onde ſpiegano la produzione di quell' aria per una precipitazione chimica. Ma una prova di maggior forza cavano eſſi in favore delle loro ipoteſi dall' eſpoſizione nell' atmosfera di ſali alcalini cauſtici, e dalla calce ſciolta nell' acqua; i primi criſtallizzano alla fine, la ſeconda cade in terra calcarea, e tanto i ſali, che la terra ſi trovano ricchiſſimi d' aria fiſſa. Io però ſon di parere, che le ragioni addotte di ſopra non baſtino per provare con tutta la ſicurezza l' eſiſtenza dell' aria fiſſa nell' atmosfera. E' vero per riſpondere alla prima difficoltà, o prova, che ogni giorno ſi ſchiude dai corpi una gran quantità di quell' aria, ma è altresì vero, che infiniti corpi l' aſſorbono ad ogni iſtante. L' acqua, che cuopre forſe i due terzi del globo, è uno di queſti grandi agenti deſtinati ad aſſorbirla. Non volendo contare i fiumi, le fonti, le acque, ed i vapori cadenti ſulla terra, le piante ſteſſe ne aſſorbono continuamente, ſe ne danno continuamente, talchè non ſi prova da neſſun fatto ſicuro, che i corpi che l' aſſorbono non ſieno molto più di quelli che ne tramandano, e che non vi ſieno più principj e molto più attivi per aſſorbirla, che per iſchiuderla dai corpi.

Rifletto ancora, che l'aria fiſſa eſſendo molto più peſante dell' aria comune non può alzarſi, che pochiſſimo

dentro di essa, ma deve tenersi rasente il suolo. Una prova ne abbiamo nella grotta del Cane vicino a Napoli, dove l' aria fissa non si alza mai al di sopra di un piede, o poco più. L' istesso si osserva appresso a poco nei Tini dove fermenta la birra. L' aria a poca altezza e distanza dal Tino è pura, e sanissima, e si respira senza incomodo alcuno: l' istesso si osserva nella grotta del Cane, e benchè sorta dalla terra un fonte perenne di quell' aria mefitica, non per questo si respira men bene l' aria di quella grotta, segno che non si mescola l' aria fissa coll' aria comune, e che in ogni istante ne viene assorbita quanta ne è tramandata. Io ho voluto esaminare col mio Evaerometro la bontà dell' aria vicino al suolo, e più lontana dal suolo, e non vi ho mai potuto scorgere differenza alcuna. Ho scosso quelle arie nell' acqua pura, e nella dissoluzione di calce, e non mi sono accorto, che differissero in nulla, nè che l' una fosse più diminuita dell' altra.

Una mia curiosità mi portò ad osservare la seguente esperienza. In uno stanzino versai circa 20000. poll. cub. d' aria fissa. Le finestre, e gli usci erano chiusi. Diedi moto all' aria della stanza con un drappo teso per 10. minuti, e dopo 30. altri minuti presi due bocce d' aria l' una all' altezza del suolo a 5. piedi, l' altra di mezzo piede. Scossi quest' aria nell' acqua, e non fu punto diminuita.

Apparisce adunque, che anche allora che si mescola una quantità molto notabile di aria fissa in una quantità limitata d' aria comune, poco dopo non si osservano più gli effetti, o le proprietà dell' aria fissa, segno che viene assorbita prestissimo dai corpi esterni.

Vi è un altro argomento contro la pretesa aria fissa natante nell' atmosfera, che par senza replica. Si scuota lungamente un pollice, o più di tintura di turnesole dentro di un gran recipiente pieno di aria comune della capacità di sette in ottocento pollici; il turnesole non can-

gerà per questo di colore. Si cambj l'aria comune per quante volte si vuole, e si scuota di nuovo, non per questo si cangerà in rosso il turnesole, che pure la più piccola quantità di aria fissa cangia nell' istante. Questa esperienza può portarsi sì in là volendo, che arrivi a dimostrare, che non vi è nè anco un millionesimo di aria fissa nell' aria comune, quantità, che si può trascurare nella presente ricerca, e che non ha nessun rapporto coi fatti rapportati di sopra dai Fisici.

Ma si dirà che forse l'aria fissa è unita all' aria comune in un modo particolare, e che allora non dimostra più le sue prime qualità. Se la prima opinione è comune a tutti i Fisici moderni, questa seconda lo è alla maggior parte dei Chimici, e dei Filosofi, e basterà nominare *Bergman*, e *Scheel* tra i Chimici per tutti gli altri, e *Priestley* tra i Filosofi. Nell' ipotesi di questi Filosofi il flogisto, che ha più affinità coll'aria comune, o respirabile, la lascia staccarsi da lei, e precipitare. Ma questo argomento suppone due cose non dimostrate ancora, l'una che l'aria fissa sia tale per decomposizione, l'altra che sia impossibile, che si formi l'aria fissa in quelle circostanze. Ma tutto questo non par molto verisimile se si considera che se si mette un poll. d'aria comune a contatto del mercurio, si trova il pollice d'aria fissa dopo qualunque tempo con tutte le sue qualità di prima.

L'esperienza mi ha dimostrato che l' acqua distillata se è esposta all' aria s' impregna di aria deflogisticata e non mai di aria fissa, eppure si sa che l'aria fissa ha più affinità coll'acqua dell' aria deflogisticata medesima.

Ma vi è un argomento, che par dimostrare che l'aria fissa, che si trova nell' aria comune, si produce allora, che noi la troviamo in quell' aria.

Le arie artificiali, che non sono state mai aria fissa, che non sono mai state aria comune, sbattute nell'acqua, e rese respirabili di nuovo, mostrano coi processi flogi-

ſtici l'aria fiſſa come prima; e ſe dopo di aver cavato l'aria fiſſa da eſſe ſi rendono reſpirabili di nuovo coll' acqua, danno della nuova aria fiſſa. L' iſteſſo ſi dica dell'aria comune ſpogliata la prima volta della ſua ſuppoſta aria fiſſa, ſe ſi renderà reſpirabile la ſeconda volta, darà nuova aria fiſſa, e così di ſeguito.

Qui ſi vede troppo chiaro che l'aria fiſſa non eſiſteva in quelle arie non mai compoſte di aria comune, e che nell' aria comune ſpogliata di eſſa la prima volta, ſi è formata di nuovo coi proceſſi flogiſtici. Qui non pare che ſi poſſa ricorrere a precipitazioni di arie fiſſe, giacchè ne' primi caſi non vi è mai ſtata tale compoſizione, e nell' ultimo caſo, ſe vi fu nel principio, fu poi levata in ſeguito.

Le coſe finora dette, ed oſſervate da noi ci ſomminiſtrano una riſpoſta contro la difficoltà de' ſali alcalini, che criſtallizzano all'aria aperta, ed alla calce, che ſi ſatura di aria fiſſa, che è l'argomento più forte che ſi poſſa addurre in favore di quella ipoteſi. Non trovo niente impoſſibile, che per il contatto continuato tanto de' ſali alcalini, quanto della calce coll' aria atmoſferica ſempre in moto, poſſa formarſi poco a poco dell' aria fiſſa, dove non ve n'era prima, e ſaturarſi quei corpi di eſſa. Si è veduto ſopra, quanto è facile il formar di quell' aria in mille circoſtanze. Non ſi prova poi che la calce ſia affatto priva di flogiſto, e il dotto Preſidente di Digione ha provato, che l'alcali cauſtico contiene beniſſimo di quel principio. L'iſteſſo ſi dica della terra ponderoſa, e della magneſia, che ſi ſaturano anche eſſe eſpoſte all'aria aperta. Non ſi ſaturano dell' aria fiſſa eſiſtente di prima nell'atmoſfera, ma bensì dell' aria fiſſa, che ſi forma in quelle circoſtanze per il lungo contatto di quelle materie ſciolte nell' acqua non mai priva affatto di flogiſto.

Se io non credeſſi di abuſarmi anche di troppo della voſtra compiacenza, potrei parlarvi di mille coſe impor-

tanti, che ho trovate nel secondo Tomo del vostro Amico Illustre. Permettetemi almeno che io vi parli brevemente di alcune poche.

Il Sig. *Bergman* parlando dell' origine dell' aria fissa scrive: *modificationem acidi nitrosi credit Doct. Priestley, immo & nitrosam, & vitriolicam diversas tantum variationes esse urget, nec refragabor, sed fundamentum quo hae nituntur adsertiones mihi valde lubricum videtur.* Confutate poi le ragioni del Filosofo Inglese finisce con dire " *alioquin non diffiteor mihi haud improbabilem esse conjecturare de ortu acidi aerei & nitrosi, uti mox fusius explicabitur.* (a)

Se codesto valente uomo avesse conosciuto le mie esperienze sulla decomposizione totale dell' acido nitroso in aria fissa, in aria flogisticata, ed in aria comune, avrebbe subito veduto, che quello che era un'ipotesi appoggiata a fallaci principj in *Priestley*, ed una semplice congettura per lui medesimo, era una verità di fatto. Queste mie esperienze sull' acido nitroso furono da me fatte a Parigi, e comunicate là ai due illustri Chimici i Sigg. *Darcet* e *Ruelle* fin d' allora, e dopo furono da me ripetute in Londra alla presenza del mio Amico M. *Ingen-housz*. I risultati di esse si leggono stampati in Londra nel 1779. ed inseriti nell' opera del mio Amico, che l' anno dopo egli stesso tradusse in francese col titolo di *Experiences sur les vegetaux*, e pubblicò in Parigi. Se ne parla in questa opera alla pag. 115., ma nulla vi si dice del metodo da me adoperato, nè delle quantità assolute, e relative dei prodotti, e delle arie da me ottenuti.

Io non conosco nessuno altro acido minerale, che si possa ridurre per intiero in semplice aria, benchè io pos-

(a) Opusc. Chem. & Phys. T. II. pag. 360.

ſa cavar delle arie da tutti gli altri acidi abbondantemente, e che una parte di eſſi ſieno ſtati da me decompoſti in arie. Gli acidi vegetabili, ed alcuni degli acidi animali, e foſſili analoghi ai vegetabili ſi decompongono anche eſſi in arie per intiero. Queſta importante verità ſomminiſtra un fortiſſimo argumento di induzione, che tutti gli acidi in ultima analiſi non ſieno che arie, o per meglio dire per fuggir qui qualunque diſputa e ipoteſi, dico che quegli acidi ſi preſentano ſotto forma di fluidi elaſtici aeriformi, o queſto ſegua per addizione, o per ſottrazione di qualunque ſoſtanza, non conoſcendo altra ſorta di trasformazioni ne' corpi. Tutto queſto io mi luſingo d' averlo provato in alcune Memorie ſtampate ſugli acidi vegetabili, ed animali nel Giornale dell' Ab. *Rozier*; ma è molto più ſorprendente, e nuovo affatto che ſi poſſa provare l' iſteſſo ſull' acido nitroſo, che è acido minerale.

Le mie eſperienze ſui vegetabili hanno fatto dire al celebre Traduttore di *Bergman* il Preſidente *Morveau*, che l' aria fiſſa è probabilmente l' acido univerſale tanto cercato dai Chimici antichi, e del paſſato ſecolo, e con sì poco ſucceſſo. Se egli aveſſe conoſciuto anche le altre mie eſperienze ſull'acido nitroſo, avrebbe potuto dare un grado molto maggiore di probabilità a quell' ipoteſi, la quale non ſarà mai portata a quel grado di evidenza, che ſi domanda nelle coſe Fiſiche, ſe non quando ſi ſarà provato, che tutti gli altri acidi ancora ſi decompongono per intiero in arie: diſſi per intiero, perchè la poca aria, che ſi cava de eſſi anche ora coi metodi già noti, non forma neſſuna prova, e rimane quell' opinione una ſemplice ipoteſi vaga e iſolata da qualſivoglia ragione. Le ſole mie eſperienze fatte ſopra tanti acidi creduti dai Chimici affatto diverſi fra di loro, ci ſomminiſtrano almeno una fortiſſima prova d' induzione, quando prima di eſſe non altro al più ſi poteva dire, ſe non che non era ancor dimoſtrato per impoſſibi-

le che l'aria fiſſa non poteſſe eſſere l' acido primitivo, l'acido univerſale, verità ſterile, equivalente al nulla, e da sbandirſi dalla Fiſica moderna.

Il deſiderio di trattenermi con voi, e di parlare delle ſcoperte del voſtro Amico Illuſtre mi rende più lungo di quello, che vorrei eſſerlo, onde paſſerò rapidamente ad un altro punto, che occupa da qualche tempo molti Filoſofi eſperimentatori, nelle di cui mani ſi è formato un ramo di nuova ſcienza in queſti ultimi anni, che promette moltiſſimo, e fino de' vantaggi reali alla ſalute pubblica. Il Sig. *Bergman* alla pag. 369. della ſua opera da noi citata parlando de' vegetabili ſi ſpiega così: *novimus vegetabilia in tenebris langueſcere, & colore ſpoliari, ita autem vitiata radiis ſolaribus expoſita cito reſtitui. Scilicet lux conſtat materia caloris cum exceſſu flogiſti. Hic exceſſus primus abſorbetur, & dein ſenſim licet difficilius etiam illud inflamabile ſecernitur, quod materiam conſtituit caloris, nulla enim ſine calore vegetatio, & hoc ipſum alterum principium, aer bonus laxatur. Itaque pro inæquali caloris gradu, pro varia vegetabilium poſitione reſpectu lucis & eorum diverſa lucem coloremque decomponendi virtute, non poſſunt non diſſimiles oriri effectus. Immo aqua ipſa, quae puriſſima videtur, ſubtiliſſima non raro fovet corpora organica, viſum fugentia, quae in luce ſolari conſtituta eamdem vegetando decomponunt & bonum provocant aerem.*

Io ho voluto portare per eſteſo tutto quel paſſo, perchè contiene una nuova ſpiegazione ſopra le diverſe arie, che ſi ottengono eſponendo i vegetabili alla luce, ed all' ombra. Intorno ai fatti principali che ſi oſſervano nelle piante eſpoſte al ſole, e all'ombra, io mi riporto intieramente alle belle, ed originali eſperienze dell' illuſtre mio Amico, e Filoſofo M. *Ingen–houſz*, per cui deve aver meritato giuſtamente la ſtima dei veri Fiſici.

Ho voluto anche io ſperimentar le mie forze ſopra di queſta materia sì vaſta, e che ha fatto de' progreſſi sì rapidi in pochi anni; e credo di eſſere ben fondato dopo un' infinità d' eſperienze da me fatte, e variate in mille maniere ſopra più di 700 piante, a conſiderar queſta materia, come ancor nuova; e credo di potere aſſicurare che l' eſperienze riportate in generale fin qui dai diverſi Scrittori ſono ancora in troppo picciol numero, non abbaſtanza variate, e limitate a troppo poche piante, perchè non ſieno ſoſpette, o falſe le conſeguenze, che ſe ne ſono dedotte, e le teorie, che ſi è voluto immaginare per iſpiegarle.

I riſultati di alcune di queſte mie eſperienze ſono ſtati comunicati qui a diverſi miei Amici ſino da due anni fa, e molte di eſſe eſperienze ho io fatto vedere a più perſone, che mi onoravano in caſa della loro preſenza. Baſta che qui vi dica, che cangiata una ſola circoſtanza nelle eſperienze delle piante eſpoſte al ſole, circoſtanza, che le accoſta ancora di più al loro ſtato naturale, tutto ſi vede cangiato, e l'aria, che doveva eſſere deflogiſticata e ſana, ſi trova per contrario micidiale, e meſitica. Non vi dico di più perchè ſpero fra poco di pubblicar le mie Eſperienze in tutto il loro dettaglio. Da queſto voi vedete che quel che ſi è pubblicato finora ſopra queſta materia è falſo nella ſua generalità, o per meglio dire non è vero che in qualche caſo o accidente, o circoſtanza che ſi voglia dire, ed anche queſti fatti sì limitati non ſono i più naturali alle piante, che finiſce di rovinare ogni coſa. Per riguardo al dettaglio delle eſperienze fatte ſulle piante, ed eſpoſte al ſole ed all' ombra, ſi deve conſultare come diſſi l'eccellente Opera ſopra citata di M. *Ingen-houſz*.

Finiſco coll' aſſicurarvi che quei corpi organici, di cui parla il Sig. *Bergman*, e che ſi trovano nell' acqua dando dell' aria pura eſpoſti al ſole, ſono ſpeſſo ſemplici animali, e non piante, come ſi è creduto finora da tutti.

tutti. Questi animali sono di due specie diverse, l'una è formata di minimi animali rotondi quasi sempre in moto; l' altra è fatta di animali oviformi e quasi fatti a baccelli con poco moto, ma molto più grandi de' primi. Spesso si trovano le due specie insieme nella stessa acqua, e qualche volta si trova la prima specie sola. La specie globulare è la medesima, che si trova nelle acque stagnanti, per cui quelle acque appariscono nella superficie verdi, e aranciate. Gli osservatori microscopici le han credute piantine minime: ma sono più di dieci anni, che mi sono assicurato, che quel colore non dipende da sostanze vegetabili, ma da piccoli animali, e che i Bottanici, e gli osservatori si sono ingannati.

E' per altro vero, che si trova più spesso nelle acque esposte al sole, oltre quelle due specie di animali di cui si è parlato, qualche altra pianta minima microscopica, come per esempio la Tremella ecc. ma voi sapete, che la Tremella è un corpo organizzato dotato di vita, e di sentimento, come vi feci osservare fin da quando passaste per Firenze nel vostro viaggio d' Italia, e come l' avrete letto nelle mie opere.

Ma quando ancora non si volesse considerare la Tremella come un animale-pianta da chi non sa osservare da sè, non si può dubitare un momento della natura animale delle altre due qualità di corpi; ed ecco che ci siamo aperti la via ad un bellissimo fenomeno, e nuovo, ed inaspettato, ed è che vi sono degli animali, che esposti al sole nell' acqua danno aria deflogisticata, come la danno le piante le più atte a produrre quell' aria. Tutti gli animali fin qui conosciuti, e comunque esposti al sole, ed all'aria, non danno che aria micidiale, e mefitica.

Non è adunque il solo regno vegetabile destinato a purificar l' aria atmosferica, ma vi sono ancora degli animali, che fanno l' istesso, benchè poi sia vero come

ſi vedrà dalle mie *eſperienze ſui vegetabili* , che va limitata anche la prima propoſizione contro tutto quello , che ſi è creduto finora dai Fiſici oſſervatori ; che anzi ſarebbe tutto l' oppoſto , e le piante in generale nel loro ſtato naturale , o almeno in uno ſtato più vicino al naturale di quello , che ſin qui ſi è praticato dagli altri , come io mi luſingo di aver fatto , danno aria mefitica , micidiale , benchè eſpoſti al ſole . Si devon bensì eccettuare le piante craſſe o ſucculenti , che danno aria deflogiſticata anche in quelle circoſtanze medeſime , in cui le altre la danno mefitica . Io credo di eſſermi ſpiegato abbaſtanza per far capire , che le mie eſperienze portano non ſolo a diſtruggere i fatti e le teorie immaginate fin qui ſopra queſta importantiſſima materia , ma che vanno a formare un nuvo ramo di Scienza ignoto ancora ai Fiſici , e non da alcuno previſto ancora .

DELL' IRREDUCIBILITA'

DELLA FORMULA CARDANICA A FORMA FINITA, ALGEBRAICA, E LIBERA DA ASPETTO IMMAGINARIO.

Del Sig. ANTON-MARIO LORGNA Direttore delle Scuole Militari di Verona.

INTRODUZIONE.

E' palese oggimai in che consista il nodo famoso dell' equazioni cubiche nell' Algebra Cartesiana. Le equazioni di terzo grado, siccome è noto, sono reducibili tutte alla forma seguente

$$(A)\ldots x^3 - px - q = 0$$

in cui p e q sono quantità razionali. Si tratta di determinare i tre valori di x in p e q, quando tutti e tre esser debbono reali e diseguali, e nessun divisore esatto dell' ultimo termine q soddisfa' all' equazione; il che vuol dire, che tutti e tre que' valori debbono anche essere irrazionali. *Scipion Ferri* Italiano fu il primo che ci desse la risoluzione generale dell' equazione (A) sotto questa forma

$$(B)\ldots x = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

la quale poi assunta e divulgata da *Cardano* prese il nome di formula Cardanica. Ma quando tutti e tre i valori di x debbono essere reali e diseguali, si dimostra che $p^3 : 27$ è maggiore di $q^2 : 4$. Dunque nel caso delle tre radici reali e diseguali, la quantità sotto il segno radicale quadratico $\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ diventa necessa-

riamente negativa. E come, attese le nozioni convenute circa i segni affermativi e negativi dell' Algebra, è impossibile la radice d' indice pari di quantità negativa, che perciò vien detta quantità immaginaria; così nel caso delle tre radici reali e diseguali la formula Cardanica involge sotto ciascheduno de' radicali cubici una quantità immaginaria. Faremo vedere a suo luogo, che qualunque volta l' equazione (*A*) abbia radice razionale, caso in cui questa medesima radice è pur divisore esatto dell' ultimo termine q, anche la formula Cardanica (*B*) si spoglia non solamente dell' aspetto irrazionale, ma degl' immaginarj eziandio, che svaniscono per contrarietà di segni, e ci risulta il valore razionale, o la radice razionale dell' equazione. E così pure accade, se tutte tre le radici reali avessero da essere razionali, somministrandole tutte ad una ad una la formula (*B*). Di modo che non una sola, ma tutte tre le radici reali dell' equazione sono rappresentate puntualmente e comprese nella formula Cardanica, siccome il volle dimostrare il Sig. d' *Alembert* direttamente (*Opusc. Mat. T. V. Parte* 1. *pag.* 204), e può non difficilmente dimostrarsi. Ma allorchè non ha l' ultimo termine q alcun divisore esatto, che soddisfaccia all' equazione, non si è scoperto ancora alcun metodo, con cui si ricavino i tre valori, bensì irrazionali, come debbono essere, ma liberi da immaginarj. L' espressione di questi valori per serie, e con un' infinità di termini, come che continuamente decrescenti e reali, non fa al caso; come non lo fa neppure l' espressione per seni, e coseni di natura trascendente, per quello che si ricercano valori finiti, com' è l' espressione Cardanica, valori algebraici, e valori in questo solo da' Cardanici differenti, che sieno liberi da aspetto immaginario. Ancorchè si dimostri incontrastabilmente essere di valor reale l' intera espressione Cardanica, cioè essere reale la quantità

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

che eſprime la radice dell' equazione, ad ogni modo il non eſſerſi giammai potuto eſprimere alcuna delle radici dell' equazione (*A*), nel caſo, che tutte e tre eſſer debbano reali, diſeguali, e non razionali, e p q ſieno razionali, ſotto altra forma ugualmente finita, ed algebraica, ma fuor d' aſpetto immaginario, ha fatto, che ſiaſi ſempre queſto caſo denominato irreducibile. Trattandoſi pertanto di rintracciare una dimoſtrazione aſſoluta di queſta irreducibilità, non baſta il dimoſtrare, che nel caſo propoſto non è poſſibile di riſolvere per alcun metodo cognito l'equazione (*A*), e di trovare una radice ſotto le condizioni enunciate, perchè non reſta mai eſcluſa la poſſibilità di farlo per metodi, che non ſono ancor noti: nè rigoroſamente baſta, per una ſimile ragione, il dimoſtrare, che maneggiando e ſvolgendo l' equazione (*A*) per qualunque metodo conoſciuto, l'ultimo riſultamento ſia ſempre o l' eſpreſſione Cardanica (*B*), o altra ſimile, contenente ſempre quantità immaginarie. Il modo incontraſtabile di provare l' aſſoluta irreducibilità del caſo in quiſtione è quello di dimoſtrare direttamente, ch' è aſſolutamente e per natura ſua impoſſibile il ridurre l'eſpreſſione Cardanica a forma finita algebraica, e libera da aſpetto immaginario. Siccome è fuor di dubbio, che quantunque ogni termine del Binomio ſia in sè quantità aſſolutamente immaginaria, ciò non oſtante la combinazione di tutti e due coſtituiſce una quantità aſſolutamente reale, ed eſprime ſicuramente la radice reale dell'equazione; così sì fatta dimoſtrazione dell' aſſoluta irreducibilità di quel caſo serve nel tempo ſteſſo ad eſcludere neceſſariamente la poſſibilità di riſolvere per alcun immaginabile cognito od incognito metodo l' equazione cubica nel caſo in quiſtione, e di aſſegnarvi la radice finita, algebraica, ed immune

da immaginarj : altrimenti la radice Cardanica ſarebbe reducibile a forma finita, algebraica, ed eſente da immaginarj, contro la dimoſtrazione. Ed ecco come il tentare una dimoſtrazione dell' irreducibilità aſſoluta del Binomio Cardanico, dipendente dalla natura de' termini ſteſſi del Binomio, tende direttamente, e neceſſariamente a troncare ogni ulteriore perquiſizione ſu queſto propoſito. La ſtrada, che ho battuto in queſta breve Memoria per rinvenirla, può non ſenza fondamento giudicarſi più diretta dell' altra, che ho preſo in uno ſcritto pubblicato nel 1776., che ha per titolo *de Caſu irreductibili tertii gradus* ecc. *Exercitatio Analytica*. Giudicheranno i Geometri, ſe vi ſia riuſcito, e ſe ſia impoſto fine alla quiſtione.

Definizioni.

§. I. Irrazionale del grado n è quello, in cui neſſuna quantità moltiplicata $n-1$ volte per sè ſteſſa può produrre la quantità ſotto il vincolo radicale. Le quantità pertanto $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+Q)}$, $\sqrt[n]{(P+Q+R)}$ ecc. ſaranno tutte irrazionali del grado n, toſto che non v' abbia alcuna quantità, la quale moltiplicata $n-1$ volte per ſe ſteſſa, poſſa produrre le grandezze P, $P+Q$, $P+Q+R$ ecc. qualunque coſa ſia P, Q, R ecc.

II.

Irrazionale ſemplice è quello, che non è unito a quantità razionale, come $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+Q)}$ ecc. qualunque coſa ſieno, e in qual numero ſi vuole le quantità ſotto il vincolo radicale. In conſeguenza irrazionale miſto ſarà quello, ch' è accoppiato a quantità razionali, come $A+\sqrt[n]{P}$, $A+\sqrt[n]{(P+Q)}$ ecc. A eſſendo qualunque quantità o compleſſo di quantità razionali.

III.

$\sqrt[n]{P} + \sqrt[m]{(P+Q)}$ ecc. è un irrazionale binomio ecc. tosto che li termini $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[m]{(P+Q)}$ ecc. sono irrazionali semplici, e però vi avrà irrazionale polinomio semplice, e misto, secondo che o non vi avrà, o vi avrà quantità razionale accoppiata al polinomio irrazionale.

IV.

Irrazionale immaginario è quello, in cui la quantità sotto il vincolo è negativa, e l' indice n dell' irrazionalità è pari.

V.

Immaginario semplice è quello, che non è unito a quantità reale, razionale, o irrazionale, ch' ella sia, come $\sqrt[2n]{-P}$, $\sqrt[2n]{(-P-Q)}$ ecc. come pure $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, che si riduce a $\sqrt[2n]{-P}$; e immaginario misto quello, in cui l' immaginario semplice è unito a quantità reale, come $A+\sqrt[2n]{-P}$, essendo A razionale, o irrazionale reale.

VI.

Immaginario composto può dirsi quello, in cui un immaginario misto è sotto vincolo radicale. Negl' irrazionali reali ognuno de' $\sqrt[n]{P}$, $\sqrt[n]{(P+Q)}$ ecc. è sem-

plice in sè. Ma negl' immaginarj non può confonderſi $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ con $\sqrt[n]{\sqrt{-P}}$, eſſendo A reale. Per diſtinguere dunque $\sqrt[n]{(A+\sqrt{-P})}$ dagl' immaginarj ſemplici e da' miſti, il diremo compoſto.

Corollarj.

I.

§. II. Non ſarà pertanto $\sqrt{(5+2\sqrt{6})}$ un irrazionale di ſecondo grado, poichè il binomio $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ moltiplicato una volta per sè produce la quantità ſotto il vincolo $5+2\sqrt{6}$ (*Def. I*), e così per qualunque altro grado.

II.

Se dunque la quantità compreſa ſotto il vincolo o ſegno dell' irrazionalità ſarà razionale, è manifeſto, che non vi avrà razionale dal di cui prodotto poſſa ella riſultare giammai.

III.

E ſimilmente ſe la grandezza ſotto il ſegno ſarà comunque compoſta di razionale, ed irrazionale dello ſteſſo, o d' altro grado, non vi avrà nè razionale, nè irrazionale, nè miſto di razionale ed irrazionale, che moltiplicato in sè $n-1$ volte poſſa produrla giammai.

IV.

La ſomma in conſeguenza, e la differenza di due o più irrazionali ſemplici, cioè un polinomio irrazionale ſemplice, ſarà ſempre quantità irrazionale.

V.

V.

E parimenti la ſomma, e la differenza di due o più irrazionali immaginarj ſemplici, ſarà ſempre un immaginario. Ma la ſomma, o la differenza di due, quattro ecc., o di tal numero pari d' irrazionali immaginarj compoſti che ſi vuole (§. *I Def. VI*) potrà eſſere quantità reale.

VI.

E non vi avrà mai altra quantità finita, che poſſa equivalere ad una quantità irrazionale ſemplice o miſta, reale o immaginaria, fuorchè ella ſteſſa, che è quanto dire una quantità a sè identicamente uguale. Tutte le infinite forme, che può ella prendere, non ſono in fondo, che grandezze indenticamente uguali all' irrazionale traſformato; il che conſegue neceſſariamente dalla natura medeſima dell' irrazionalità.

SCOLIO.

§. III. Con queſte nozioni elementari ſotto gli occhi è difficile il prender errore al caſo, ch' è frequente, di ſupporre ne' calcoli tale o tal altra quantità come irrazionale, e nel trar conſeguenze dal paragone di quantità irrazionali sì reali, che immaginarie tra di sè, o con altre razionali, od irrazionali. E ſiccome il caſo in quiſtione non è, che un caſo particolare delle equazioni del terzo grado legato intimamente colla loro generale riſoluzione; così, dovendo trattarſi di quello, non è poſſibile di ſtaccarlo talmente dal tutto, che non convenga abbracciare ad un tempo la teoria generale. Ho premeſſo pertanto queſte poche nozioni ſugl' irrazionali a ſcanſamento d' ogni quiſtione di nome, e per

appianare nell' equazioni di terzo grado, risolubili tutte generalmente col metodo Cardanico, le difficoltà, che a' principianti singolarmente possono occorrere nel maneggio degl' irrazionali, e sviluppamento de' razionali apparenti sotto forme irrazionali.

PROPOSIZIONE I.

§. IV. *Se il Binomio* $A+\sqrt{B}$, *in cui* A, B *sono quantità razionali, e* $\sqrt{B}$ *è un irrazionale semplice quadratico, abbia radice cubica, ella dee almeno constare di due termini.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, se può la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ constare di un solo termine z, razionale od irrazionale semplice, dovrà essere, elevando al cubo, $z^3=A+\sqrt{B}$. Se z^3 è razionale, dovrà essere $\sqrt{B}=z^3-A$ quantità razionale, contro il supposto. E se z^3 è irrazionale semplice, dovrà essere $z^3-\sqrt{B}=A$, quantità razionale che non può essere. Non potendo dunque la radice cubica di $A+\sqrt{B}$ constare di un solo termine nè razionale, nè irrazionale semplice, è manifesto, che ella dee essere composta almeno di due termini. Il che ecc.

PROPOSIZIONE II.

§. V. *Se* B *fosse razionale negativo, cioè* $\sqrt{B}$ *un immaginario semplice, la radice cubica dell' irrazionale misto* $A+\sqrt{B}$ *sarà anch' essa almeno binomia necessariamente.*

DIMOSTRAZIONE.

Se ella potesse constare di un sol termine z, dovrebbe, come precedentemente, aver luogo l' equazione z^3

$= A + \sqrt{B}$. La quantità z^3 non può essere razionale, perchè $\sqrt{B}$, come irrazionale, non può mai essere identicamente uguale a quantità razionale, nè come immaginario uguagliare una quantità reale. Ma non può nè pure essere z^3 irrazionale semplice, nè reale, nè immaginario, mentre dovendo sussistere l' equazione $z^3 - \sqrt{B} = A$, dovrebbe nel primo caso essere la differenza di due irrazionali semplici uguale a quantità razionale (§. *II Coroll. IV*), e un immaginario a quantità reale; e nel secondo essere una quantità razionale e reale uguale alla differenza di due immaginarj semplici. Se dunque non può essere monomia la radice cubica di $A + \sqrt{B}$, ella dovrà almeno constare di due termini, posto che $A + \sqrt{B}$ sia un cubo perfetto. Il che ecc.

PROPOSIZIONE III.

§. VI. *Dovendo essere almeno binomia la radice cubica di* $A + \sqrt{\pm B}$, *se sia ella estraibile, li termini della radice o saranno entrambi irrazionali, o razionale l' uno, e l' altro irrazionale.*

La Proposizione è per sè evidente.

PROPOSIZIONE IV.

§. VII. *Se si abbia una quantità, considerata lineare, composta di due parti* A, B, *qualunque esse si sieno; e abbiavi un quadrato* C^2 *uguale alla somma del quadrato* A^2 *e del triplo quadrato* B^2; *ed un altro quadrato* D^2 *uguale alla somma del quadrato* B^2, *e del triplo quadrato* A^2; *il cubo di quella quantità* $A + B$ *è sempre uguale a due solidi, uno de' quali ha per base il quadrato* C^2, *e per altezza la parte* A, *e l' altro ha per base il quadrato* D^2, *e per altezza l' altra parte* B.

Ciò è manifesto dalla genesi istessa de' cubi, e non ha bisogno di dimostrazione.

COROLLARIO I.

§. VIII. Essendo pertanto $(A+B)^3 = AC^2 + BD^2$, si rende pure manifesto, che qualunque cosa sia A e B, essendo considerate grandezze lineari, il cubo di $A+B$ è sempre composto di due solidi d' ognuno de' quali è dimensione, o parte aliquota una delle due quantità A B.

II.

Se una delle due parti B sia un irrazionale quadratico semplice $\sqrt{K}$, qualunque cosa sia K sotto il vincolo radicale, purchè $\sqrt{K}$ sia irrazionale, essendo $(A + \sqrt{K})^3 = AC^2 + D^2\sqrt{K}$; e C^2 essendo la somma del quadrato A^2 e del triplo quadrato di $\sqrt{K}$, il solido AC^2 sarà libero dal vincolo radicale quadratico, qualunque cosa poi sia K, riferendosi l' irrazionalità del secondo termine a questo vincolo, per rispetto al quale $\sqrt{K}$ si considera lineare, e il solo solido $D^2\sqrt{K}$ ne resterà affetto necessariamente.

III.

E' impossibile in conseguenza, che il binomio $AC^2 + D^2\sqrt{K}$ abbia altra radice cubica fuorchè $A+\sqrt{K}$, essendo $C^2 = A^2 + 3K$, $D^2 = K + 3A^2$ (*Prop. IV*).

IV.

Ma è parimente impossibile, che $A+\sqrt{K}$ sia radice cubica d' altro binomio $M+\sqrt{N}$, che non sia reducibile a questa forma $AC^2 + D^2\sqrt{K}$, come è manifesto.

PROPOSIZIONE V.

§. IX. *Perchè il binomio* $M+\sqrt{N}$, *essendo* M N *quantità razionali, possa avere per radice cubica il binomio* $a+\sqrt{b}$, *essendo* a b *quantità reali*, $\sqrt{b}$ *un irrazionale quadratico semplice, bisogna che sia* a *divisore esatto di* M, *e* b *divisore esatto di* N.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non può $a+\sqrt{b}$ essere radice cubica di binomio, che non sia reducibile alla forma $aC^2+D^2\sqrt{b}$, essendo $C^2=a^2+3b$, $D^2=b+3a^2$ (§. *VIII Coroll. IV*). Perchè dunque $a+\sqrt{b}$ sia radice cubica del binomio $M+\sqrt{N}$, bisogna ch' esso sia di quella forma, o a quella forma reducibile. Ma essendo M N quantità razionali, $\sqrt{N}$ un irrazionale quadratico semplice, se $M+\sqrt{N}$ non è attualmente di quella forma, non ammette per natura sua di esservi ridotto (§. *II Coroll. VI*). In conseguenza perchè questo binomio possa avere $a+\sqrt{b}$ per radice cubica, bisogna che sia attualmente $M=aC^2$ (§. *VIII Coroll. II*), $\sqrt{N}=D^2\sqrt{b}$. Ma a è una dimensione, o divisore esatto di aC^2, b lo è di bD^4. Bisogna dunque che a sia divisore esatto di M, b divisore esatto di N, come s' aveva da dimostrare.

SCOLIO.

§. X. Se sia $A+\sqrt{B}$ radice del grado n del binomio $M+\sqrt{N}$, suole comunemente assumersi $A-\sqrt{B}$, come radice del grado n di $M-\sqrt{N}$. Ma questa posizione non è giusta, se non se nel caso, che A, B, M, N abbiano una certa relazione tra di sè, fuori del quale la conclusione è falsa. Avendo pertanto da farne uso nel decorso di questa Memoria, non è fuor di pro-

posito il prendere in esame accurato quest' articolo, mettendo in chiaro la connessione vera tra le radici de' Binomj $M+\sqrt{N}$, $M-\sqrt{N}$, e la condizione, senza di cui, se sia $A+\sqrt{B}$ la radice $n.^{ima}$ del primo, non può essere $A-\sqrt{B}$ radice $n.^{ima}$ del secondo. Mi sarebbe forse sembrato superfluo il farlo, se non trovassi nel XIII. Vol. *de' vecchj Comment. di S. Pietroburgo* alla pag. 17., enunciata la cosa in modo, che può indurre in errore agevolmente.

Sia $z+y$ la radice quadrata, per esempio, del binomio $A+\sqrt{B}$. E' certo che dee necessariamente aver luogo quest' equazione.

$$(P) \ldots\ldots A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$$

Sin che si sta in questa generalità, z ed y sono indeterminate, e possono essere quel che si vuole, purchè si soddisfaccia all' equazione (P). E se si aggiunga negativamente da una parte e dall' altra l' irrazionale semplice $2\sqrt{B}$, risulta l' equazione.

$$(Q) \ldots\ldots A-\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2-2\sqrt{B}$$

equazione necessaria al par della prima, e che lascia le z, y nella stessa indeterminazione. Soddisfacendo all' equazione (P), qualunque cosa risulti per z ed y, nell' atto che si conseguisce la radice di $A+\sqrt{B}$, è data pure dall' equazione (Q) la radice di $A-\sqrt{B}$. Questa è la vera ed unica connessione necessaria tra le radici di questi due binomj, sì che essendo $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+y$, non lascia pure di essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=\sqrt{((z+y)^2-2\sqrt{B})}$. Ma se si traggano dall' equazione (P) diverse paja di equazioni (I), (II), (III) ecc.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{B}=2zy+y^2\\ A=z^2\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{array}{l}A=z^2+2zy\\ \sqrt{B}=y^2\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{II})$$

$$\left.\begin{array}{l}A=z^2+y^2\\ \sqrt{B}=2zy\end{array}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{III})$$

ecc.

combinando a piacere i termini dell' equazione, non ha dubbio, che a qualunque di queste combinazioni (I), (II) ecc. si soddisfaccia separatamente, si è ad un tempo soddisfatto all' equazione (P). Se dunque sia M il valor di z, N quel d' y della combinazione (I); M' il valor di z, N' quel d'y della combinazione (II) ecc.; poichè debbe sempre essere $\sqrt{(A+\sqrt{B})} = z+y$, sarà necessariamente $M+N = M'+N' = M''+N''$ ecc. Ora si finga essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})} = z-y$. Sarà $A-\sqrt{B} = z^2-2zy+y^2$, ed essendo $A+\sqrt{B} = z^2+2zy+y^2$, se si sommino, e si sottraggano successivamente queste due equazioni, si ha

$$A = z^2+y^2$$
$$\sqrt{B} = 2zy$$

che è appunto la combinazione (III). Questa è la combinazione, che determina i valori di z ed y, sicchè essendo $\sqrt{(A+\sqrt{B})} = z+y$, viene pure ad essere $\sqrt{(A-\sqrt{B})} = z-y$. Ma il supporre, che debba risultare lo stesso in qualunque delle rimanenti combinazioni, è lo stesso che supporre, che, come divisa una linea in due parti qualunque M N, poi in altre due M', N', e così successivamente, è sempre $M+N = M'+N' = M''+N''$ ecc., debba anche essere necessariamente $M-N = M'-N' = M''-N''$ ecc. che non può essere „ *Inter utramque formam* (così si esprime l' illustre Sig. *Eulero* nel luogo sopraccitato) *tam arctus intercedit nexus, ut inventa alterius formæ radice cujusvis gradus, ex ea simul radix alterius formæ facillime formari queat* „. In fatti essendo $\sqrt[n]{(A+B)} = M+N$, sarà $\sqrt[n]{(A-B)} = \sqrt[u]{((M+N)^n-2B)}$, come abbiamo indicato precedentemente, ma non per quello che vi si adduce in seguito „ *Si enim radix cujuscumque potestatis ex binomio* A+B *fuerit* x+y, *tum respondentis residui* A—B *radix ejusdem potestatis erit* x—y „.

Pigliamone un esempio facile

Sia $\sqrt{(A+B)}=z+y$; ſarà $A+\sqrt{B}=z^2+2zy+y^2$, ed aſſunta a piacere una combinazione, pongo $A=2zy$, $\sqrt{B}=z^2+y^2$. Soſtituendo nella ſeconda equazione il valore di z tratto dalla prima, ſi avrà l' equazione

$y^4-y^2\sqrt{B}+\frac{A^2}{4}=0$, la quale ſomminiſtra

$y=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{B}+\sqrt{(B-A^2)}}{2}\right)}=Q$, e però $z=\frac{A}{2Q}$, e $\sqrt{(A}$ $+\sqrt{B})=\frac{A}{2Q}+Q$. Ma eſſendo $A+\sqrt{B}=(z+y)^2$, e però neceſſariamente $A-\sqrt{B}=(z+y)^2-2\sqrt{B}$, perchè poſſa eſſere $\sqrt{(A-\sqrt{B})}$ uguale a $z-y$, dovrà eſſere $(z+y)^2-2\sqrt{B}=(z-y)^2$, cioè $2zy=\sqrt{B}$. Ma $\sqrt{B}=z^2+y^2$: biſognerebbe dunque che aveſſe luogo l'equazione $2zy=z^2+y^2$, cioè che foſſe $A=\sqrt{B}$, $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=\sqrt[4]{4B}$, e $\sqrt{(A-\sqrt{B})}=0$

Non è dunque lecito di conchiudere, dall' eſſere $\sqrt[n]{(A+B)}=z+y$, che ſia pure $\sqrt[n]{(A-B)}=z-y$, ſe non abbiano luogo le due equazioni

$$A=z^n+\frac{n(n-1)}{1.2}z^{n-2}y^2+\frac{n....(n-3)}{1.2...4}z^{n-4}y^4+\text{ecc.}$$

$$B=\frac{n}{1}z^{n-1}y+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^{n-3}y^3+\frac{n...(n-4)}{1.2....5}z^{n-5}y^5+\text{ecc.}$$

cioè ſe non ſi determinino da queſte relazioni i valori di z ed y. Ed è poi manifeſto che a queſta condizione è ſempre legittima l' aſſunzione, come s' è detto da principio.

PROPOSIZIONE VI.

§. XI. *Se l' equazione* (Δ)

$(\Delta)\ldots.\ 64z^9-48Az^6+(27B-15A^2)z^3-A^3=0$

ammetta per z *un valore razionale, il binomio* $A\pm\sqrt{B}$, *eſſendo*

essendo A, B *razionali*, $\sqrt{B}$ *irrazionale semplice*, *avrà radice cubica binomia composta di razionale*, *ed irrazionale semplice di questa forma* $M \pm \sqrt{N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi che sia $\sqrt[3]{(A+\sqrt{B})} = z + \sqrt{y}$. Innalzando al cubo, dovrà essere $A + \sqrt{B} = z^3 + 3zy + (3z^2 + y)\sqrt{y}$; e perchè risulti $\sqrt[3]{(A-\sqrt{B})} = z - \sqrt{y}$, assumiamo la combinazione necessaria (§. X.)

$$A = z^3 + 3zy, \quad \sqrt{B} = (3z^2 + y)\sqrt{y}$$

Quadrando l' una e l' altra equazione, si otterrà

$$A^2 = z^6 + 6z^4 y + 9z^2 y^2$$
$$B = 9z^4 y + 6z^2 y^2 + y^3$$

e sottraendo la seconda di queste equazioni dalla prima s' avrà $A^2 - B = (z^2 - y)^3 = \frac{(4z^3 - A)^3}{27z^3}$, sostituendovi il valore di y tratto dall' equazione $A = z^3 + 3zy$. Quest' equazione ridotta somministra l' equazione (Δ)

$$(\Delta) \ldots\ldots 64z^9 - 48Az^6 + (27B - 15A^2)z^3 - A^3 = 0$$

Se dunque si abbia un valore razionale per z da quest' equazione $= M$, poichè $y = \frac{A - z^3}{3z}$, sarà pure dato razionalmente il valore di $y = \frac{A - M^3}{3M} = N$, e però sarà $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M \pm \sqrt{N}$, come s' aveva da provare.

COROLLARIO I.

§. XII. Siccome l' equazione $A^2 - B = \frac{(4z^3 - A)^3}{27z^3}$ può essere messa sotto questa forma

$$(8z^3 - 2A)^3 = (27A^2 - 27B)\,8z^3$$

dalla quale estratta la radice cubica s' ottiene l' equazione

$$(\Delta') \ldots (2z)^3 - 3(2z)\sqrt[3]{(A^2 - B)} - 2A = 0$$

è manifesto, che se v' abbia per z valore razionale M nell' equazione (Δ'), si avrà, come prima, $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M \pm \sqrt{N}$.

COROLLARIO II.

E se fosse il secondo termine del binomio un immaginario semplice; ponendo nell' equazioni di condizione (Δ) (Δ'), $-B$ in luogo di B, sempre che abbiavi per z valore razionale nell' una, o nell' altra di quelle equazioni, sarà $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{-B})} = M \pm \sqrt{-N}$, siccome è manifesto.

COROLLARIO III.

E facendo considerazione all' equazione (Δ') del §. *XII*, nella quale non può avervi per z valore razionale, se non sia $\sqrt[3]{(A^2 - B)}$ quantità razionale, se ne ricava un comodo e nuovo criterio, ond'essere certi immediatamente, che il binomio $A + \sqrt{\pm B}$ non ha per radice cubica un irrazionale misto, subito che $A^2 \mp B$, quantità razionale, non è un cubo perfetto, di che è facilissimo l' accertarsi; e vicendevolmente $A^2 \mp B$ sarà sempre un cubo, allorchè sia un cubo $A + \sqrt{\pm B}$.

PROPOSIZIONE VII.

§. XIII. *Se nell' una, o nell' altra delle equazioni* (Δ), (Δ') *abbiasi per* z *un valore razionale, essendo* v *quantità razionale arbitraria*

$(\Delta) \ldots\ 64z^9 v^3 - 48Az^6 v + (27B - 15A^2) z^3 v - A^3 = 0$

$(\Delta') \ldots\ (2z)^3 v - 3 (2z \sqrt[3]{v (A^2 - B)} - 2A = 0$

il binomio A $\pm \sqrt{B}$ *avrà radice cubica binomia composta di due irrazionali semplici di questa forma.*

$$M \sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{v^2 N^3})$$

DIMOSTRAZIONE.

Suppongasi $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = z \sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 y^3)}$. Avremo, cubando, $A + \sqrt{B} = z^3 v + 3zvy + (3z^2 v + vy)\sqrt{y}$; e perchè sia $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = z\sqrt[3]{v} - \sqrt[6]{(v^2 y^3)}$, si assumano (§. X) le due equazioni.

$$A = z^3 v + 3zvy$$
$$\sqrt{B} = (3z^2 v + vy) \sqrt{y}$$

Quadrandole entrambe, e sottraendo il quadrato della seconda dal quadrato della prima si avrà

$$v (A^2 - B) = (z^2 v - vy)^3$$

e però $\sqrt[3]{v (A^2 - B)} = z^2 v - vy$. Ma $y = \frac{A - z^3 v}{3zv}$. Dunque sostituendo, riducendo, e moltiplicando per 2, si avrà l'equazione

$(\Delta') \ldots (2z)^3 v - 3 (2z) \sqrt[3]{v (A^2 - B)} - 2A = 0$

la quale, cubando, diventa

$(\Delta) \ldots 64z^9 v^3 - 48Az^6 v^2 + (27B - 15A^2) z^3 v - A^3 = 0$

Se dunque si abbia per z valore razionale $= M$ nell'una o nell'altra di queste due equazioni, preso per v un razionale opportuno, sarà $y = \frac{A - M^3 v}{3Mv} = N$, e però $\sqrt[3]{(A \pm \sqrt{B})} = M \sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(v^2 A^3)}$, come conveniva dimostrare.

COROLLARIO.

§. XIV. Se $\sqrt{B}$ fosse immaginario semplice, basta porre nell' equazioni di condizione $-B$ in luogo di B, sì che avendovi in tal caso per z radice razionale, e per v valore razionale convenevole, si avrà $\sqrt[3]{(A\pm\sqrt{-B})} = M\sqrt[3]{v}\pm\sqrt[6]{(-v^2 N^3)}$.

PROPOSIZIONE VIII.

§. XV. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \quad \ldots\ldots \quad x^3 - px - q = 0$$

ammetta per x *un valore razionale, essendo* p q *razionali, il binomio* $\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$ *avrà per radice cubica un irrazionale misto di questa forma* $M\pm\sqrt{N}$, *essendo* M N *razionali, e* $\sqrt{N}$ *un irrazionale quadratico semplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga essere $z+\sqrt{y}=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$.
Sarà cubando
$\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=z^3+3zy+(3z^2+y)\sqrt{y}$; e perchè sia $z-\sqrt{y}=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, si assumano, come qui innanzi, le due equazioni

$$q = 2z(z^2+3y)$$

$$\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=(3z^2+y)\sqrt{y}$$

Quadrando queste due equazioni, e sottraendo al solito il quadrato della seconda dal quadrato della prima, si perverrà a questa ridotta (§. §. *XI. XII.*) $A^2 - B = \frac{p^3}{27}$ $= \frac{(4z^3 - \frac{q}{2})^2}{27z^3}$, da cui estratta la radice cubica, e posto x in luogo di $2z$, si otterrà l' equazione

$$(\Delta) \; .\;.\;.\;.\; x^3 - px - q = 0 \, .$$

Qualor dunque ammetta quest' equazione per x un valor razionale $= M$, sarà y razionale $= \frac{4q - M^3}{12M} = N$, e però $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M \pm \sqrt{N}$, come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

§. XVI. Che se fosse $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, posta y negativa, si avrebbe trovato $\frac{M^3 - 4q}{12M}$ pel suo valore $= -N$, e la radice cubica del binomio sarebbe stata $M \pm \sqrt{-N}$, come deve essere.

PROPOSIZIONE IX.

§. XVII. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \; .\;.\;.\;.\; x^3 - px - q = 0$$

non ammetta radice razionale, il binomio $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un irrazionale misto della forma* $M \pm \sqrt{\pm N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, se può averla, sia ella $a \pm \sqrt{\pm b}$. Operando come nelle Proposizioni precedenti, si perverrà alla ridotta

$$(\mu) \ldots (2a)^3 - p(2a) - q = 0$$

Dovendo pertanto essere a razionale, l' equazione (μ) avrà radice razionale. Ma l' equazione (μ) è lo stesso che l' equazione (Δ), posta x in luogo di $2a$. Dunque l' equazione (Δ) ammetterebbe radice razionale, contro il supposto. Non ammettendo dunque l' equazione (Δ) radice razionale, non può essere la radice cubica del binomio proposto un irrazionale misto della forma $M \pm \sqrt{\pm N}$. Il che dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE X.

§. XVIII. *Se il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non abbia per radice cubica un irrazionale misto della forma* $M \pm \sqrt{\pm N}$, *ma l' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

ammetta per x *un valore razionale, avrà il binomio per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$, *essendo* v *razionale arbitrario, e* $\sqrt{v}$ *irrazionale semplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Si supponga essere $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = z\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 y^3)}$. Cubando, e operando, come nelle Prop.

precedenti, si perverrà facilmente alla ridotta

$$(\Delta)\ldots\ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

posta x in luogo di $2z$. Se dunque possa trovarsi per v valore razionale, che non sia un cubo perfetto, tale, che l' equazione (Δ) ammetta per x radice razionale $= 2M$, è manifesto, che si avrà anche per $\pm y$ il valore razionale $\frac{\mp 4q \pm M^3 v}{12\, Mv} = \pm N$, e però sarà $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$, come dovea dimostrarsi.

ESEMPIO.

Sia il binomio $52 + \sqrt{(2700)}$. Sarà $q = 124$, $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 2700$. Dunque $p = 3\sqrt[3]{4}$. Se pertanto l' equazione

$$x^3 v - 3x\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{v} - 104 = 0$$

abbia radice razionale, sarà $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 N^3)}$ la radice ricercata. Ma appunto posto $v = 2$, l' equazione

$$x^3 - 3x - 52 = 0$$

ha per radice razionale il 4. Dunque la radice cubica del binomio sarà $2\sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{108}$.

PROPOSIZIONE XI.

§. XIX. *Se l' equazione* (Δ)

$$(\Delta)\ldots\ldots x^3 v - px\sqrt[3]{v} - q = 0$$

non ammetta radice razionale, essendo v *quantità razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale semplice, il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(\pm v^2 N^3)}$

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, sia ella $a\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 b^3)}$, b essendo positivo o negativo secondo che $\sqrt{(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27})}$ è reale o immaginario. Operando come in tutte le Proposizioni precedenti si perverrà a questa ridotta

$$(\Delta') \ldots (2a)^3 v - p(2a)\sqrt[3]{v} - q = 0$$

la quale deve ammettere radice razionale per a, affinchè $a\sqrt[3]{v} + \sqrt[6]{(v^2 b^3)}$ sia la radice cubica del binomio proposto. Ma l' equazione (Δ') è lo stesso che l' equazione (Δ), che non la ammette per supposizione, sol che si ponga $2a$ in luogo di x. Dunque l' equazione in a dovrebbe ad un tempo ammettere, e non ammettere radice razionale; il che non può essere. Se dunque l' equazione (Δ) ecc., come dovea dimostrarsi.

PROPOSIZIONE XII.

§. XX. *L' equazione* (Δ)

$$(\Delta) \ldots (2z)^3 v - 3(2z)\sqrt[3]{v}\sqrt[3]{(A^2 \pm B)} - 2A = 0$$

in cui v *esser dee razionale ad arbitrio,* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale,* A, *e* B *razionale; qualunque quantità si assuma per* v, *che non sia un cubo, non può ammettere mai radice razionale,*

razionale, se $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ *non sia irrazionale, e tale, che* $v(A^2 \pm B)$ *diventi un cubo perfetto.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè, dovendo essere

$$\frac{(2z)^3 v - 2A}{6z} = \sqrt[3]{v}\,\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$$

e nello stesso tempo razionale il primo membro dell' equazione, bisogna che dal prodotto de' due irrazionali $\sqrt[3]{v}$, $\sqrt[3]{(A^2 \pm B)}$ risulti necessariamente una quantità razionale, cioè che $\sqrt[3]{v(A^2 \pm B)}$ sia una quantità razionale. Ma ciò non può mai essere, se $v(A^2 \pm B)$ essendo razionale, non sia ad un tempo un cubo perfetto. Dunque ecc. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

§. XXI. Se dunque $A^2 \mp B$ sia un cubo perfetto P^3, poichè non deve esserlo ad un tempo anche l' arbitraria v, altrimenti $\sqrt[3]{v}$ non sarebbe quantità irrazionale, come si richiede, non potrà mai $v(A^2 \mp B)$ essere un cubo razionale, dovendo risultare sempre $P\sqrt[3]{v}$, che non può esserlo. E però in tal caso non avrà l' equazione (Δ) della Prop. precedente radice razionale.

SCOLIO.

Accade ordinariamente ne' Problemi d' Algebra, che le soluzioni generali abbracciano più di quello, che immediatamente, e direttamente richiede la Quistione. A torto per altro se ne accusa la Scienza, quasi l' imper-

fezione fosse dell' Arte non mai dell' Artefice. Due, per esempio, sono i valori, che necessariamente debbono aver luogo in una data Quistione. L' Algebra ne framescola bene spesso un complesso d'altri, parte reali, parte ancora immaginarj. Convengo, che quest' è il caso d' una ricchezza incomoda e perchè ci bisogna separare le radici necessarie dalle straniere all' assunto, e perchè non possiamo farlo talvolta per alcun modo. Ma o ci manchi il metodo di risolvere le equazioni, che ne risultano, o sieno state introdotte dall' Algebrista relazioni straniere, o non abbia svolte le relazioni date con la necessaria circospezione, questa ricchezza non è mai un difetto della Scienza. Imperciocchè o il richiegga necessariamente l'estensione delle relazioni date, o il comporti un inosservato, e non sempre osservabile insinuarsi di nuove condizioni, che vi si fa nello svolgimento della quistione, il finale risultamento per parte della Scienza è sempre necessario, e determinato dalle circostanze. Il metodo, per esempio, che abbiamo tenuto precedentemente nel maneggiare le radici cubiche $z \pm \sqrt{\pm y}$ de' binomj irrazionali $A \pm \sqrt{\pm B}$ ci ha sempre portato a equazioni di terzo grado direttamente, siccome la quistione il dimanda. Eppure abbiamo un esempio memorabile nel V. Vol. degli Opusc. del celebre, ed illustre Geometra Sig. d' *Alembert* pag. 192, e seq., che in questo medesimo caso s' introducono nella soluzione sei radici straniere del tutto alla quistione, creando così una vera difficoltà da superare, come dottamente ha egli poi fatto nel decorso di quell' Opuscolo. Di fatto sia $A = \frac{q}{2}$, $B = \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}$, e posto $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = z + \sqrt{y}$, $\sqrt[3]{(A - \sqrt{B})} = z - \sqrt{y}$, si perviene alle due equazioni.

$$q = 2z(z^2 + 3y) \qquad (1)$$

$$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}=)}(3z^2+y)\sqrt{y}\ (\text{II})$$

Togliendo l'aſimetria, e maneggiando co' metodi comuni queſte due equazioni onde ricavare il valore di z, ſi perviene ad una ridotta di nono grado. Parrebbe dunque (*così il Sig. d' Alembert*), che z doveſſe avere nove valori poſſibili, ancorchè realmente non ne abbia che tre ſoddisfacenti all'equazione $\sqrt{(A+\sqrt{B})}=z+\sqrt{y}$. Non ſarebbe difficile il far conoſcere, come abbiano potuto inſinuarſi per queſta via valori ſtranieri nella ſoluzione. All'oppoſto, ſi quadrino le due equazioni (I), (II), e ſi ſottragga il quadrato della ſeconda dal quadrato della prima; ne riſulta l'equazione $\frac{p^3}{27}=\frac{(4z^3-\frac{q}{2})^3}{27z^3}$, che è un cubo perfetto. Eſtratta pertanto la radice cubica ne viene la ridotta ſempliciſſima $(2z)^3-p(2z)-q=0$ di terzo grado, che dà tre ſoli valori per z, come conviene.

Si potrebbero recare infiniti eſempj di ſomiglianti ſoluzioni, ſe non foſſero fuori del noſtro aſſunto. Ho addotto queſto, perchè vi ſi attiene ſtrettamente, e n'ho profittato volentieri per moſtrare, quanto diſſenta, e non ſenza fondamento dall'opinione di molti, anche dottiſſimi uomini, che di tratto in tratto declamano contro sì fatte imperfezioni, ch'eſſi dicono, dell'Algebra. Si dovrebbe piuttoſto prendere da queſto motivo di ammirarne la perfezione, ſiccome quella che all' interpolarſi in una quiſtione del più piccolo, per così dire, elemento ſtraniero al ſoggetto o con elevazione a potenze, o con introduzione di qualche fattore, o per ſimile altra operazione, che non altera per verità l'egualianza de' membri, ma vale di fatto a moltiplicare le ſoluzioni, manifeſta ſubito ſintomi totalmente nuovi, e corriſpondenti all'alterazione indottavi, inviluppando co' riſul-

tamenti proprj della quiſtione una moltiplicità d' altre ſoluzioni, che le ſono improprie. Non può quindi dirſi più perfetta l' Algebra nel darci un' equazione di terzo, che è propria della quiſtione, che una di nono corriſpondente alle nuove condizioni tacitamente introdotte nel maneggiare le relazioni fondamentali.

PROPOSIZIONE XIII.

§. XXII. *Tutte le equazioni di terzo grado ſi poſſono ridurre all' equazione (F)*

$$(F) \quad \ldots \quad x^3 - px - q = 0$$

PROPOSIZIONE XIV.

§. XXIII. *Riſoluta l'equazione (F) col metodo di Cardano, ne riſulta generalmente una delle radici ſotto queſta forma*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

PROPOSIZIONE XV.

§. XXIV. *Qualunque volta ſia* $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, *tutte e tre le radici dell' equazione (F) ſono reali, e diſeguali.*

Queſte tre Propoſizioni ſono ampiamente dimoſtrate nell' Algebra comune.

PROPOSIZIONE XVI.

§. XXV. *La formula Cardanica*

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

essendo p q *grandezze reali, in qualunque caso è sempre radice dell' equazione (F)*

$$(F) \;\ldots\; x^3 - px - q = 0$$

e radice sempre reale.

DIMOSTRAZIONE.

Si faccia $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{23}\right)}\right)}=x$.

Sarà cubando

$$x^3=\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^3}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}=q+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\Big)}+3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

$$\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}.$$

Ma $\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)=\frac{p^3}{27}$. Dunque sarà

$$x^3=q+p\left\{\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\right\}.$$ Ed è poi

$$-px=-p\left\{\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\right\}$$

$$-q=-q.$$

In conseguenza, facendo l'aggregato degli omogenei di comparazione, sarà $x^3-px-q=0$, che è l'equazione cubica (F). Dunque la formola Cardanica in qualunque caso è una radice di quest' equazione. Resta da provare, ch'ella sia sempre radice reale. Ma essendo $\frac{p^3}{27}$

minore di $\frac{q^2}{4}$, o eguale a $\frac{q^2}{4}$, la formola è ſempre reale; e nel caſo di $\frac{p^3}{27}$ maggiore di $\frac{q^2}{4}$, in cui appunto ella appariſce ſotto aſpetto immaginario, tutte tre le radici dell'equazione ſono reali (§. *XXIV.*); non può dunque la formola eſſere radice dell'equazione (F) ſenza eſſere neceſſariamente radice reale. Dunque la formola Cardanica in qualunque caſo è radice dell' equazione (F), e radice ſempre reale. Il che ecc.

DEFINIZIONE.

§. XXVI. Caſo irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (F)

$$(F) \ldots\ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

eſſendo razionali, e $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, neſſun diviſore eſatto dell' ultimo termine q può ſoddisfare all'equazione (F); oppure, che è lo ſteſſo, Caſo irreducibile del terzo grado è quello, in cui le quantità p, q dell'equazione (F) eſſendo razionali, tutte e tre le radici dell' equazione debbono eſſere reali, diſeguali, e irrazionali.

SCOLIO.

§. XXVII. La condizione delle quantità p, q razionali, non atteſa quanto baſta, ha fatto equivocare più d'uno in queſto argomento. V'ha un'infinità di equazioni di terzo grado aventi tre radici reali, diſeguali, e irrazionali, le quali ciò non oſtante non entrano nella Claſſe delle irreducibili. Baſta tor via dall'equazione qualunque irrazionalità, perchè ella divenga toſto reducibile, ed abbiavi in conſeguenza diviſore dell'ultimo termine ſoddisfacente all'equazione. Ne ho fatto chia-

ro cenno al §. 88. nell' *Eſercitazione Analitica* citata teſtè nell'Introduzione, di modo che quelle ſteſſe equazioni del Sig. *Nicole* (*Mem.* 1738. 1740), e tutte le infinite ſimili, che poſſono trovarſi, le quali erano giudicate come caſi rapiti all'irreducibilità (*Enciclop. Cas irred.*), non lo ſono altramente, ſiccome può ognuno accertarſene agevolmente col ridurle alla forma (*F*) del §. precedente, con le quantità p, q razionali, al che non s'era poſto mente.

PROPOSIZIONE XVII.

§ XXVIII. *Nel caſo irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica alcun irrazionale miſto di queſta forma* $M \pm \sqrt{-N}$.

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè non avendo in queſto caſo l'equazione (*F*) (§. XXVI.) alcun diviſore eſatto dell'ultimo termine, che ſoddisfaccia all'equazione, non ha ella per x radice razionale. Ma in tal caſo non ha il binomio propoſto radice cubica di quella forma (§. *XVII*). Dunque ecc.

PROPOSIZIONE XVIII.

§. XXIX. *Nel caſo irreducibile il binomio* $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ *non ha per radice cubica un binomio irrazionale della forma* $M \sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{(-v^2 N^3)}$, *eſſendo* v *razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale ſemplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Se può averla, ſia ella $z\sqrt[3]{v}+\sqrt[6]{(-v^2 y^3)}$, eſſendo z ed y indeterminate. Operando come nella Prop. VII., ſi perverrà alla ridotta (I)

$$(\text{I}) \ldots\ldots (2z)^3 v - p(2z)\sqrt[3]{v} - q = 0$$

Se dunque quella è la radice cubica del binomio propoſto, l' equazione (I) avrà per z radice razionale (*§. XIX.*). Ma eſſendo p quantità razionale, $\sqrt[3]{v}$ irrazionale, non può l' equazione (I) avere radice razionale, qualunque quantità razionale ſi aſſuma per v (*§§. XX. XXI.*). Non può dunque il propoſto binomio avere nel caſo irreducibile radice cubica di quella forma, come s' aveva da dimoſtrare.

PROPOSIZIONE XIX.

§. XXX. *In qualunqe equazione del terzo grado*

$$x^3 - px - q = 0$$

in cui tutte tre le radici dell' equazione ſono reali, e diſeguali, il quadrato di qualunque delle tre radici è ſempre minore di $\frac{4p}{3}$

DIMOSTRAZIONE.

Sieno a, $-a'$, $-a''$, oppure $-a$, a', a'' le radici dell' equazione. Mancando il ſecondo termine, ſarà per i principj dell' Algebra, $a = a' + a''$, e però l' equazione prende queſta forma.

$$x^3 - (a'^2 + a' a'' + a''^2)\, x \pm a' a'' (a' + a'') = 0$$

Eſſendo

Essendo manifesto, che $\frac{4}{3}$ $(a'^2 + a'a'' + a''^2)$ è maggiore del quadrato a'^2, oppure a''^2 di ciascuna delle radici, resta che si dimostri essere quello maggiore di $a^2 = (a' + a'')^2$. Ora essendo la somma de' quadrati di due quantità maggiore del doppio prodotto delle medesime quantità, sarà $a'^2 + a''^2 > 2\,a'a''$. Dunque $a'^2 + 4\,a'a'' + a''^2 > 6\,a'a''$, e però $4\,a'^2 + 4\,a'a'' + 4\,a''^2 > 3\,a'^2 + 6\,a'a'' + 3\,a''^2$.

In conseguenza $\frac{4}{3}$ $(a'^2 + a'a'' + a''^2) > a'^2 + 2\,a'a'' + a''^2 > (a' + a'')^2 > a^2$. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XX.

§. XXXI. *La formola Cardanica è reducibile a forma razionale in ogni caso di* $\frac{p^3}{27} \gtrless \frac{q^2}{4}$, *purchè l' ultimo termine* q *abbia divisore esatto, che soddisfaccia all'equazione* (F)

$$(F) \ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè il binomio $\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)$ ha per radice cubica l'irrazionale misto $M + \sqrt{\pm N}$, tosto che l'equazione (F) ammette per x un valore razionale $= 2M$ (§. §. *XV. XVI.*); cioè tosto che l'ultimo termine q ha divisore esatto, che soddisfà all' equazione, che è lo stesso. Ma in tal caso anche $\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio $M - \sqrt{\pm N}$. (*nello stesso luogo*). Dunque la somma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M=x$$

che è razionale. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXI.

§. XXXII. *La formola Cardanica è reducibile alla forma irrazionale* $x\sqrt[3]{v}$ *in ogni caso di* $\frac{p^3}{27}\gtrless\frac{q^4}{4}$, *purchè l'equazione* ($F'$)

$$(F') \; . \; . \; . \; . \; . \; x^3v-px\sqrt[3]{v}-q=0$$

ammetta per x *radice razionale, essendo* v *un razionale ad arbitrio, e* $\sqrt[3]{v}$ *irrazionale semplice.*

DIMOSTRAZIONE.

Tosto che l'equazione (F') ammette per x un valore razionale $2M$, il binomio $\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$ ha per radice cubica il binomio irrazionale $M\sqrt[3]{v}\pm\sqrt[6]{(\pm v^2N^3)}$ (§. *XVIII.*). Dunque la somma de' due radicali, cioè la formola Cardanica

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=2M\sqrt[3]{v}$$

$=x\sqrt[3]{v}$, come s'aveva da dimostrare

PROPOSIZIONE XXII.

La formola Cardanica nel caso irreducibile non è reducibile nè a forma razionale x, *nè a forma irrazionale mista* $x+\sqrt{v}$ *essendo* $\sqrt{v}$ *irrazionale semplice reale,*

nè a forma irrazionale ſemplice $x\sqrt[3]{v}$, *eſſendo* v *qualunque razionale ad arbitrio*.

DIMOSTRAZIONE.

I. Parte. La prima parte della propoſizione è per ſè evidente ſubito che l' equazione Cubica nel caſo irreducibile non ammette radici razionali.

II. Parte. Si ſupponga, ſe può eſſerlo,

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x+\sqrt{v}$$

e ſi faccia $x+\sqrt{v}=r$, $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=T$. Poichè $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}\times\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\frac{p}{3}$, e per conſeguenza $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=p:\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, ſarà $r=T+p:3T$, $T^2-rT+p:3=0$, e $T=\frac{r}{2}\pm\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ $=\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$, ove $\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}$ è un immaginario ſemplice (§. XXX.). Dovrà pertanto eſſere $\frac{r}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2-\frac{4p}{3}\right)}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{v}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left((x+\sqrt{v})^2-\frac{4p}{3}\right)}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}$. Ma queſto binomio nel caſo irreducibile non ha per radice cubica un irrazionale di queſta forma (§. XXVIII.). Dunque ecc.

III. Parte. Suppoſto, come nell' art. preced.

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=x\sqrt{v}=r,$$

e fatte le stesse operazioni, si perverrà all' equazione $\frac{r}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(r^2 - \frac{4p}{3}\right)} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)}$, la quale dovrà essere la radice cubica del binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$. Ma $\frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{v} \pm \sqrt[6]{\left(x^2\sqrt[3]{v^2} - \frac{4p}{3}\right)^3}$; e il binomio $\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}$ non ammette nel caso irreducibile per radice cubica un irrazionale di questa forma (§. *XXIX.*). Dunque ecc. Il che ecc.

PROPOSIZIONE XXIII.

§. XXXIV. *La formula Cardanica nel caso irreducibile non ammette altra forma algebraica finita, fuorchè la propria sotto aspetto immaginario.*

DIMOSTRAZIONE.

Se può ammetterla, comunque ella siasi funzione di p solo, o di q solo, o di p e q insieme, la si rappresenti generalmente per ϕ. Sarà pertanto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = \phi$. Ma essendo $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = \frac{p}{3\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)}}$ $= \frac{p}{3T}$, posto $\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} = T$; sarà $\phi = T + \frac{p}{3T}$, e però $T^2 - \phi T + \frac{p}{3} = 0$. Dunque $T = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right.}$

$+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p3}{27})}\Big)=\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$; binomio in cui $\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$ è un immaginario femplice, per effere il quadrato di qualunque delle tre radici ϕ fempre minore di $\frac{4p}{3}$ (§. XXX.). Perchè dunque la formula Cardanica poffa ammettere la forma ϕ, bifogna che il binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$ ammetta radice cubica, che fia funzione di ϕ di quefta forma $\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$. Ma perchè fia $\frac{\phi}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\phi^2-\frac{4p}{3})}$ la radice cubica del binomio $\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$, effendo p q quantità razionali, è neceffario, che ϕ fia divifore efatto di q (§. IX.). Dunque in primo luogo la formula Cardanica ammetterà quefta forma ϕ, fubito che ϕ poffa effere parte aliquota di q. Ma dalla fuppofizione di $\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}+\sqrt[3]{\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}\Big)}=\phi$, operando come nella XVI. Prop., rifulta l'equazione finale

$$(P)\ldots\ \phi^3-p\phi-q=0$$

E però la forma ϕ deve effere radice di queft'equazione. Di nuovo pertanto la formula Cardanica ammetterà la forma ϕ, fubito che ϕ fia e divifore efatto di q, e radice dell'equazione (P). Ma l'equazione (P) è precifamente l'equazione (F) del cafo irreducibile (§. *XXVI.*); e nel cafo irreducibile neffun divifore efatto dell'ultimo termine q può effere radice dell'equazione

(*F*) (*ibid.*). Non può dunque eſſer φ parte aliquota di q, e radice dell'equazione (*P*). E perciò la formola Cardanica non può ammettere nel caſo irreducibile la forma φ. Ma φ rappreſenta qualſivoglia immaginabile forma. Per conſeguenza la formula Cardanica non ammette nel caſo irreducibile altra forma algebraica finita, fuorchè la propria ſotto aſpetto immaginario. Il che dovea dimoſtrarſi.

PROPOSIZIONE XXIV.

§. XXXV. *Non è poſſibile di trovare per la radice* x *dell'equazione cubica* (*F*)

$$(F) \ldots\ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

nel caſo irreducibile un valore algebraico, finito, e libero da apparenza immaginaria.

DIMOSTRAZIONE.

Se è poſſibile, ſia φ queſto valore. Eſſendo la formula Cardanica in ogni caſo radice reale dell'equazione (*F*) (§. *XXV.*), ſarà neceſſariamente

$$\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}=\phi.$$

In conſeguenza la formula Cardanica ſarà reducibile a forma algebraica finita, libera da apparenza immaginaria. Ma ciò non può eſſere (§. *XXXIV.*). Dunque non è poſſibile ecc., come dovea dimoſtrarſi.

SCOLIO.

§. XXXVI. Non ſarà inutile, che ſieno qui per ultimo recapitolate, e poſte in ſerie le concluſioni capitali attinenti a queſto ſottile e difficile argomento, che non poſſono più revocarſi in dubbio ſenza offeſa della verità, e ſenza introdur cavillazioni, che facciano ma-

niſeſto torto piuttoſto all' analiſta, che all' analiſi, alla quale non può ragionevolmente addoſſarſi il difetto di chi la maneggia. Poſſiamo pertanto tener per certo

I. Che la riſoluzione Cardanica è legittima; ſopra di che ragioneremo qui appreſſo.

II. Che la formula o il binomio Cardanico (D)

$$(D) \ldots\ldots \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right)}$$

è ſempre la vera radice dell' equazione cubica generale (F)

$$(F) \ldots\ldots\ldots x^3 - px - q = 0$$

e radice ſempre reale (§. XXV.), cioè il vero valore di x in ogni caſo, tanto ſe l' equazione (F) non abbia che una ſola radice reale, quanto ſe le abbia tutte e tre reali, comunque poi eſſe ſi ſieno razionali o irrazionali, eſprimendole la medeſima formola tutte e tre, come ſi dimoſtra non difficilmente.

III. Che nel caſo poi denominato irreducibile, ſu cui non può naſcere equivoco (§. *XXVI*), ognuno de' termini del binomio (D) è quantità aſſolutamente immaginaria, la quale nè per trasformazioni, nè per artificioſe riduzioni potrà mai cangiar natura, e reſterà ſempre in fondo, ſe anche prendeſſe apparenza reale, quantità immaginaria. Ma preſi que' due termini inſieme la loro ſomma coſtituiſce una quantità reale, ed eſprime una vera e reale radice dell' equazione (F).

IV. Che è coſa ormai dimoſtrata a ſazietà, che quel binomio (D) nel caſo irreducibile non potrà mai conſeguire altra forma ugualmente algebraica, finita, e reale, la quale non implichi e involga aſpetto immaginario.

V. E che finalmente, dopo tutto queſto, reſta dimoſtrato, che non è poſſibile per alcun immaginabile metodo di trovare una radice dell' equazione (F), nel caſo irreducibile, algebraica finita e reale, la quale ſia nello ſteſſo tempo libera da aſpetto immaginario. In

fatti se ciò è possibile, bisogna necessariamente, ch'ella coincida con la radice (D), e le sia eguale, giacchè esprimono entrambe una medesima radice dell'equazione (F). Sarebbe dunque la radice (D) ridotta a forma algebraica finita e reale, nel caso irreducibile, senza implicanza d'immaginarj; il che si è dimostrato impossibile.

E quanto alla legittimità del metodo Cardanico vo' dichiararla qui nel modo che potrò migliore; il che non sarebbe necessario, se tutti potessero formarsi delle medesime cose le medesime idee. Ma qualche volta certi articoli non rischiarati ne' libri elementari danno luogo al germoglio di molti errori. Ed è strano soprattutto, che la si metta in dubbio in grazia del solo caso irreducibile. La formola esprime, e dà le precise radici dell'equazione in tutti i casi reducibili, senza ricorrere ad altri sussidj, che a quello dell'estrazione della radice cubica da ognuno de' due termini della formula; e dee ella cessare di essere legittima nel solo caso, che le radici dell'equazione (F) debbano essere tutte tre reali, diseguali, e irrazionali? Il metodo è questo.

Si faccia $x = z + y$. Sostituendo questo valore nell' equazione (F), prende ella questa forma (G)

$$(G) \ldots . z^3 + 3z^2y + 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0$$

L' equazione (G) non è più determinata, come l'equazione (F), essendo due le indeterminate z y, delle quali bisogna definire il valore, onde conseguire quello di x, a cui è posto uguale l' aggregato $z + y$. Le due indeterminate z y non hanno certamente alcuna relazione necessaria tra di sè, fuorchè quella, che abbia da verificarsi l'equazione (G). Si traggano quante paja di equazioni si vuole dall' equazione (G), come sarebbe

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y = 0 \\ 3zy^2 + y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (A)$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 + 3z^2y + 3zy^2 = 0 \\ y^3 - pz - py - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (B)$$

$$z^3 - q = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} z^3 - q = 0 \\ 3z^2y + 3yz^2 + y^3 - pz - py = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (C)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y + 3y^2z - py - pz = 0 \\ z^3 + y^3 - q = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (D)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3z^2y + 3y^2z - q = 0 \\ z^3 + y^3 - pz - py = 0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (E)$$

ecc.

Queſte combinazioni, e le altre che poſſono ſimilmente farſi, ſpezzando in due equazioni l' equazione (G), ſono tutte rigoroſamente legittime, perchè riſoluto qualſivoglia pajo di equazioni (A), (B) ecc. ſempre co' valori ritrovati di z ed y ſi ſoddisfa all'equazione (G), ch' è la ſola neceſſaria condizione da riempierſi, e verificarſi nella quiſtione.

La combinazione (D) pertanto non è men legittima di tutte le altre (A), (B), (C), (E) ecc. Ed è appunto dalla combinazione (D), ch' è tratto il valore di

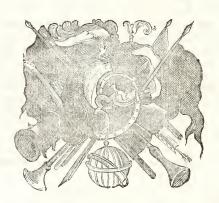
$$z+y = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{2} - \frac{p^3}{27}\right)}\right)},$$

che è la formola Cardanica. Che non poſſa eſſere $3zy(z+y) = p(z+y)$, e nello ſteſſo tempo $z^3+y^3 = q$, ciò appunto è quello che fa riſultare così z come y quantità aſſolutamente immaginarie, come è ſtato dimoſtrato da molti valentuomini, e l'ho dimoſtrato io ſteſſo nell' *Eſercitazione* citata qui innanzi. Ma $z+y$ è ſempre e neceſſariamente il vero valore di x, cioè la vera radice dell' equazione (F). Ed è irragionevole il pretendere, che il metodo per eſſere legittimo debba ſomminiſtrare non già il ſolo compleſſo $z+y$ reale, ma le parti eziandio z, y reali; mentre non altro è di aſſoluta neceſſità per natura della quiſtione, che ſia reale, fuorchè il valore di $x = z+y$, qualunque poſſa mai eſſere la forma delle parti.

Sarebbe lo ſteſſo ſe dalla combinazione (A), o da qualunque delle altre (B), (C) ecc. ſi traeſſe, ſe è poſ-

ſibile, il valore di z, e di y. Sempre la ſomma $z+y$ ſarebbe uguale ad x, cioè alla vera radice dell' equazione. Non ſarebbe z', tratto per eſempio dalla combinazione (A), lo ſteſſo z che s' è tratto dalla combinazione (D), nè y' lo ſteſſo che y; ma $z'+y'$ ſarebbe ſempre l' identica ſomma e quantità $z+y$, cioè la ſteſſa radice x dell' equazione.

Quindi è manifeſto, che da qualunque di quelle combinazioni ſi arrivaſſe a ricavare il valore di z', e di y', ſempre la ſomma $z'+y'$ involgerà neceſſariamente degl' immaginarj; altrimenti, dovendo ella indentificarſi colla ſomma $z+y$ tratta dalla combinazione (D), cioè colla Cardanica, potrebbe queſta eſſere liberata dall' aſpetto immaginario, contro ciò che s' è ſolennemente dimoſtrato.

Ma queſto baſti a compiuta dilucidazione della materia.

ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI.

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R. Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino

Al Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, Professore primario della medesima, e di Notomia in quella Regia Università.

S i g n o r e.

MOstrerei d' esser privo del bene dell' intelletto, se non mi avesse dolcemente commosso la generosità, che voi manifestaste nell' analizzare le mie osservazioni sull' *Encefalo Umano*, e nell' additare ai numerosi vostri uditori dalla Cattedra in cotesta famosa e dotta Università da voi così degnamente occupata gli articoli delle opere del sommo Notomista, e Fisiologo *Alberto Allero*, nei quali di quella mia debole fatica si fa cortese ed onorata menzione; e se dall' altra parte la cognizione, che ho già da parecchi anni della vastità dell' erudizione vostra, e della felicità delle profonde vostre ricerche nella Notomia, e nella Storia naturale, non mi avesse indotto a sperare, che voi non isdegnerete ch' io ricorra a voi per lume, e per consiglio intorno a quella parte dell' *Encefalotomia universale* da me abbozzata, che risguarda gli uccelli, dintorno alla quale s' impiegarono dopo di *Tommaso Willis* gli Accademici Parigini senza condurla però a plausibile chiarez-

za ed eſtenſione infino a tanto che il lodato infaticabile *Allero* non ebbe creduto lo ſviluppamento del cerebro nella menzionata claſſe d' animali occupazione degna di sè, e della attenzione dei veri Filoſofi.

Vi è noto, eruditiſſimo Signore, che deſideroſo queſti di rendere vie più manifeſti al mondo i nodi, con i quali piacque all' *eterno* ſempre *adorabile Artefice* di concatenare la porzione animata delle ſoſtanze abitatrici del noſtro globo, ſi lagnava di non aver ancora trovato adequatamente deſcritto * il cerebro degli uccelli, ed avea riunite in una diſſertazione quelle verità, che l' eſame anatomico più attento gli avea rivelate ſu viſcera così eſſenziale in queſta claſſe d' animali, acciocchè ſerviſſero di ſtimolo agli altri Anatomici per dilatare anche da queſto canto i limiti delle noſtre cognizioni.

Non v'ha dubbio, che molti fra queſti vi abbiano fatto laudevoli progreſſi calcando le veſtigia di *Allero*, dietro alle quali oſai pure di muovere anch' io, di modo che l' anno MDCCLXXVI ſembrandomi già d' avere incontrato aſſai buona ventura nello ſpigolare per queſto campo, aveva penſato di traſmettere al promotore di tali ricerche i manipoli, che me n' erano toccati, riducendoli a foggia di comenti allo ſcritto *Alleriano*; ma non aveva condotto ancora il mio lavoro al termine prefiſſo, quando fui colpito dall' acerbiſſimo annunzio della perdita irreparabile, che per la morte di *Allero* la repubblica filoſofica ha fatto.

Privo così degli utili avviſi, che da uomo sì grande per ogni titolo avrei ottenuti, eſitai nel determina-

(*) *Avium cerebra nondum deſcripta hic recenſere viſum eſt, ut continuus ille tranſitus etiam hoc exemplo innoteſcat, qui eſt ex fabrica quadrupedum per aves in piſces, inve quadrupeda frigida, quæ multa piſcium habent ſimilia.*
v. Opera Minora Alb. *Halleri* Vol. III. ſect. XXXVI.

re a chi comunicare i menzionati comenti affine di ricavarne e correzione ed ammaeſtramento, ſin che non venni favorito da voi con quelle lettere, le quali m' incoraggiano a proſeguire nella carriera anatomica, e con il prezioſo dono dell' opera voſtra celebratiſſima intorno alle tavole poſtume del *Santorini*, la quale mi ſervirà d' eſemplare, e di guida, maſſime in quello, che concerne le voſtre utiliſſime ſcoperte.

Tanta benignità voſtra a favor mio non ſolo mi vi lega con vincoli indiſſolubili d' amicizia, e di gratitudine, ma sbandiſce dall' animo mio ogni irreſoluzione; e mi conferma nella ſicurezza, che queſte oſſervazioni ſull' *Encefalo degli Uccelli* non potrebbono eſſer indirizzate ad uomo, che con più bel nodo vanti in ſuo cuore unite dottrina ed urbanità, ſchiettezza e diſcrezione, erudizione e modeſtia, tutte prerogative altrettanto rare quanto deſiderate in chi dev' eſſer giudice e maeſtro in coſe di Fiſica, e di letteratura.

Eccovi pertanto in queſto ſcritto compendiato, oltre alle oſſervazioni Alleriane, tutto quello, che ſe ne legge nelle opere del *Willis* ſul cerebro e ſui nervi, le quali ſe per non ſo quale ſventura della Notomia non foſſero grate troppo ſuperficialmente lette, per non dire troppo vergognoſamente neglette, queſti organi ſarebbero aſſai meglio ſviluppati e conoſciuti.

Vi riuniſco altresì quello, che la lettura va ſomminiſtrandomi di relativo all' oggetto principale acciò che la mia ſpoſizione acquiſti maggior chiarezza, accennando i fonti dai quali è ricavato perchè odio appropriarmi le ricchezze altrui. Anzi vi ſcongiuro di non aſcondermi il nome, nè le opere di coloro, che avranno già deſcritte quelle parti, che v' accorgerete immaginarm' io d' avere prima di neſſun altro ſviluppato ed eſpoſto acciocchè loro non venga involato l' onore della ſcoperta; perciocchè non ſono abbaſtanza perſuaſo della ſo-

lidità del penſiere di quel Letterato Franzeſe, che pretende tutto eſſere già ſtato detto.

La natura è un fondo ineſauribile, nel quale quanto ſi cerca più profondamente, tanto maggior dovizia trovaſi di coſe novelle: nè vogliam eſſere così ingiuſti verſo i noſtri coetanei, nè verſo i poſteri con ſuppor e gli uni, e gli altri incapaci di trovare nel fondo ſuddetto nuove ricchezze: onde eziandio che mi riconoſca inabile a fare ſcoperte importanti, pur ſo che lo ſpirito dell'uomo ha fecondità pari alla inſaziabilità del ſuo cuore, e che quando quello non può eſſer inventore, aggiunge e perfeziona valendoſi dei lumi altrui e facendo naſcere nuovi penſieri, nuovi metodi di oſſervare da quelli, che gli vengono altronde preſentati.

Così vo tentando io, e ſe non mi rieſcirà d'eſporre coſe nuove, proccurerò almeno di riunire le già conoſciute ſotto que' differenti punti di viſta, che potranno ſembrare più naturali; perciò troverete diviſa queſt' operetta in cinque trattati, nel primo de' quali verranno compreſe in due parti le notizie indiſpenſabili ſulle pareti tanto eſterne, quanto interne del cranio, che hanno relazione con il cerebro, e con i nervi cerebrali degli uccelli; nel ſecondo ſi deſcriveranno le meningi; nel terzo il cervello; nel quarto il cervelletto, e la midolla allungata; nell' ultimo i nervi, che eſcono dalle pareti del cranio.

Comprenderovvi pur anco le oſſervazioni anatomiche fatte da me ſu gli organi dei ſenſi in queſta claſſe d'animali, non ancora da altri pubblicate, o non arrivate a mia notizia, o eſpoſte differentemente da quel modo nel quale io le ritrovai.

In queſto caſo le mie oſſervazioni ſerviranno almeno per confermare la verità di quelle degli autori a me ſconoſciuti, verità ſempre accette a coloro, che coltivano la gloria naturale con il genio, col quale la coltivate voi, e agli ingegni elevati, depoſitarj delle

cognizioni più preziose, e dei fondamenti più stabili del sapere umano. Sicchè nè a voi, nè agli altri Filosofi pari vostri disgradiranno, come alla stessa Maestà dei regnanti non disgradisce l'umile ma cordiale offerta di fiori odorosi e di saporite frutta in mezzo ai ricchi tributi delle più ubertose provincie.

Confessò il chiarissimo *Allero* di non avere notomizzati molti uccelli, * e le osservazioni principali che ci lasciò dintorno ai cerebri loro disse di averle tratte dall' esame di sei oche sole. * Su queste mi esercitai lungo tempo tenendo scrupolosamente dietro a sì gran Maestro, e quando ne ebbi notomizzate varie dozzine m' avvidi, che anche nelle oche s' incontrano moltissime parti essenziali non esposte nella dissertazione Alleriana, o differenti da quanto vi si legge; perciò mi sono invogliato di cercare se altre spezie di pennuti ne vadano provvedute, e se vi se ne potesse meglio scorgere la varietà.

Nè male mi apposi, perciocchè in quasi tutte le specie notai differenze essenziali nella direzione, nella figura, nel sito, e nel numero delle medesime; onde mi vidi obbligato di ripetere più e più volte le osservazioni su quanti individui di quella specie mi fu permesso; e degli individui stessi vi presento il catalogo adoperando la nomenclatura del celebre *Linneo*, giacchè le opere di sì diligente Naturalista facendo le delizie dei Professori, più facilmente si capirà quale uccello vi nomini; e caso che sbagliassi nel dargli il nome italiano, lo sbaglio mio verrà dalla cortesia vostra corretto.

(*) *Non numerosas aves incidi, vera erunt tamen quæ ex adversariis meis hic repeto V. Loc. citat.*

(*) *Anseris cerebrum ex sex animalibus V. L. citat.* per quello che ha risguardo al cerebro di questa specie d'uccelli.

CATALOGO.

Degli individui delle diverse specie d' uccelli stati notomizzati da me per verificare le osservazioni Alleriane, ed esporne l' encefalotomia. — Numero degl'individui da me notomizzati.

42. Falco

Nibbio da noi Piemontesi detto *la Pondrà*. — Milvus 12. *Falco cera flava, cauda forficata, corpore ferrugineo, capite albidiore* — 2.

Falcon gentile. — Gentilis 13. *F. cera, pedibusque flavis, corpore cinereo, maculis fuscis, cauda fasciis quatuor nigricantibus.* — 3.

Gheppio, o Smeriglio da noi Piemontesi detto *la Crivella*. — Tinnunculus 16. *F. cera, pedibusque flavis, dorso rufo punctis nigris, pectore striis fuscis, cauda rotunda.* — 8.

Sparviere. — Sparverius 20. *F. cera lutea, capite fusco, vertice, abdomineque rubro, alis cærulescentibus.* — 1.

43. Strix

Gufo. — Bubo 1. *Strix capite auriculato, corpore rufo.* — 2.

Due specie di Civette. — { Otus 4. 5. *capite auriculato pennis senis.* / Scops 5. 5. *capite auriculato penna solitaria* } — 4.

La Dama de' Piemontesi. — Stridula 8. 5. *capite lævi, corpore ferrugineo, remige tertia longiore.* — 2.

45. Psittacus

Papagallo. — Æstivus 32. *Psittacus brachyurus viridis luteo submaculatus, fronte cærulea, humeris sanguineis, orbitis incarnatis.* — 1.

50. Corvus

Corvo. — Corax 2. *Corvus ater, dorso atro-cærulescente, cauda subrotunda,* — 3.

Cornacchia. — Corone 3. *C. atro-cærulescens totus, cauda rotundata, rectricibus acutis.* — 5.

51. Coracias

Io la credetti una specie delle *Meropi* segnate 63. da *Linneo*. — Bengalensis 5. *Coracias subfulva subtus cærulescens, collo subtus violaceo* (non striato nec pallido) *cauda integra* — 1.

57. Cuculus

37. Cuculus

2. Canorus 1. *Cuculus cauda rotundata nigricante, albo punctata.* Cucolo.

58. Yunx

2. Torquilla. Torcicollo.

59. Picus

3. Viridis 12. *Picus vertice coccineo.* Picchio.

64. Upupa

3. Epops 1. *Upupa cristata variegata.*

67. Anas

Anser 9. *Anas rostro semicilindrico, corpore supra cinereo, subtus pallidiore, collo striato.*

Più di cento. [Strepera 20. *A. speculo alarum rufo, nigro, albo.*
Clangula 23. *A. nigro, alboque varia, capite tumido, violaceo, sinu oris macula alba.*
Boschas 40. *A. rectricibus intermediis (maris) recurvatis, rostro recto.*
Domestica *B.*] Oche ed Anitre

72. Pelecanus

3. Piscator 6. *Pelecanus cauda cuneiformi, rostro serrato, corpore albo, remigibus omnibus, facieque nigris.* Domenicano in val di Bormia.

84. Ardea

2. Grus 4. *occipite nudo papilloso, pileo, remigibusque nigris, corpore cinereo, rectricibus intimis laceris* Gru.

1. Cinerea 11. *A. occipite nigro lævi, dorso cærulescente, subtus albida, pectore maculis oblongis nigris.*
2. Major. 12. *A. occipite crista nigra dependente, corpore cinereo, collo subtus linea, fasciaque pectorali nigris.*
2. Alba 24. *A. capite lævi, corpore albo, rostro fulvo, pedibus nigris.*

Aghironi.

86. Scolopax

6. Rusticola 6. *Scolopax rostro recto, basi rufescen-* Beccaccia.

te, pedibus cinereis, femoribus tectis, fascia capitis nigra.

Beccaccino. Gallinago 7. *S. rostro recto, tuberculato, pedibus fuscis, frontis lineis fuscis quaternis.* 8.

98. Pavo.

Pavone Cristatus 1. *Pavo capite crista compressa, calcaribus solitariis.* 1.

99. Meleagris.

Gallo d'India. Gallopavo 1. *Meleagris capite caruncula frontali, gularique, maris pectore barbato.* 20.

101. Phasianus.

Galli, Galline, e Fagiani. Gallus 1. *Phasianus caruncula compressa verticis, geminaque gulæ, auribus nudis, cauda compressa adscendente.* 50.

102. Numida

Gallina detta di Faraone. Meleagris. 1.

103. Tetrao

Pernice. Perdix 13. *Tetrao pedibus nudis calcaratis macula nuda coccinea sub oculis, cauda ferruginea, pectore brunneo.* 12.

Quaglia. Coturnix 20. *T. pedibus nudis, corpore griseo maculato, superciliis albis, rectricibus margine, lunulaque ferruginea.* 16.

104. Columba

Piccione. Domestica 1. 20.

Colombo Selvatico. Palumbus 19. *C. rectricibus postice atris, remigibus primoribus margine exteriore albidis, collo utrinque albo.* 4.

Tortorelle
- Turtur 32. *C. rectricibus apice albis, dorso griseo, pectore incarnato, macula laterali colli nigra lineolis albis.* 4.
- Risoria 33. *C. supra lutescens, lunula cervicali nigra.* 6.

105. Alauda

Allodola. Arvensis 1. *Alauda rectricibus extimis duabus extrorsum longitudinaliter albis, intermediis interiori latere ferrugineis.* 6.

106. Sturnus

8. Vulgaris 5. *Sturnus roſtro flaveſcente, corpore nigro, punctis albis.* — Storno.

107. Turdus

10. Viſcivorus 1. *Turdus dorſo fuſco, collo maculis albis, roſtro flaveſcente.* — Tordo.

4. Merula 22. *T. ater roſtro, palpebrisque fulvis.* — Merlo.

109. Loxia

8. Coccothrauſtes 2. *Loxia linea alarum alba, remigibus mediis apice rhombeis, rectricibus latere tenuiore baſeos nigris.* — Froſone, da noi detto *Becco-duro*

3. Chloris 27. *L. flavicanti-vireſcens, remigibus primoribus antice luteis, rectricibus lateralibus quatuor baſi luteis.* — Se è il noſtro Verdòne.

110. Emberiza.

18. Hortulana 4. *Emberiza remigibus nigris, primis tribus margine albidis, rectricibus nigris, lateralibus extrorſum nigris.* — Ortolano.

2. Citrinella 5. *E. rectricibus nigricantibus, extimis duabus latere interiore macula alba acuta.* — Zivolo.

112. Fringilla

1. Cœlebs 3. *Fring. artubus nigris, remigibus utrinq. albis, tribus primis immaculatis, rectricibus duabus oblique albis.*
3. Montifringilla 4. *alarum baſi ſubtus flaviſſima.*
1. Julenſis 5. *F. fuſca, pectore humeriſque rufis, alis nigris, macula rufa.*

— Paſſera Solitaria.

6. Carduelis 7. *F. remigibus antrorſum luteis extima immaculata, rectricibus duabus extimis medio, reliquiſque apice albis.*
2. Serinus 17. *F. ſubvireſcens, mandibula inferiore albida, dorſo lateribus fuſco maculatis, faſcia alarum alba.*

— Cardellini.

6. Canaria 27. *F. roſtro, corporeque albo-flavicante, rectricibus, remigibusque vireſcentibus, roſtro albido.* — Canarino

Pafferi da muro e da Salcio. Domeftica 36. *F. remigibus, rectricibusque fuſcis corpore griſeo nigroque, faſcia alarum alba ſolitaria.* 30.

104. Motacilla

Uſſignuolo. Luſcinia 1. *Motacilla rufo-cinerea armillis cinereis.* 2.

Cannavarola. Curruca 6. *M. ſupra fuſca, ſubtus albida, rectricibus fuſcis, extimo margine tenuiore alba.* 2.

Beccafico. Ficedula 10. *M. ſubfuſca, ſubtus alba, pectore cinereo-maculato.* 6.

Cutretta da noi detta *Ballerina*. Alba 11. *M. pectore nigro, rectricibus duabus lateralibus dimidiato oblique albis.* 8.

Capinero. Atricapilla 18. *M. teſtacea ſubtus cinerea, pileo obſcuro* 2.

Reattino. Trochilus 49. *M. cinereo-virens, alis ſubtus rectricibus flaveſcentibus, ſuperciliis luteis.* 6.

117. Hirundo

Rondinella: Ruſtica 1. *Hirundo rectricibus, exceptis duabus intermediis, macula alba notatis.* 10.

Gul-bianco preſſo i Piemonteſi. Urbica 3. *H. rectricibus immaculatis, dorſo nigro cæruleſcente, tota ſubtus alba.* 3.

Rondone. Apus 6. *H. nigricans, gula alba, digitis omnibus quatuor anticis.* 7.

La ſerie delle mie oſſervazioni ſulle teſte degli uccelli è dunque ſondata ſull' eſame di più di quattrocento individui. Felice me ſe tutte queſte vittime ſacrificate alla ricerca della verità, e all' aumento delle cognizioni noſtre intorno alla più importante tra le viſcere mi guideranno al conſeguimento del fine principale, che mi ſono propoſto, il quale ſi è di rendere me ſteſſo e i Lettori miei ſempre più riconoſcenti verſo l' *ineffabile Increata Sapienza*, la quale tutto che abbia voluto provvedere d'organi in apparenza analoghi il cranio di moltiſſimi dei viventi, ha però in diverſiſſima guiſa coſtrutti nelle diverſe ſpecie gli organi medeſimi a tenor dei loro biſogni, e ſi compiacque di fiſſare nel ſolo cerebro umano la ſede principale di quella incom-

prensibile maravigliosa sostanza, che ci fa ragionevoli, e capaci di adorarne (per quanto alla umana debolezze è concesso) la Maestà, e di ammirarne gl'immensi a noi favorevoli attributi in qualsivoglia delle di Lei creature.

Con questi sentimenti do fine alla mia lettera di nuovo supplicando V. S. di non risparmiare quanto stimerà opportuno a rendere meno difettosa la mia operetta, la quale servirà di testimonianza al mondo della amicizia onde voi mi onorate, e della stima inalterabile, che fo e farò sempre dei vostri meriti, e del saper vostro.

TRATTATO I.

Delle offa del Cranio degli uccelli in generale, e particolarmente delle Oche e delle Anitre.

TESTO ALLERIANO *

„ Le prefenti offervazioni ful cervello dell' Oca le
„ ho fatte fopra fei individui di quefta fpecie d' uccel-
„ li, le offa del cranio de' quali fono fpeffe, maffime
„ all' occipite, e cellulofe.

PARTE PRIMA.

Efpofizione delle parti efterne della tefta degli Uccelli.

CAPITOLO PRIMO.

Defcrizion generale della tefta degli uccelli.

L'Efatta cognizione delle parti contenute nella cavità del cranio di qualfivoglia animale foltanto allora fi ottiene quando fe ne conofce la difpofizione e la ftruttura delle contenenti, mancando la quale tanto men giufta idea fi avrà dell'entrare e dell'ufcire dei vafi e dei nervi nella cavità medefima; perciò refta indifpenfabile, che fi faccia precedere la ferie delle notizie più opportune a determinare il numero delle regioni, e i limiti delle offa, che le occupano.

---

* *Anferis cerebrum ex fex animalibus. Cranium craffum, maxime ad occiput, & cellulofum.*

Articolo I.

Parti esteriori della testa, e prima il Cranio degli Uccelli.

1. La testa degli uccelli si divide in *cranio*, ed in *Becco* ossia *Rostro*.

2. Il *cranio*, che in quasi tutte le specie ne fa la porzione più essenziale, se in tutti non ne fa la più estesa, occupa la region superiore e posteriore della testa, e vi si distinguono il *vertice* coperto di piume, i *lati* dove sono prominenti gli *occhi*, ed incavate le *orecchie*, e si attaccano molti muscoli destinati al movimento degli organi attigui; la *base* corrispondente alle *radici* del *becco*, e alla sommità anteriore carnosa del lungo flessibilissimo collo; la *fronte*, cioè la parte anteriore stretta e piana della testa, che discende leggiermente fra le *orbite*; l'*occipite*, che ne è la parte posteriore larga e gibbosa.

Articolo II.

Il Becco.

1. Il Becco o rostro è differente nelle diverse specie volatili tanto in figura e in consistenza, quanto in lunghezza, in larghezza, e in direzione, poichè se ne vedono dritti, inarcati, ritorti, sottili, compressi ai lati, appiattiti, conici, angolati, solcati, fatti a foggia di lesina, di coltello, a volta, uncinati, adunchi, cilindrici, brevi, mezzani, lunghissimi, e grossissimi ecc.

2. Dividesi il becco in porzioni superiore ed inferiore, alle quali nelle Oche e nelle Anitre potrebbe darsi il nome di mascelle.

3. Vi si considera prima di tutto la corona del bec-

co, ossia il ceppo comune a tutte e due le porzioni, che è appunto nel sito dove le piume sono come una specie di peluria detta dai Naturalisti il *capestro*, il quale consiste in una linea stretta riguardo ad alcune specie, riguardo ad altre in un largo collare; havvene pure, che hanno la peluria del *capestro* rivolta in alto e indietro a seconda della direzione delle altre penne del capo; alcune lo hanno scarmigliato, altre rovesciato in giù sul becco come i Corvi, le Gazze, le Strigi; altre poi hanno il ceppo del becco coperto di pelle morbida e sgombra di penne, la quale ha presso *Linneo* il nome di *cera*.

4. Vi si nota il *corpo*, che riguardo alla porzione o mascella superiore si divide in *dorso*, nel quale sono scolpite le *narici* esteriori guarnite di peli nominati *vibrisse*, e in ale, o margini destro e sinistro, riguardo alla inferiore in lati, e in base.

5. Vi si osserva finalmente l'estremità ossia punta in molti uccelli retta ed acuta, in altri ottusa, tuberculosa, adunca, ricurva.

6. Nelle Oche e nelle Anitre l'estremità del becco è larga, arcata, munita d'un'unghia, in queste bruna forbita, e più larga verso l'orlo delle mascelle, nelle Oche bianca, liscia più larga, più convessa, quasi ovale, sodissima, e assai più aderente.

Articolo III.

Dimension generale della testa delle Oche.

Spogliato degl'integumenti, e dei muscoli il cranio delle Oche, diviso da tutto quello, che s'appartiene al becco e al collo, trovasi comunemente lungo dalle 28 alle 30 linee parigine; e se fingasi una linea rasente la superficie esteriore convessa del cranio dalla apofisi nasale di mezzo alla occipitale, questa batterà fra le 46 linee, e i quattro pollici.

CAPITOLO

CAPITOLO II.

Divisione delle parti esteriori del cranio delle Oche.

Non discoprendosi facilmente nelle Oche adulte le divisioni naturali delle ossa del cranio, e non essendone contrassegnati i margini da sutura, nè da apparenti armonie; e per altra parte vedendovisi la figura in parecchi luoghi distinta, oltre che con le differenti porzioni delle ossa medesime vengono formate regioni pur differenti, mi sembra indispensabile, che per chiarezza maggiore vengano indicate le porzioni principali per dividerle all'uopo in altre subalterne.

ARTICOLO I.

Porzioni principali della convessità del cranio delle Oche.

1. Su questa convessità si osservano tre porzioni principali per lato, le nasali, le frontali, e le parietali.

2. Le *porzioni nasali* quadrilunghe ascendono fino ad un forame scolpito nel vertice distante linee 9 dalla apofisi *nasale di mezzo*, e trovasi proprio nel centro di quella linea, che trar si potrebbe in traverso dalla *apofisi orbitaria superior destra* alla *apofisi orbitaria superior sinistra*.

3. Quel *foro* è alcune volte doppio senza però, che il destro sia parallelo, nè costantemente simmetrico con il sinistro, e che tuttedue comunichino con il *seno longitudinale* della *dura madre*.

4. Fra l'accennato forame, e quell'*arco* rilevato che è tanto apparente sulla sommità posteriore del cranio v'è uno spazio lungo lin. 20 circa, delle quali venti linee le dieci anteriori servono per misurare l'estension delle *porzioni frontali*.

5. Queſte finiſcono in alto dirimpetto alla ſommità delle *orbite*.

6. Da tale altezza all' *arco* già menzionato ſi ſtendono per lo ſpazio delle altre dieci linee le *porzioni parietali*.

7. Tanto le porzioni naſali quanto le frontali e le parietali ſono diviſe in deſtra e ſiniſtra mediante una *linea incavata*, che dalla apofiſi *naſale di mezzo* aſcende fino alla ſommità dell' *arco*.

8. L' *arco* ſi curva ſui lati della ſommità e della faccia poſteriore del cranio, la quale diceſi *porzione occipitale*, che in alto in avanti e ai lati è circoſcritta dal medeſimo arco.

9. In baſſo ſtendeſi fino alla radice di due apofiſi paragonabili per la ſituazione più che per la figura loro alle *apofiſi maſtoidee* umane, e fino al *gran foro occipitale*.

10. Dalla ſommità dell' arco diſcende fino al *gran foro* ſuddetto una *ſpina piramidale*, oſſia *creſta oſſoſa*, che con la ſua baſe appoggia ſull' orlo ſuperiore di queſto foro.

Articolo II.

Eminenze più conſiderabili alla baſe del cranio delle Oche.

1. Alla baſe del cranio delle Oche ſi vedono parecchie eminenze oltre a molte foſſe ed incavature, a numeroſi ſolchi e forami. Alcune delle eminenze ſono ai lati, altre ſull' aſſe maggiore della baſe iſteſſa, onde cominceremo a deſcrivere le ſimmetriche o laterali prima di numerar quelle di mezzo.

2. Al davanti ve ne ha due brevi, e piatte, dal ſito e dalle funzioni loro dette *apofiſi naſali* deſtra e ſiniſtra.

3. Dietro e ſotto queſte ſi allungano le due *orbitarie inferiori* una per lato alla parte anteriore delle orbite.

4. Ai lati della fommità delle *porzioni nafali* fi veggono le poco elevate apofifi *orbitarie fuperiori* divife dalle predette mediante una mediocre *incavatura*.

5. Dico poco elevate parlando delle Oche e delle Anitre; ma nel Nibbio, nello Sparviere, nel Gheppio, e nello Smeriglio, che noi Piemontefi nominiamo *Crivella*, le apofifi orbitarie fuperiori fono prolungate per due lamine piatte e fottili, che fi fcoftano alquanto dal margine dell' orbita, e per efempio nel Nibbio trafcorrendo lo fpazio d' un pollice lafciano un voto fra il margine loro interno, e la porzion nafale, occupato da una membrana ligamentofa forte ed elaftica, la quale unitamente all' accennato prolungamento di quefte apofifi forma la parte anterior principale degli *archi delle orbite*, che ne terminano efteriormente la *volta*.

6. Seguono alla parte pofteriore delle *orbite* le lunghe, obblique, ed acute *apofifi orbitarie pofteriori*.

7. Finalmente alla parte inferior pofteriore dei lati del cranio fi vedono le apofifi *maftoidee*, concave al davanti per dar ricetto ad uno dei capi del mobile *offo intermafcellare*, e più ampiamente incavate all' indietro per dar luogo alla *lunata membrana del timpano*, per contenere alcuni degli organi appartenenti all' udito, e per dare ufcita ad alcune groffe vene difcendenti dall'encefalo.

8. Fra quelle, che occupano l' affe della bafe del cranio, v'è anteriormente la piatta e breve *apofifi nafale di mezzo*,

9. La *parete offofa obbliqua*, che foftiene in alto e indietro il *tramezzo delle orbite*, e

10. La *crefta fottile dentata*, foftegno del *tramezzo delle narici*.

11. Alla eftremità pofteriore dell' accennato *parete* fi vedono elevate fu due fpecie di apofifi due *faccette articolari* deftinate ad agevolare i movimenti della *mafcella fuperiore*, apparentiffime nelle Oche e nelle Anitre

perchè vi si appoggiano due simili *faccette ovali* coperte di liscia cartilagine, proprie delle *appendici dei fucili interni* della medesima *porzion superiore del becco*.

12. Dietro alle *faccette articolari* dopo un breve intervallo vi è l' angolo anteriore della *tuberosità basilare*, eminenza considerabilissima fatta a guisa di triangolo, gli angoli posteriori della quale sono tronchi.

13. Tale *tuberosità* è longitudinalmente divisa per una *cresta* assai disuguale e scabra destinata all' attacco di varj muscoli, ed occupa un ampio sito fra le *faccette articolari*, le *aposisi mastoidee*, e la *occipitale*.

14. L' *aposisi occipitale* è liscia, pulita, quasi simile ad un *capezzolo osseo*, coperta di cartilagine: sembra affissa al margine inferiore del *gran foro occipitale*, e alla base della *tuberosità occipitale* con la quale confina per mezzo d' una specie di *collo*.

15. Il *collo* della *aposisi occipitale* consiste in un *solco semilunare*, le corna del quale sono rivolte in su: vi si pianta un robusto *ligamento capsulare*, che unisce a tale aposisi la prima *vertebra*.

16. E' anche necessario, che vengano notate due piccole *spine ossee* sulla stessa linea delle *faccette articolari*, alquanto più verso la sommità della parte posteriore del *tramezzo*, fra questo e la faccia interna della radice delle *aposisi orbitarie posteriori*.

Articolo III.

Cavità esteriori della faccia superiore del cranio.

1. Tra le cavità della faccia superiore del cranio delle Anitre si contano due grandi e profonde *incavature nasali* scolpite nella faccia inferiore delle porzioni nasali fra le aposisi dello stesso nome, le orbitarie inferiori anteriori, le orbitarie superiori, e la parte obbliqua, che le separa.

2. Due *foſſe naſali* ſulla parte anterior ſuperiore interna del tramezo delle narici ſotto la porzion naſale.

3. Due grandi foſſe dette le *orbite* ovali, profonde, ſeparate mediante il proprio loro tramezzo.

4. Le *incavature ſemilunari* tra le apoſiſi orbitarie anteriori ſull' orlo delle orbite medeſime.

5. Seguono le *incavature traverſali* fra le apoſiſi orbitarie poſteriori, e le faccette articolari.

6. Le *incavature temporali* tra le apoſiſi orbitarie poſteriori, e le maſtoidee.

7. Le *articolari*, e

8. Le *auricolari*, *incavature* ſcolpite nella faccia concava delle apoſiſi maſtoidee.

9. Le *incavature maſtoidee* tra le apoſiſi di queſto nome, e i lati dell' ampia tuberoſità baſilare.

10. Vi ſono di [illegible] due ſtrette e lunghe *ſcanalature* con l' orlo eſterio[illegible]bro, le quali cominciano tra le apoſiſi naſali dei lat[illegible] e la naſal di mezzo, e ſi ſtendono ſulla volta delle foſſe naſali ſino tra le apoſiſi orbitarie ſuperiori, e il margine vicino anterior ſuperiore delle orbite.

Articolo IV.

Cavità delle parti inferiori eſterne del cranio.

1. Alla faccia inferiore del cranio dei ſuddetti uccelli ſi veggono le *foſſe maſtoidee*, cioè due depreſſioni larghe e profonde che al davanti finiſcono in un angolo, laſciate da due *linee aſpre* aſſai rilevate, le quali partendo da una *creſta longitudinale tuberoſa*, regnante nel mezzo della tuberoſità baſilare, vengono ad unirſi con il lembo interno, ed anteriore delle apoſiſi maſtoidee.

2. Queſte foſſe danno attacco a diverſi muſculi, e comunicano con la cavità del cranio mediante un *foro bipartito*, per la apertura anteriore del quale eſce il ner-

vo del *par vago*, per la diretana un groſſo ramo delle *vene jugulari*.

3. Le *aperture* diſtinte di due canaletti orizzontali deſtinati a dar uſcita dal cranio cadono ad un ramo principale del nervo del nono paro: aperture, che sboccano all'angolo anteriore della *tuberoſità baſilare*, e che poſſono prendere il nome dal nervo, che vi paſſa.

4. I *condotti* delle *carotidi* fatti a guiſa di corna: principiano al fianco eſterno dei canaletti ora deſcritti, e ſi circonflettono indentro, e in alto verſo la *foſſa pituitaria*. Guidano un ramo conſiderabile di tali arterie, che paſſando ſui fianchi della *glandula pituitaria* ſcorre obbliquamente indietro, e in alto per diramarſi nella baſe del cervello dietro all' *unione* dei *nervi ottici*.

5. La faccia poſteriore del cranio dietro dell' *arco oſſoſo* preſenta all' occhio un *triangolo* quaſi rettilineo, i lati del quale ſono fatti da due creſte, che dalla *ſpina occipitale* vengono a terminare nel lembo poſteriore delle *apofiſi maſtoidee*.

6. Le parti poſteriori inferiori dei lati del triangolo radono il *foro occipitale*, il margine inferiore del quale è fatto dal *capezzolo occipitale* già mentovato.

7. Tra la *ſpina occipitale*, l' arco, e la radice delle *apofiſi maſtoidee* vi ſono due larghe impronte muſculari aſſai incavate.

CAPITOLO III.

Soſtanza delle oſſa del cranio.

In tutte le deſcritte porzioni delle oſſa del cranio delle Oche, delle Anitre e degli altri uccelli in generale ſi diſtinguono due *tavole* ſode, fragili, bianche, e tra le medeſime un abbondante *meditullio*, eccetto nel centro del *tramezzo delle orbite*.

Il *meditullio* , detto pur *Diploe* dagli Anatomici , è negli uccelli un teſſuto ſpugnoſo più abbondante, e più raro alla *tuberoſità baſilare*, alla radice di tutte la apofiſi , ſu per tutta la *colonna* , che ſoſtiene il *tramezzo* delle *orbite*, maſſime dietro la *porzion naſale*.

Notabile altresì ne è l' abbondanza all' *arco* , dove (oltre che dà maggior leggierezza al cranio) ſerve anche a dare maggior energia all' organo dell' *udito* ampliandone i *labirinti* , e multiplicandone le concavità.

F I N E

Della prima parte del I. Tratt. dell' eſpoſizione anatomica delle parti relative all' Enceſalo degli uccelli , la quale tratta delle parti eſteriori oſſoſe del cranio dei medeſimi.

ESAME CRITICO

Di un Problema di probabilità del Sig. DANIELE BERNOULLI, *e ſoluzione d'un altro Problema analogo al Bernulliano.*

Del Sig. GIO: FRANCESCO MALFATTI Profeſſore di Matematica nell' Univerſità di Ferrara.

1 DAppoichè i Matematici han conoſciuto il diritto, che ha la lor facoltà di eſtendere i ſuoi calcoli fin ſu la ſorte, e di preſagirne in qualche maniera gli eventi, aſſegnando a ciaſcuno il correſpettivo grado di probabilità, e dando un certo e determinato valore alla ſperanza e al timore, che l' uom dee avere ſu d'eſſi, non è mancato tra loro chi ſi applichi con tutta l'attenzione a queſta parte utiliſſima dell'umano ſapere; e noi ſiam debitori ai *Moivre*, ai *Monmort*, agli *Hugenj*, ai *Bernoullj*, e ad altri eccellenti ingegni de' veri principj, ſui quali eſſa è fondata, e delle regole, che coſtituiſcono l'equità in que' contratti, ne' quali entra il riſico e la dipendenza da ciò che ſi chiama caſo fortuito, accidentalità, fortuna. Di queſta ſpecie ſono i giuochi, maſſimamente d' azzardo, le aſſicurazioni, i vitalizj, le tontine, ed altre ſpeculazioni di ſimil tempera, che gli uomini ſi ſon tratte dal capo per non laſciar via intentata di migliorar le loro circoſtanze, e render più comodo il loro ſtato.

2. Avvegnachè però e molti ſiano ſtati i problemi di tal fatta che hanno ſciolto gli Autori, e parecchi ſian già i canoni che abbiamo, dotati di qualche generalità, ſotto cui tant'altri riduconſi che hanno affinità

nità con quelli, de' quali è ſtata data la ſoluzione; sì è lontano che al dì d'oggi ſi poſſa dir la materia eſaurita, che non ſi ceſſa di conſiderar gli eventi della ſorte ſotto nuovi aſpetti, e s'immaginan nuovi contratti, e s'inventano nuovi giuochi, ſoventi volte pel ſol piacere d'indagar le leggi, con cui dovrebbero eſſere regolati in tale e tal caſo i depoſiti de' giocatori e i patti de' contraenti, affinchè ſi ſalvi interamente la giuſtizia e non intervenga alcuna leſione. Proporzionandoſi per sì fatto modo le corriſpoſte alle aſpettative degli eventi utili, ſi pareggiano di qua e di là le partite, e ſi coſtringe, dirò così, la fortuna ad eſſer giuſta nella diſtribuzione de' ſuoi favori.

3. Tra queſti inventori di nuovi problemi di probabilità ha voluto eſſere ancora annoverato il gran Geometra e Medico Sig. *Daniele Bernoulli*, ultimo de' tre illuſtri Fratelli, che hanno tanto arricchito le Matematiche colle ſublimi loro ſcoperte, del quale, tre meſi fa, l'Europa letteraria ha pianto la morte ſeguita dopo una lunga carriera di meriti, e dopo ch' egli avea già sì doviziofamente provveduto colle ſue opere alla immortalità del ſuo nome. Il Problema, ch' ei ſi propone nel Tomo XIV. de' Comentarj della nuova Accademia di *Pietroburgo*, è uno de' più compoſti, ſe ſi conſidera in tutta la ſua eſtenſione, ma divien ſemplice, ſe ci fermiamo alla prima ipoteſi. Sentiam lui medeſimo, il quale così ci parla.

4. *Sint duæ, tres, pluresve urnæ, in quibus ſingulis ſchedulæ certo & æquali numero repoſitæ putentur, ſchedulæ autem uniuſcujuſque urnæ ſuo peculiari colore a ſchedulis reliquarum urnarum ab initio diſtinctæ ſint; tum porrò ſchedulæ ſucceſſive, ſorte tamen permutentur hac lege, ut quavis vice ex ſingulis urnis ſchedula una extrahatur, & deinde in urnam ordine ſequentem translocetur, illa autem, quæ ex urna ultimo loco poſita extracta ſit, in in primam reponatur: his ita poſitis, datoque permutatio-*

num præfato modo factarum numero, quæritur numerus schedularum cujusvis coloris, quæ probabiliter in quavis urna continebuntur. Quoties autem extractio ex singulis urnis simul facta fuit, simulque eo, quo dixi, modo in urnam sequentem schedula quævis transposita, integram istam operationem permutationis nomine indico....

5. *Quamvis obvius sit calculus pro duabus urnis, eum tamen ob nexum, quem habebit cum sequentibus, apponam. Sint igitur in prima urna schedulæ albæ* n, *totidemque nigræ in urna altera. Erit secundum notas combinationum, atque probabilitatum regulas post primam permutationem numerus schedularum albarum in prima urna residuarum* $= n - 1$; *post secundam permutationem* $= \frac{(n-1)(n-2)}{n} + 1$; *post tertiam permutationem habebitur* $\frac{(n-1)(n-2)^2}{nn} + \frac{n-2}{n} + 1$; *post quartam* $\frac{(n-1)(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$; *post quintam* $\frac{(n-1)(n-2)^4}{n^4} + \frac{(n-2)^3}{n^3} + \frac{(n-2)^2}{n^2} + \frac{n-2}{n} + 1$, *& sic porro: inde colligitur, si generaliter numerus factarum permutationum fuerit* r, *atque ponatur brevitatis gratia* $\frac{n-2}{n} = \mathrm{m}$, *fore numerum schedularum albarum in prima urna reliquarum* $= \frac{1 - m^{r-1}}{1 - m} + (n-1)\, m^{r-1} = \frac{1}{2} n (1 + m^r)$. *Dehinc reliquarum schedularum distributio per se intelligitur.* Da questa prima ipotesi passa poi alle altre più composte, e trova per queste pure le formole corrispondenti, nelle quali scopre infine una legge di progresso che gli fa stabilire il canone generale

per determinare il numero delle ſchedule colorate che rimangon nelle urne dopo qualſiſia numero di permutazioni.

6. Non dipartendomi dalla prima ſuppoſizione delle due urne, ſiccome l' Autore non accenna, per quale ſtrada ſia giunto a ritrovar le ſue formole, confeſſo di eſſermivi fermato ſopra alcun tempo, ſenza potere indovinare da qual raziocinio e da qual calcolo gli veniſſero ſomminiſtrate. Finalmente e' mi venne in capo, che poteſſe avere qualche analogia col ſuo problema delle ſchedole e delle due urne un altro problema di due botti A, B eguali di capacità, la prima delle quali ſia piena di vino e l'altra d'acqua. Levando dalla prima, e dalla ſeconda eguali miſure, poi fatta la permutazione, è chiaro che, ove la miſura ſi chiami 1, e n la quantità del fluido in ciaſcuna botte, riman nella botte A $n-1$ di vino e 1 d' acqua, accadendo preciſamente il contrario nella botte B. Per la ſeconda permutazione poi riflettendo, che nella miſura 1 di miſto, che cavo dal vaſo A, deve ſtare tutto il miſto al vino in quella proporzione medeſima, che oſſerva l'intero miſto al vino nella botte, trovo, che $\frac{n-1}{n}$ eſprime la quantità di vino tratto da A la ſeconda volta, onde il vin reſiduo in A alla metà dell' operazione diventa $n-1-\frac{(n-1)}{n}=\frac{(n-1)^2}{n}$. Paſſando poi al vaſo B, ſiccome in eſſo il vino è 1, l'analogia $n:1::1:\frac{1}{n}$ ci fa conoſcere, che $\frac{1}{n}$ è la quantità di vino tratto da B, il quale per terminare l' intera operazione va verſato in A. Dunque, eſeguita la ſeconda permutazione, avrò in A quantità di vino $\frac{(n-1)^2}{n}+\frac{1}{n}$, ovvero

$\frac{n^2 + (n-2)^2}{2n}$, formola equivalente alla Bernulliana

$\frac{(n-1)(n-2)}{n} + 1$.

1. Replicando un simile raziocinio per la terza, quarta ecc. permutazione, si troverà per la terza il vino in $A = n^3 + \frac{(n-2)^3}{2nn}$; per la $4^a = \frac{n^4 + (-2)^4}{2n^3}$ ecc., onde pel num. indefinito r di permutazioni, sarà il vino residuo in $A = \frac{n^r + (n-2)^r}{n 2^{r-1}}$, cioè (sostituito m in vece di $\frac{n-2}{n}$) $= \frac{n}{2}(1+m^r)$, che è appunto il canone del nostro Ch. Autore.

8. Assicuratomi per tal modo della identicità delle mie formole con quelle del num. 5., ho sospettato, che il Bernullio sciogliendo prima il problema delle botti, e appresso rivolgendosi all' altro delle schedole, abbia argomentato così. Distribuiscansi le schedole bianche e nere, che son nelle urne A, B dopo la prima permutazione, in tal maniera

$$\begin{array}{c} A \\ \text{bianche } n-1 \text{ : nere } 1 \\ B \\ \text{nere } n-1 \text{ : bianche } 1 \end{array}$$

E intraprendasi la seconda. Poichè in A sono le bianche $n-1$, e le nere 1, la parte probabile delle bianche che prendo è $\frac{n-1}{n}$, e la parte probabile delle nere è $\frac{1}{n}$, perchè queste due parti unite insieme fanno l'unica schedola che estraggo; e il quanto probabile delle bianche deve stare al quanto probabile delle nere, come il numero delle bianche al numero delle nere che son

nell' urna, nella qual ragione ſtanno appunto le parti $\frac{n-1}{n}$, $\frac{1}{n}$. Il perchè, ſottratto $\frac{n-1}{n}$ dal numero $n-1$ di bianche che eran nell' urna dopo la metà della 2ª operazione, ſarà probabile che reſtino in A ſchedole bianche $n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)$. Con ſimile raziocinio, per l'altra metà dell'operazione, egli trova, che probabilmente ſi cava dall' urna B la parte $\frac{1}{n}$ di bianche, la quale meſſa in A coſtituiſce il numero probabile di ſchedole bianche in A, eſeguita che ſia la 2ª permutazione, $=n-1-\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}=\left(\frac{(n-1)(n-2)}{n}\right)+1$.

9. Proſeguendo poi alle permutazioni conſecutive, riſultano le altre formole e il canone del Bernullio, coſicchè altra differenza non vi ſarà tra il problema de' due fluidi e queſto delle ſchedole, che le formole nel primo rappreſentano le quantità certe e neceſſarie di vino che riman nella botte, laddove nel ſecondo colle medeſime formole ſi eſprime ſolo il quanto probabile delle ſchedole bianche che rimangon nell' urna.

10. Della giuſtezza di queſto o ſomigliante ragionamento, che poſſa aver fatto il Bernullio, fecemi dubitare un Corollario che ne diſcendeva, e ch' egli ſteſſo nota nel decorſo della ſua diſſertazione con queſte parole. *Quia* m *ſemper eſt unitate minor, evaneſcit terminus* m^r, *ſi* r *ſit numerus admodum magnus* (cioè infinito); *atque tum ſit numerus ſchedularum albarum in prima urna reſiduarum ſimpliciter* $=\frac{n}{2}$. *Status is eſt aſymptotos, ad quem, dum permutationes fiunt, magis magiſque pervenitur.....* Dunque, diceva io, ſe le ſchedole bianche nella prim' urna ſaran tre, ed una la ne-

ra ; e nella feconda abbianvi tre nere ed una bianca , vi vorranno infinite permutazioni , perchè io poffa fperare di aver nella prim' urna due bianche, che fono precifamente la metà di tutte le bianche che abbiamo . Quefta confeguenza mi parea duro di dover ammettere nel tempo che attefa la facilità di trar' una delle tre bianche dalla prim' urna , e fimultaneamente una delle tre nere dalla feconda, non avrei dubitato di fcommettere, che mi farei ridotto alla metà dopo una fola permutazione.

11. S'accrebbe poi il mio dubbio , anzi terminai di convincermi della diverfa indole de' due problemi , e dell' errore in che era caduto il Bernullio con quefta femplice riflesfione. Il problema de' due fluidi efige, che feguitando a permutare , il vino della prima botte vada neceffariamente diminuendo; ed efeguita la prima permutazione , non fon mai poffibili i cafi , che colle fuffeguenti fi ritorni ad avere in effa quantità di vino $n-1$, e molto men tutto vino : al contrario nel problema delle fchedole è poffibile che nelle diverfe permutazioni ora crefca , ora cali il numero delle fchedole bianche , e dopo alcune operazioni potrebb' anche riufcir probabile, che rimaneffero nella prim' urna fchedole bianche $n-1$, o ad effa tutte le bianche veniffero reftituite. Ora tutti quefti cafi non potendo effere abbracciati, com' è evidente, dalla formola de' fluidi, perchè il problema li efclude, può mai darfi, che un' iftesfa formola regoli ambidue i quefiti, e mentr' effa efprime giuftamente i refidui di vino nella prima botte, posfa valere eziandio ad efprimere gli avanzi probabili delle fchedole bianche nella prim' urna?

12. L'ufo del generale e incontraftabil principio, che regola fiffatti problemi di probabilità farà anche veder più chiaramente l' inapplicabilità della fuddetta formola. Egli è certiffimo, per confenfo di tutti i Geometri, che a ftabilire il grado di probabilità competente a un

tale e determinato evento, voglionfi aver prima di tutto fotto l'occhio tutti gli eventi poffibili che appartengono al problema; ed affegnare poi a ciafcun evento il numero delle combinazioni, che lo conducono. La proporzione, che pafferà tra le combinazioni del dato evento, e la fomma di quelle che appartengono agli altri, fervirà a determinarne il grado di probabilità, coficchè fe eguali riefcano quefti numeri di combinazioni, fi potrà fcommettere in pari e dir del tutto probabile quell'evento che s'è chiamato.

13. Ciò pofto, foftituendo nel problema del Bernullio le palle alle fchedole, che è il medefimo, trattiamo il problema inverfo, e cerchiam quante combinazioni favorevoli, e quante contrarie fi abbiano per lafciare nell'urna A un dato numero di palle bianche dopo aver compiuto qualfifia dato numero di permutazioni; delle quali per me farà fempre prima quella che fi fa, quand'abbiam già nell'urna A palle bianche $n-1$ con una nera, e palle nere $n-1$ con una bianca nell'urna B.

14. Prima di tutto però premetto il feguente generaliffimo

LEMMA.

Siano in A palle bianche $n-p$, palle nere p; e in B palle nere $n-p$, palle bianche p. Cavando una palla da A, un' altra da B e permutando una volta alla maniera Bernulliana, può avvenire, che fi trovino in A palle bianche $n-p-1$, ovvero $n-p$, o finalmente $n-p+1$. Fuori di quefti tre cafi, neffun altro è poffibile, ficcome è chiaro. Ora io dico, che per ottenere in A palle bianche $n-p-1$, avrò combinazioni favorevoli $(n-p)^2$; per palle bianche $n-p$, combinazioni favorevoli $2p(n-p)$; finalmente combinazioni favorevoli p^2 per palle bianche $n-p+1$. Si difpongan così le palle delle urne.

A

palle bianche $n-p$ nere p

B

nere $n-p$ bianche p.

Se da A cavo una bianca, e da B una nera, alla fine della permutazione io ho in A palle bianche $n-p-1$. Ma ciò si può ottenere, ove qualunque delle bianche $n-p$ di A si combini con qualunque delle nere $n-p$ di B; e il numero di queste combinazioni favorevoli è $(n-p)^2$. Dunque ecc. Similmente perchè in A rimangano palle bianche $n-p$, anche fatta la permutazione, è necessario o ch' io levi una nera da A, e un' altra nera da B, o una bianca da A e un' altra bianca da B. Ma per ciò abbiamo tante maniere, quante nascono dal combinare il numero di bianche $n-p$ che sono in A col numero di bianche p che sono in B, e dal combinare le nere p di A colle nere $n-p$ di B. Dunque $p(n-p)$ $+p(n-p)$ cioè $2p(n-p)$ sarà il numero delle combinazioni utili per l' evento di bianche $n-p$ nell' urna A. Da ultimo ad aver palle bianche $n-p+1$, fa di mestieri che una delle nere p di A si assocj con una delle bianche p di B; il che si può fare in numero p^2 di maniere. Dunque p^2 saranno i casi favorevoli a questo terzo avvenimento; e resta compiuta la dimostrazione.

15. Raccoglieremo dal presente Lemma, che chiamato un de' tre casi di palle bianche, che possono aver luogo nella permutazione, mi saranno contrarie tutte le combinazioni, che favoriscono gli altri due eventi. Avanti di permutare io chiamo, per esempio, in A palle bianche $n-p$, caso che ha di combinazioni utili $2p(n-p)$. Dunque le combinazioni, che mi sono contrarie, sono $(n-p)^2$, e p^2, le quali menano gli altri due casi $n-p-1$, $n-p+1$, e la probabilità, che ho d' indovinar l' evento nominato, alla opposta sta come $2p(n-p) : (n-p)^2+p^2$; la qual proporzione troverem pure con quest' altro semplicissimo raziocinio.

Poichè

Poichè n è l' intero numero delle palle bianche, e parimente n l' intero numero delle nere nelle due urne, farà n^2 il numero di tutte le possibili combinazioni. Sottratte pertanto da n^2 le combinazioni favorevoli a un dato caso di bianche, si avran le contrarie. Onde le contrarie al caso di bianche $n-p$, che ne ha di utili $2p(n-p)$, farà $n^2-2p(n-p)$, formola identica coll' anzidetta $(n-p)^2+p^2$. Sicchè dato il numero delle combinazioni favorevoli, si ha tosto il numero delle avverse; e così al contrario.

16. Quest' ultima maniera di trovare il numero delle combinazioni contrarie, dato quel delle favorevoli a un certo evento, per una sola permutazione, può estendersi ancora al caso di qualsivoglia numero di permutazioni, ragionando così. Sono n^2 tutte le combinazioni di palle che appartengono a ciascuna permutazione in particolare; e ciascuna delle combinazioni, che ammette la prima permutazione, può combinarsi con ciascuna combinazione ricevuta dalla seconda permutazione. Dunque il numero totale delle combinazioni, che risguardano due permutazioni, farà $n^2 \times n^2 = n^4$. Andando innanzi col discorso, per tre permutazioni, troveremo essere il numero delle combinazioni $= n^2 \times n^2 \times n^2 = n^6$; per quattro, n^8, e generalmente n^{2m} per numero m di permutazioni. Quindi posto che sia N il numero *v.g.* delle combinazioni contrarie all' evento ϕ in permutazioni m, farà $n^{2m}-N$ il numero delle favorevoli; e se N farà il numero delle favorevoli, $n^{2m}-N$ farà quello delle contrarie.

17. Un altro vantaggio trarrem dal Lemma, e da' susseguenti §§, che consiste nella maniera di rintracciare i numeri delle combinazioni o favorevoli o contrarie a un evento per un dato numero di permutazioni $= m$. Siano gli eventi possibili α, β, $\gamma \ldots \phi$. Consideriamo in due diverse maniere il Problema delle due urne. O si scommette, che almeno in una delle permutazioni m

ſi avrà in A l' evento ϕ, o ſi chiama lo ſteſſo evento ϕ dopo aver eſeguite tutte le permutazioni. Nel primo caſo, le combinazioni di ciaſcun evento α, β, γ.... per tutte le poſſibili ſucceſſioni di uno all' altro dovran combinarſi con quelle dell' evento ϕ, poſto in tutti quei luoghi di prima, ſeconda, terza ecc. permutazione, ne' quali può entrare: e l' aggregato de' prodotti di queſte ſteſſe combinazioni darà il numero delle favorevoli a ϕ. Ecco un eſempio. Suppoſte in A palle bianche $n-1$, nere 1, e al contrario in B, domando due permutazioni per avere in A o alla prima o alla ſeconda palle bianche $n-2$, e cerco, quanto ſia probabile queſto avvenimento.

18. Fatto nel Lemma $p=1$, ſi vedrà a un tratto, che gli eventi della prima permutazione non poſſon eſſer che tre

palle bianche in A $\begin{array}{l} 1.^\circ\ n-2 \\ 2.^\circ\ n-1 \\ 3.^\circ\ n \end{array}$. Se nella ipoteſi del riſultato $n-2$, alla ſeconda permutazione ſi cava bianca, e ſi mette bianca, anche dopo la ſeconda permutazione ſi ha di bianche $n-2$. Devonſi pertanto accoppiare queſti due eventi e ſcrivere $\begin{array}{c} n-2 \\ n-2 \end{array}$. Il primo appartiene alla prima permutazione e l' altro alla ſeconda. Mantenuta l' ipoteſi del primo evento $n-2$, può accadere, che nella ſeconda permutazione io levi nera, e metta bianca. In tal caſo le bianche dallo ſtato $n-2$ paſſano allo ſtato $n-1$, e dovran così ſcriverſi $\begin{array}{c} n-2 \\ n-1 \end{array}$; e con ciò l' ipoteſi del primo evento $n-2$ reſta eſaurita, perchè a $n-2$ non può ſuccedere nè n nè qualunque altro numero ſuperi o manchi di due unità, riſpetto allo ſteſſo numero $n-2$

19. Accettiam' ora l' altra ipoteſi del primo evento $n-1$. Per ciò che s'è detto, è chiaro, che può eſſe-

re susseguito e dall'evento $n-2$, e dall'evento n, e dal nuovo evento $n-1$. Questi due ultimi casi non fan per noi, perchè, non trovandosi nè nella prima, nè nella seconda permutazione, il numero $n-2$, ci sono essi contrarj. Si dovrà quindi tener conto della sola union degli eventi $n-1$, $n-2$, e scrivere $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.

20. La terza ipotesi suppone il primo evento n, cui non può mai tener dietro $n-2$ essendo necessariamente il secondo evento $n-1$. Dunque tre soli sono gli accoppiamenti utili che risultar possono dalle due permutazioni; $\begin{matrix} n-2 \\ n-2 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-2 \\ n-1 \end{matrix}$; $\begin{matrix} n-1 \\ n-2 \end{matrix}$.
Resta ora che troviamo i numeri delle combinazioni. Per far questo, ci dobbiam ricordare, che lo stato primitivo delle palle bianche in A era $n-1$. Dunque volendosi, che dopo la prima permutazione diventin le bianche $n-2$, in vigore del Lemma avrem combinazioni favorevoli $(n-1)^2$. Dallo stato $n-2$ passino le bianche nella seconda permutazione al novello stato $n-2$. Poichè il Lemma c'instruisce che per aversi replicatamente in A palle bianche $n-p$ abbiam combinazioni propizie $2p\,(n-p)$, si fa chiaro, che $4(n-2)$ esprimerà il numero delle maniere diverse, con cui può ritornare lo stato $n-2$ nella seconda permutazione. Ai due successivi eventi $n-2$ uniamo lateralmente in colonna i numeri delle combinazioni corrispondenti
$\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix}$, e argomentiamo così. In numero di maniere $(n-1)^2$ si può far transito dallo stato primitivo di palle bianche $n-1$ allo stato $n-2$. Ma a ciascuna delle maniere $(n-1)^2$ corrisponde un numero di maniere $4(n-2)$, per passare dallo stato $n-2$ della prima permutazione al nuovo stato $n-2$ della seconda. Dunque, componendo, per passare dallo stato primitivo $n-1$ ai due stati successivi $n-2$, $n-2$, avrem

maniere o combinazioni utili, che si esprimeranno col prodotto delle combinazioni rispettive cioè con $4(n-1)^2$ $(n-2)$. Un simile raziocinio ci farà conoscere, che al secondo accoppiamento $\frac{n-2}{n-1}$ corrispondono combinazioni utili $4(n-1)^2$; e al terzo $\frac{n-1}{n-2}$ combinazioni utili $2(n-1)^3$. Sarà quindi il numero totale delle combinazioni che menano l'evento $n-2$ o nella prima o nella seconda permutazione $= 4(n-1)^2 (n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3$; e la probabilità del suddetto evento alla probabilità contraria sarà come $4(n-1)^2 (n-2) + 4(n-1)^2 + 2(n-1)^3 : n^4 - 4(n-1)^2 (n-2) - 4(n-1)^2 - 2(n-1)^3$.

21. Ciò che s'è detto per due permutazioni può estendersi a tre, quattro ecc. sino al numero indefinito m. Si scriveranno pertanto in colonna tanti eventi successivi quanti porta il numero m, e in altra lateral colonna si porran per ordine i rispettivi numeri delle combinazioni, che conducono ciascuno de' suddetti eventi: si farà quindi il prodotto di questi numeri, e ciò che ne risulta, esprimerà le combinazioni favorevoli ad aversi i dati eventi secondo l'ordine con cui son posti per le successive permutazioni. All'ordine d'eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$ corrispondano le combinazioni $a, b, c \ldots p$; si formeran le colonne di questi numeri così

$$\begin{matrix} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \\ \vdots & \vdots \\ \phi & p \end{matrix}$$

, e il prodotto $abc \ldots p$ darà il numero delle combinazioni, che menano la successione degli eventi $\alpha, \beta, \gamma \ldots \phi$.

22. Ove poi si domandi di aver l'evento ϕ alla fine dell'intero numero m delle richieste permutazioni; che è la seconda maniera di considerare il problema delle due urne da noi accennata nel §. 17. ed è quella ap-

punto del Bernullio, converrà avvertire, che ad adempire questa condizione più angusta, nella formazione delle colonne talmente debbonsi associare i ϕ o con se stessi, o cogli altri eventi α, β, γ ...., che un ϕ rimanga sempre nell'ultima sede che corrisponde all'ultima permutazione. Disposti così gli eventi, le colonne laterali ci somministreranno i numeri delle combinazioni favorevoli all'evento ϕ nell' urna A dopo che si son terminate tutte le permutazioni. E se piace di aver le combinazioni contrarie, prima di aver trovate le favorevoli, il che qualche volta è più comodo, talmente si formeran le colonne degli eventi, che non si trovi mai all'ultima sede l' evento ϕ. Tutto ciò è chiarissimo, nè ha bisogno che vi ci fermiam sopra più lungamente.

23. Si domandi ora il numero delle combinazioni favorevoli ad aversi l'evento $n-2$ di bianche nell'urna A dopo che si sono eseguite due permutazioni. Scritte le colonne degli eventi successivi coll'avvertimento del §. precedente, e annessevi le laterali delle combinazioni, abbiamo

$$\begin{array}{ll|ll} n-2 & (n-1)^3 & n-1 & 2.(n-1) \\ n-2 & 4(n-2) & n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & (n-1)^2 & & \\ n-1 & 4 & & \end{array}$$

La terza colonna $n-2$ $(n-1)^2$, che ci era utile quando il problema era esposto nella prima maniera, qui ci è contraria, perchè non ci giova che sia riuscito $n-2$ nella prima permutazione, e ci fa danno il trovarsi l'evento $n-1$ alla fine della seconda. Dunque le combinazioni favorevoli all'evento $n-2$ dopo due permutazioni saranno $=4(n-1)^2(n-2)+2(n-1)^3$, e in conseguenza le contrarie $=n^4-4(n-1)^2(n-2)-2(n-1)^3$ $=n^4-6n^3+22n^2-26n+10$.

24. Vogliasi lo stesso evento $n-2$ dopo tre permutazioni. Per saper le combinazioni favorevoli che menano questo avvenimento, scriverem le colonne degli even-

ti a tre a tre con $n - 2$ all' ultima ſede, e le corriſpondenti colonne laterali.

Queſte ſono

$$\left.\begin{matrix} n & 1 \\ n-1 & n^2 \\ n-2 & (n-1)^2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & 2(n-1) \\ n-2 & (n-1)^2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} n-1 & 2(n-1) \\ n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix} \right| \begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & 4 \\ n-2 & (n-1)^2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-2 & 4(n-2) \\ n-2 & 4(n-2) \end{matrix} \left| \begin{matrix} n-2 & (n-1)^2 \\ n-3 & (n-2)^2 \\ n-2 & 9 \end{matrix} \right|$$

. Onde le combinazioni favorevoli ſono in tutto $n^2(n-1)^2 + 4(n-1)^4 + 8(n-1)^3$ $+ 4$ $(n-2) + 16(n-1)^2 (n-2)^2 = 42n^4 + 9 - 224n^3 + 446n^2 - 388n + 124$; e le contrarie $= n^6 - 42n^4 + 224n^3 - 446n^2 + 388n - 124$.

25. Chi avrà la pazienza di rintracciare i numeri delle combinazioni contrarie all' evento $n - 2$ dopo 4, 5 ecc. permutazioni, cominciando da $2n - 1$, che denota le combinazioni contrarie per una ſola permutazione, troverà la ſeguente ſerie;

perm. 1; perm. 2 perm. 3

$2n-1$; $n^4-6n^3+22n^2-26n+10$; $n^6-42n^4+224n^3-446n^2+388n-124$;

perm. 4 perm. 5

$n^8-320n^5+2360n^4-6968n^3+10192n^2-7320n+2056$; $n^{10}-2715n^6+26410n^5$ $-107591.n^4+232780.n^3-279700n^2+175664n-44848$; ecc.

26. Queſta ſerie diventa una ricorrente di ſecondo grado, ove pongaſi $n = 2$; i ſuoi termini ſono 3, 14, 52, 216, 848 ecc. i moltiplicatori, che la producono, 8, 2; e il termine generale $\frac{2^{m-1}}{3}(5.2^m + (-1)^m)$, ſignificando m il numero de' termini, oſſia delle permutazioni. Sicchè il numero generale delle combinazioni favorevoli ad averſi in A palle bianche $n - 2$, cioè neſſuna bianca, ſarà $2^{2m} - \frac{2^m - 1}{3}(5.2^m + (-1)^m)$. Per qualunque numero di permutazioni non può mai eſſer probabile il caſo, che non reſti in A alcuna palla bianca,

perchè sarebbe d'uopo, che uguagliandosi i numeri generali delle combinazioni favorevoli ed avverse, potesse risultare m reale e positivo. Con tale adeguamento siam guidati alla equazione $2^{m+1} + (-1)^m = 0$, che è impossibile ed assurda, nella supposizione che m sia un numero positivo o intero o rotto, o finito o infinito. Dunque ecc.

27. In genere però la nostra serie è una ricorrente di grado sicuramente superiore al quarto, atteso l' esperimento che ne ho fatto, e in conseguenza di difficil maneggio. Nondimeno essa, anzi il suo primo termine solo può bastare a far conoscere l'error Bernulliano. Si faccia l'ipotesi di $n = 4$, che dà $n - 2 = 2$. Poichè 2 è la metà delle palle bianche, che abbiamo, per la Teoria Bernulliana, partendosi dallo stato primitivo delle 3 bianche e 1 nera nell' urna A, sarà necessario permutare infinite volte, affinchè si renda probabile, che rimangano in A due bianche; ed ogni numero finito di permutazioni renderà improbabile questo avvenimento. Ma la probabilità d'un evento induce l'eguaglianza tra il numero delle combinazioni, che menano quell' evento, e il numero delle contrarie; e l' improbabilità dello stesso evento importa che il numero delle sue combinazioni favorevoli sia sempre minore del numero delle avverse. Dunque per qualunque finito numero di permutazioni, le combinazioni favorevoli ad aversi 2 bianche saranno meno delle contrarie. Veggasi ora che risulti dall' anzidetta serie. Fatto, come si è detto, $n = 4$, avremo per la prima permutazione combinazioni contrarie 7; per 2 permutazioni, 130; per 3 permutazioni, 1972 ecc. Ora essendo l' intero numero delle combinazioni di tutte le palle, per una permutazione $= 16$, per 2 permutazioni $= 256$, per 3 permutazioni $= 4096$ ecc., saranno le favorevoli per una permutazione $= 16 - 7 = 9$; per 2 permutazioni $= 256 - 130 = 126$; per 3 permutazioni $= 4096 - 1972$

$=2124$ ecc. Dunque tanto è lontano, che si esigano per la probabilità delle due bianche infinite permutazioni, che anzi, eseguita solo la prima, è più che probabile, che mi rimangano in *A* queste due bianche, avendo per me 9 combinazioni propizie contro 7 contrarie. Questo vantaggio di maggior probabilità, che mi manca in due permutazioni, perchè ho 126 combinazioni a favore, e 130 contro, mi ritorna nelle 3 permutazioni, e mi seguita per tutta la serie. Dunque ad indurre la probabilità per l'evento di due bianche, cioè a far nascere l'eguaglianza tra le combinazioni prospere e sinistre, vi vorrà un numero di permutazioni che sia medio o tra l' 1 e il 2, o tra il 2 e il 3, ma non già un numero infinito, come pretende il *Bernullio*.

28. Da tutto ciò parmi di poter concludere legittimamente, che il principio, di cui si serve il *Bernullio*, non è quello che dee presiedere alla soluzione del suo problema; che le altre sue formole eziandio, le quali dipendono dallo stesso principio, e corrispondono alle susseguenti ipotesi di più di due urne, debbono essere considerate come illegittime, e inducenti ad errore; in una parola, che il problema delle schedole è di una natura ben differente da quello de' fluidi, e va trattato in una maniera molto diversa dalla Bernulliana.

29. Ricusata come insussistente la risoluzione del Geometra di Basilea, potrebbe parere ad alcuno, che io non potessi dispensarmi dal sostituirvi la vera; ed io pur veggo, che ciò sarebbe assai conveniente; ma nè le mie occupazioni, nè il tempo prescritto dall' illustre Raccoglitore delle presenti Memorie alla edizione di questo primo Tomo mi han permesso di applicarmi col comodo necessario ad una indagine, che debb' essere d' un' estrema difficoltà. Potrebbesi però valutare come opera in qualche maniera satisfattoria dell' obbligo ch' m' impone la critica fatta al nostro celebre Autore, il presentarmi in questo Libro colla soluzione del problema accennato

accennato al §. 17, il quale con poca differenza dal Bernulliano è ſtato da me immaginato anche prima di leggere il Tomo XIV. de' *Comm. di Pietroburgo*; dimenticato poi ne' miei quaderni ſtava aſpettando la mia reminiſcenza e l' occaſione di veder la pubblica luce. Queſt' è quello che or m' accingo di fare, ſperando che il metodo, di cui mi ſervo, poſſa eſſer utile a chi prendeſſe per le mani o il problema del *Bernoulli*, od altri che gli ſian ſimili. Se queſto metodo non è sì ſemplice, come avrei deſiderato, varrà a ſcuſarmene la difficoltà d' un queſito, che è del numero di que' problemi di probabilità, che ſi chiamano di eventi dipendenti, ordinariamente aſſai più ſcabroſi e intralciati de' problemi di eventi indipendenti, i quali ſpeſſo ſomminiſtran formole elegantiſſime e non ſperabili in quelli dell'altra claſſe.

30. Siano dunque due urne A, B, ciaſcuna delle quali abbia palle n, la prima bianche, la ſeconda nere. Ridotto lo ſtato delle palle colla prima operazione ad eſſer queſto che chiamerem primitivo; bianche in $A = n - 1$; nere $= 1$, e al contrario in B, ſi cercano le combinazioni favorevoli e contrarie ad averſi nell' urna A un dato numero di palle bianche dentro un dato numero di permutazioni. Per procedere con ordine, comincio dal

PROBLEMA I.

31. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in* A *con una ſola permutazione palle bianche* $n - 2$.

Poichè ſon tre ſoli i caſi di bianche in A, che poſſono aver luogo; primo che torni $n - 1$; ſecondo che ſi rimetta n; terzo che rimangano $n - 2$; i caſi contrarj ſaranno i due primi; $n - 1$, n. Ma pel Lemma, fatto in eſſo $p = 1$, all' evento $n - 1$ corriſpondono combinazioni $2(n - 1)$, e all' evento n combinazio-

ni 1. Dunque il numero delle combinazioni contrarie all'evento $n-2$ in una ſola permutazione ſarà $2(n-1)+1$.

PROBLEMA II.

32. *Si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad averſi in A palle bianche* n—2 *o nell' una o nell' altra di due conſecutive permutazioni.*

Notiamo le colonne degli eventi contrarj e delle riſpettive combinazioni, com'è ſtato avvertito al §. 23.

$$\begin{array}{ll|ll|ll|} n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \end{array}.$$

Fatti perciò i prodotti de' numeri delle combinazioni in ciaſcuna colonna, ſaprem ſubito, eſſere il numero totale delle combinazioni contrarie; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$.

PROBLEMA III.

33. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in A palle bianche* n — 2 *nel caſo di tre conſecutive permutazioni.*

Tutto ſi riduce a notar le doppie colonne per gli eventi infauſti, ſenza ommetterne alcuna. Pel noſtro problema eſſe ſon le ſeguenti;

$$\begin{array}{ll|ll|ll} n & 1 & n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \\ n & 1 & n-1 & 2(n-1) & n & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll} n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) \\ n & 1 & n-1 & 2(n-1) \\ n-1 & n^2 & n-1 & 2(n-1) \end{array}.$$

Dunque il numero delle combinazioni contrarie è $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$.

PROBLEMA IV.

34. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in A palle bianche* n — 2 *nel corſo di quattro conſecutive permutazioni.*

Fatte al solito le colonne per gli avvenimenti sinistri, esse risultano così.

n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2

$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$

dalle quali si rileva, essere il numero delle combinazioni contrarie; $n^4 + 4n^2(n-1) + 12n^2(n-1)^2 + 8(n-1)^3 + 16(n-1)^4$.

PROBLEMA V.

35. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *palle bianche* n — 2 *nel corso di cinque consecutive permutazioni.*

Ecco le 13 colonne insiem colle laterali, che ci presentano la soluzione di questo Problema.

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1
n	1	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2
$n-1$	n^2	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	n	1	$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	n	1	n	1

$n-1$	$2(n-1)$	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$
n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1	$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	n^2	n	1

$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$
$n-1$	$2(n-1)$

I prodotti de' numeri delle laterali somministrano le combinazioni contrarie con questa formola; $n^4+6n^4(n-1)+12n^2(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4+32(n-1)^5$.

36. Ponghiam per ordine le combinazioni contrarie dalla prima fino alla quinta permutazione, e ci nascerà questa serie; $1+2(n-1)$; $n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$; $n^2+4n^2(n-1)+4(n-1)^2+8(n-1)^3$; $n^4+4n^2(n-1)+12n^2(n-1)^2+8(n-1)^3+16(n-1)^4$; $n^4+6n^4(n-1)+12n^2(n-1)^2+32n^2(n-1)^3+16(n-1)^4+32(n-1)^5$; ecc., la quale è una ricorrente di secondo grado; e i suoi moltiplicatori sono $2(n-1)$; n^2, cosicchè il primo $2(n-1)$ sia quello che moltiplica il termine antecedente al termine ricercato. Intendendo che la suddetta serie sia continuata anteriormente, supponiamo che siano u, t due termini innanzi al primo $1+2(n-1)$. Sarà dunque $n^2t+2(n-1)+4(n-1)^2=n^2+2(n-1)+4(n-1)^2$, ovvero, eliminate le quantità che si distruggono; $n^2t=n^2$, cioè $t=1$. In oltre avremo $n^2u+2(n-1)=1+2(n-1)$, ovvero $u=\frac{1}{n^2}$. Onde i due termini innanzi al primo sono $\frac{1}{n^2}$; 1; e questi si denomineranno in appresso l' appendice della serie.

37. Divien facile in questa serie il passar dai moltiplicatori al termine generale. Poichè ella è di secondo grado, chiamato m il numero de' termini o delle permutazioni, il suo termine generale veste questa forma; ap^m+bq^m. Ora la teoria delle ricorrenti c' insegna, che vagliono queste due equazioni; $p+q=2(n-1)$; $-pq=n^2$, dalle quali si trae $p=n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$; $q=n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}$. Sostituiti pertanto questi valori nel termine generale, si fa esso

$$a\left(n-1+\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m+b\left(n-1-\sqrt{((n-1)^2+n^2)}\right)^m.$$

Per la determinazione poi delle ſpecie a, b, farem ſucceſſivamente le due ipoteſi di $m = 1$, e di $m = 2$. Colla prima dovrà eſſere $a\left(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right) + b\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right) = 1 + 2(n-1)$; e colla ſeconda; $a\left(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^2 + b\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^2 = n^2 + 2(n-1) + 4(n-1)^2$. Queſte due equazioni ci fanno conoſcere i valori delle due ſpecie a, b, e ſi trova
$$a = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} + n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}; \quad b = \frac{\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} - n}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}},$$
così che il numero indefinito delle combinazioni contrarie ad averſi in A palle bianche $n - 2$ almeno in una delle permutazioni m diverrà
$$= \frac{\left(\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} + n\right)\left(n - 1 + \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}$$
$$+ \frac{\left(\sqrt{((n-1)^2 + n^2)} - n\right)\left(n - 1 - \sqrt{((n-1)^2 + n^2)}\right)^m}{2\sqrt{((n-1)^2 + n^2)}}.$$
Se queſto per comodo ſi chiami P, ſi avrà a un tratto il numero indefinito delle combinazioni favorevoli, che ſarà $n^{2m} - \Upsilon$, onde inſtituita l' equazione $n^{2m} - \Upsilon = \Upsilon$, oſſia $n^{2m} = 2\Upsilon$, il valore di m eſatto o proſſimo eſprimerà il numero delle permutazioni che domandar ſi debbono, affinchè ſi poſſa ſcommettere eſattamente o proſſimamente in pari, che almeno in una di eſſe avrà luogo l' evento $n - 2$.

38. Ciò però ſi può ancora ottenere nelle diverſe ipoteſi numeriche de' valori di n collo ſcrivere una ſotto l' altra le ſerie delle combinazioni favorevoli e contrarie, ſenza ricorrere ai termini generali. Sia $n = 2$; in tale ipoteſi ſono i quattro primi termini delle combinazioni contrarie; 3, 10, 32, 104 ecc. e i corriſpondenti delle favorevoli 1, 6, 32, 152 ecc. In queſte due ſerie i terzi termini ſono eguali. Dunque ſono eſattamente tre le permutazioni, che menano probabilmente una volta l' evento di bianche $n - 2$, oſſia di

bianche zero nell' urna A. Sia $n = 3$. Le due ſerie per queſta ipoteſi ſono 5, 29, 161 ecc. Per una ſola per-
4, 52, 568 ecc.
mutazione ho 5 combinazioni contrarie e 4 favorevoli; per due ne ho 52 di favorevoli e 29 di contrarie; conſeguentemente giocando in pari, ho danno ſe domando una ſola permutazione, e vantaggio ſe ne domando due; il che vuol dire, che il numero di permutazioni atto a render probabile l' evento $n - 2$ oſſia 1 di bianche è medio tra l' uno e il due.

PROBLEMA VI.

39. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi in* A *palle bianche* n — 3 *in una ſola permutazione*.

Poichè lo ſtato primitivo dell' urna A è di racchiuder bianche $n - 1$, ſi vede ſubito, che in una ſola permutazione non è poſſibile di paſſare allo ſtato di bianche $n - 3$; e però tutte le combinazioni delle palle, che ſono n^2, ci diventan contrarie, e il numero delle favorevoli ſarà $= 0$.

PROBLEMA VII.

40. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *palle bianche* n — 3 *o nell' una o nell' altra di due permutazioni*.

Tutti gli accoppiamenti degli eventi contrarj all' evento $n - 2$ di bianche in due permutazioni ſono anche contrarj all' evento $n - 3$. In oltre tutti gli accoppiamenti favorevoli ad ottener bianche $n-2$ in due permutazioni, detratti quelli, ne' quali entra l' evento $n - 3$, ſon pur contrarj a queſt' ultimo avvenimento. Ma in una ſola maniera può aſſociarſi $n - 2$ con $n-3$, che è queſta: $n - 2$, cui corriſponde di combinazioni

$n - 3$

$(n-1)^2$. Dunque la somma delle combinazioni con-
$(n-2)^2$

trarie e favorevoli pel caso di bianche $n-2$ in due permutazioni, meno il prodotto $(n-1)^2(n-2)^2$ darà la somma delle contrarie all' avvenimento $n-3$. Ma la somma delle contrarie e favorevoli per bianche $n-2$ in due permutazioni è n^4. Dunque le contrarie pel caso di $n-3$ sono $n^4-(n-1)^2(n-2)^2$, ovvero $6n^3-13n^2+12n-4$.

PROBLEMA VIII.

41. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corso di tre permutazioni.*

Ragionando, come abbiam fatto pel precedente Problema, concluderemo, che il numero delle combinazioni contrarie da noi ricercato sarà eguale a n^6 meno i prodotti delle combinazioni, che corrispondono alle colonne degli eventi, ne' quali entra $n-3$; le quali unite alle laterali son le seguenti;

$n-1$ $2(n-1)$	$n-2$ $(n-1)^2$	$n-2$ $(n-1)^2$	$n-2$ $(n-1)^2$	$n-2$ $(n-1)^2$
$n-2$ $(n-1)^2$	$n-2$ $4(n-2)$	$n-3$ $(n-2)^2$	$n-3$ $(n-2)^2$	$n-3$ $(n-2)^2$
$n-3$ $(n-2)^2$	$n-3$ $(n-2)^2$	$n-2$ 9	$n-3$ $6(n-3)$	$n-4$ $(n-3)^2$.

Il perchè le combinazioni contrarie diventano in tutto

$$n^6-2(n-1)^3(n-2)^2-4(n-1)^2(n-2)^3-9(n-1)^2(n-2)^2-6(n-1)^2(n-2)^2(n-3)-(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2,$$

ovvero $33n^4-126n^3+198n^2-144n+40$.

PROBLEMA IX.

42. *Si cercano le combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta in* A *bianche* n — 3 *nel corso di quattro permutazioni.*

Sono 20 le colonne laterali a quelle degli eventi, in cui entra $n-3$, le quali ci somministrano i prodotti che si debbon sottrarre da n^8 per determinare le com-

binazioni contrarie richieste dal presente problema. Eccole per ordine:

n	1	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-1$	n^2	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	4	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-1$	4

$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	9	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-1)^2$

$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-1$	$2(n-1)$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$4(n-2)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$
$n-2$	9	$n-3$	$6(n-3)$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$	$n-3$	16

$n-2$	$(n-1)^2$	$n-2$	$(n-2)^2$
$n-3$	$(n-2)^2$	$n-3$	$(n-2)^2$
$n-4$	$(n-3)^2$	$n-4$	$(n-3)^2$
$n-4$	$8(n-4)$	$n-5$	$(n-4)^2$

Si trarrà quindi, dopo la riduzione de' termini, il numero delle combinazioni contrarie $= 176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$.

43. Andando innanzi colla ricerca, ci verrà fatto di scoprire, che preso cominciamento dalla prima del Problema VI., le quattro formole ritrovate; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$; $33n^4 - 126n^3 + 198n^2 - 144n + 40$; $176n^5 - 943n^4 + 2132n^3 - 2484n^2 + 1472n - 352$; sono i 4 primi termini di una ricorrente di terzo grado, i cui moltiplicatori posti ordinatamente sono; $6n - 10$; $-3n^2 + 16n - 12$; $-4n^3 + 8n^2$. Questa serie pure avrà l'appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1 innanzi al primo così che la serie coll' appendice sarà $\frac{1}{n^2}$; 1; n^2; $6n^3 - 13n^2 + 12n - 4$. ecc.

PROBLEMA

PROBLEMA X.

43. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 4 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Conſidero queſto Problema in tutta la ſua generalità, non potendoſi più ignorare dopo gli eſempj de' ſuperiori Problemi, come ſi debba procedere anche qui per inveſtigare le combinazioni contrarie che ſpettano alle ipoteſi di 1, 2, 3 ecc. permutazioni. Io le ho partitamente eſaminate ſino a quel ſegno che mi faceva conoſcere la legge della ſerie, della quale noto i primi 4 termini.

per permut.
1; n^2
2; n^4
3; $12n^5 - 58n^4 + 144n^3 - 193n^2 + 132n - 36$
4; $114n^6 - 888n^5 + 3159n^4 - 6216n^3 + 6952n^2 - 4128n + 1008$.

Queſta ſerie è una ricorrente di 4.° grado, i ſuoi moltiplicatori ſono;
$12n - 28$: $-30n^2 + 148n - 156$; $-4n^3 - 52n^2 + 216n - 144$; $15n^4 - 84n^3 + 108n^2$; ed ammette l' appendice de' due termini $\frac{1}{n^2}$, 1, che vanno avanti al primo termine n^2.

PROBLEMA XI.

44. *Si cercano le combinazioni contrarie ad averſi almeno una volta in* A *bianche* n — 5 *nel corſo di qualſivoglia numero di permutazioni.*

Se ſi farà l'eſame di queſta ipoteſi colle regole ſopra indicate, ſi troverà una ſerie di combinazioni contrarie, che è una ricorrente di quinto grado, di cui queſti ſono per ordine i cinque moltiplicatori.

$20n - 60$; $-110n^2 + 660n - 908$; $140n^3 - 1460n^2 + 4376n - 3696$; $95n^4 - 340n^3 - 1124n^2 + 4608n - 2880$; $-56n^5 + 640n^4 - 2208n^3 + 2304n^2$: e i cinque primi termini; n^2; n^4; n^6; $20n^7 - 170n^6 + 800n^5 - 2273n^4 + 3980n^3 - 4180n^2 + 2400n - 576$; $290n^8 - 3800n^7 + 23927n^6 - 89480n^5 + 211800n^4 - 320000n^3 + 298224n^2 - 155520n + 34560$ ecc. Qui pure ha luogo la ſolita appendice $\frac{1}{n^2}$, 1.

45. Riandando quel che s'è detto dal §.31. fino ad ora ſi raccoglie primo, che tanto è il grado della ricorrente delle combinazioni contrarie, quanto, principiando da 2, è il numero delle bianche, che ſi vogliono eſtratte dalla prim' urna nel decorſo di qualſiſia numero di permutazioni; ſecondo, che avendo tutte queſte ſerie al principio alcuni termini che ſi ſuccedono in ſerie geometrica continua, ſe vi aggiungerem l'appendice, tanti ſaranno i termini geometricamente proporzionali, quanto è il grado della ſerie delle combinazioni contrarie, vale a dire quanti ſono i ſuoi moltiplicatori. Onde, conoſciuta che foſſe la legge generale de' moltiplicatori per la ipoteſi indeterminata di palle bianche reſidue $n - z - 1$, ſiccome il numero de' moltiplicatori ſpettanti alla ricorrente di queſto evento indefinito è appunto $z + 1$, e i termini della ſerie geometrica dal primo $\frac{1}{n^2}$ dell' appendice fino all' ultimo n^{2z-2} ſon pur eſſi $z + 1$, non vi ſarebbe biſogno di formar colonna alcuna degli eventi (la qual coſa è moleſtiſſima; e atteſo il numero grandiſſimo di queſte colonne, quando creſce il numero delle permutazioni, fa ſempre rimaner col dubbio di averle notate tutte), e baſterebbero i moltiplicatori inſiem coi termini della ſerie geometrica per inveſtigare i ſuſſeguenti termini delle noſtre ſerie. Laonde a queſto ſcopo dobbiam dirigere le noſtre

meditazioni ; e il Problema che c' importa di scioglie-
re è il seguente.

PROBLEMA XII.

46. *Dato il numero* $n - z - 1$ *di palle bianche, che si vogliono almeno una volta rimaste nell' urna* A *pel corso di qualsisia numero di permutazioni, trovar la serie generale delle combinazioni contrarie, ovvero determinare i suoi moltiplicatori, che sono* $z + 1$ *di numero, e unitamente alla parte geometrica* $\frac{1}{n^2}, 1, n^2, n^4 \ldots\ n^{2z-2}$ *della serie generale servono a far nascere tutti i suoi termini susseguenti.*

Per darne la soluzione, fa di mestieri mettersi sott'occhio i moltiplicatori che corrispondono alle ipotesi de' precedenti problemi, onde agevolarsi l' indagine della legge, con cui procedono. Eccoli qui disposti con ordine.

Per bianche residue $n-2$; 1.° moltip. $2n-2$; 2.° n^2
b. r. $n-3$; 1.° m. $6n-10$; 2.° $-3n^2+16n-12$; 3.° $-4n^3+8n^2$
b. r. $n-4$; 1.° m. $12n-28$; 2.° $-30n^2+148n-156$;
3.° $-4n^3-52n^2+216n-144$; 4.° $15n^4-84n^3+108n^2$
b. r. $n-5$; 1.° m. $20n-60$; 2.° $-110n^2+660n-908$;
3.° $140n^3-1460n^2+4376n-3696$;
4.° $95n^4-340n^3-1124n^2+4608n-2880$;
5.° $56n^5+640n4-2208n^3+2304n^2$.

47. Diamo a questi moltiplicatori un'altra forma equivalente, che risulta dal lasciare le formole de' prodotti nati dalle colonne laterali così come stanno, senza ridurle al netto; del che si vede un esempio ne' primi cinque problemi. La nuova forma è questa.

Per bianche residue $n-2$ 1° moltip. $2(n-1)$
2° n^2
b.r. $n-3$ 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)$
2.° $-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-4n^2(n-2)$

b.r. n-4. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)$

2.° $-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)+9(n-2)^2-8(n-1)(n-2)+4(n-1)^2+n^2$

3.° $-6n^2(n-3)-24(n-1)^2(n-3)+48(n-1)(n-2)(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$

4.° $24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

b.r. n-5. 1.° m. $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)+8(n-4)$

2.° $-48(n-3)(n-4)-32(n-2)(n-4)-16(n-1)(n-4)+16(n-3)^2-24(n-2)(n-3)-12(n-1)(n-3)--8(n-1)(n-2)+9(n-2)^2+4(n-1)^2+n^2$

3.° $192(n-2)(n-3)(n-4)+96(n-1)(n-3)(n-4)-72(n-2)^2(n-4)+64(n-1)(n-2)(n-4)--32(n-1)^2(n-4)-8n^2(n-4)-64(n-2)(n-3)^2-32(n-1)(n-3)^2+48(n-1)(n-2)(n-3)-24(n-1)^2(n-3)-6n^2(n-3)-18(n-1)(n-2)^2-4n^2(n-2)$.

4.° $48n^2(n-3)(n-4)+192(n-1)^2(n-3)(n-4)-384(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\div144(n-1)(n-2)^2(n-4)+32n^2(n-2)(n-4)(n-4)+128(n-1)(n-2(n-3)^2-64(n-1)^2(n-3)^2-16n^2(n-3)^2+24n^2(n-2)(n-3)-9n^2(n-2)^2$

5.° $-192n^2(n-2)(n-3)(n-4)+72n^2(n-2)^2(n-4)+64n^2(n-2)(n-3)^2$.

48. Le suddette formole col porre a maggior comodo $n-1=a$; $2(n-2)=b$; $3(n-3)=c$; $4(n-4)=d$, ecc.; $n^2=p^2$; $4(n-1)^2=q^2$; $9(n-2)^2=r^2$; $16(n-3)^2=t^2$, ecc. si trasformano in quest' altre.

Per bianche residue $n-2$; 1.° moltip. $2a$

2.° p^2

b. r. $n-3$; 1.° m. $2a+2b$

2.° $-2b(2a)+p^2+q^2$

3.° $-2bp^2$

b. r. $n-4$; 1.° m. $2a+2b+2c$

2.° $-2c(2a+2b)-4ab+p^2+q^2+r^2$

3.° $2c(4ab-p^2-q^2)-2bp^2-2ar^2$

4.° $2c(2bp^2)-p^2r^2$

b. r. $n-5$; 1.° m. $2a+2b+2c+2d$

2.° $-2d(2a+2b+2c)-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2+t^2$

3.° $2d(4bc+4ac+4ab-p^2-q^2-r^2)+8abc-2cp^2$
$-2cq^2-2bp^2-2ar^2-2at^2-2bt^2$

4.° $2d(-8abc+2cp^2+2cq^2+2bp^2+2ar^2)+4bcp^2$
$-p^2r^2-p^2t^2-q^2t^2+4abt^2$

5.° $2d(-4bcp^2+p^2r^2)+2bp^2t^2$.

49. La legge, con cui procedono i primi moltiplicatori, è per sè chiarissima, dovendo ciascun d'essi comprendere tanti termini della serie $2a$, $2b$, $2c$ ecc., ovver della serie $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)$ ecc.$)$, quanto è il grado della ricorrente che appartiene alla data ipotesi diminuito di un'unità. Volendosi pertanto il primo moltiplicatore per l'evento di b. r. $n-6$, ci verrà esso somministrato dalla formola $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5))$. Così per b. r. $n-7$ sarà $=2(n-1+2(n-2)+3(n-3)+4(n-4)+5(n-5)+6(n-6))$; e generalmente per l'ipotesi di b. r. $n-z-1$ avremo il primo moltiplicatore $=$ $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots z(n-z))$.

50. Rispetto ai secondi moltiplicatori, di ciascun di essi ne faremo due parti: la prima verrà composta dall'aggregato di tutti que' termini, ne' quali entra l'ultimo termine del primo moltiplicatore corrispondente; la seconda parte formerassi da tutti i termini rimanenti. Voglionsi per esempio b. r. $n-3$? La prima parte del secondo moltiplicatore notato al §. 48. sarà $-2b(2a)$; l'altra p^2+q^2. Così per l'ipotesi di bianche $n-4$, questa prima parte sarà $-2c(2a+2b)$, e la seconda $-4ab+p^2+q^2+r^2$. Un leggiero esame poi di queste prime parti per le 4 ipotesi del §. 48. ci farà conoscere, che s'uguagliano esse al prodotto negativo dell'ultimo termine del primo moltiplicatore moltiplicato nel primo moltiplicatore dell'ipotesi immediatamente precedente. Onde, chiamato il primo general moltiplicatore $2(n-1+2(n-2)+3(n-3)\ldots z(n-z))$

$= \alpha$, e quello della proſſima antecedente ipoteſi, cioè $2(0 + n - 1 + 2(n-2) \ldots (z-1)(n-z+1)) = \alpha'$, ſi potrà eſprimere queſta prima parte in genere colla ſeguente formola; $-2z(n-z)(\alpha')$.

51. Per le ſeconde parti rifletteremo, che la ſerie de' quadrati p^2, q^2, r^2, t^2 ecc., ovvero n^2, $4(n-1)^2$, $9(n-2)^2$, $16(n-3)^2$, $25(n-4)^2$ ecc., ha per termine generale $z^2(n-z+1)^2$; in oltre, che ciaſcuna di queſte ſeconde parti è compoſta di tutto il ſecondo moltiplicatore, che conviene all'ipoteſi del proſſimo evento anteriore e del quadrato, che immediatamente ſuccede nella ſerie de' quadrati $p^2 + q^2$ ecc., che entrano nella formazione dello ſteſſo precedente ſecondo moltiplicatore. Così al §. 48. per l' evento $n-3$, la noſtra ſeconda parte è $p^2 + q^2$, cioè tutto il ſecondo moltiplicatore per l' evento $n-2$ con di più il quadrato q^2, che nella ſerie de' quadrati tien dietro immediatamente a p^2. Per l' evento $n-4$, la ſeconda parte è $-4ab + p^2 + q^2 + r^2$, i tre primi termini della quale ſono preciſamente il ſecondo moltiplicatore $-2b(2a) + p^2$ q^2 per l' ipoteſi $n-3$, e l' ultimo r^2 è il quadrato che ſeguita in ordine q^2; e lo ſteſſo dicaſi per gli altri eventi. Sicchè chiamando generalmente γ il ſecondo moltiplicatore, che compete all' evento $n-z-1$, e γ' il ſecondo moltiplicatore, che ſpetta al precedente evento $n-z$, ſarà queſta ſeconda parte $= \gamma' + z^2(n-z+1)^2$; e tutto il ſecondo moltiplicatore

$$\gamma = -2z(n-z)\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2.$$

52. Vengo ai terzi moltiplicatori, pei quali ſtabiliſco la ſeguente regola cavata dall' eſame delle quattro ipoteſi ordinate nel §. 48, e da altre di più ſulle quali ho inſtituito i miei calcoli. Sia α il primo moltiplicatore generale, che corriſponde all' ipoteſi dell' evento $n-z-1$; β il ſecondo, e γ ſia il terzo che domandiamo. Oltracciò rappreſenti α' il primo moltiplicatore, che appartiene all' ipoteſi dell' evento immediatamen-

te precedente $n-z$, e α'' il primo moltiplicatore che risguarda l' evento antepenultimo $n-z+1$. Così esprima β' il secondo moltiplicatore spettante al penultimo evento $n-z$; e per lo stesso evento $n-z$ sia γ' il terzo moltiplicatore. Dico che sarà $\gamma=-2z(n-z)\beta'+\gamma'-z^2(n-z+1)^2(\alpha'')$. Prendiamo in mano l' ipotesi del secondo evento $n-3$, che ha per terzo moltiplicatore $-2bp^2$. Poichè in tale supposizione il primo moltiplicatore è $2a+2b$; il secondo, $-4ab+p^2+q^2$, sarà $\alpha=2a+2b$; $\alpha'=2a$; $\alpha''=0$. Similmente $\beta=-4ab+p^2+q^2$; $\beta'=p^2$, e $\gamma'=0$, perchè appunto nell' ipotesi precedente $n-2$ non abbiam terzo moltiplicatore. Sostituendo pertanto nel superior canone questi valori, avrem $\gamma=-2(n-2).2p^2+0-4(n-1)^2(0)$, cioè, surrogando b invece di $2(n-2)$; $\gamma=-2bp^2$. Per l' evento $n-4$ diventa $\alpha=2a+2b+2c$; $\beta=-4ab-4ac-4bc+p^2+q^2+r^2$, onde $\alpha'=2a+2b$; $\alpha''=2a$; $\beta'=-4ab+p^2+q^2$, e $\gamma'=-2bp^2$, tale essendo appunto il terzo moltiplicatore per la precedente ipotesi dell' evento $n-3$. Quindi sarà $\gamma=-3(n-3)(-8ab+2p^2+2q^2)-2bp^2-9(n-2)^2(2a)$, ovvero (ponendo c in luogo di $3(n-3)$, e r^2 in luogo di $9(n-2)^2$) $\gamma=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$, come s'è ritrovato.

53. Questa corta ed elegante regola ha il vantaggio della massima generalità; ed ove α, β rappresentino i moltiplicatori che per ordine precedono γ, serve non solo per l' investigazione de' terzi, ma eziandio de' quarti, quinti ecc. moltiplicatori. Si voglia il quarto moltiplicatore γ, che corrisponde all' evento $n-4$. Dovendo essere α, β i due moltiplicatori antecedenti, sarà pel §. 48. $\alpha=-4bc-4ac-4ab+p^2+q^2+r^2$; $\beta=8abc-2cp^2-2cq^2-2bp^2-2ar^2$; $\alpha'=-4ab+p^2+q^2$; $\alpha''=p^2$; $\beta'=-2bp^2$; $\gamma'=0$. Quindi $\gamma=-3(n-3)(-4bp^2)-9(n-2)^2p^2$, ossia $\gamma=4bcp^2-p^2r^2$. Si domandi il quinto moltiplicatore γ, che ap-

partiene all' evento $n-5$. In tal caſo ſarà $\alpha = 8bcd + 8acd + 8abd - 2dp^2 - 2dq^2 - 2dr^2 + 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2 - 2bt^2 - 2at^2$; $\beta = -16abcd + 4cdp^2 + 4cdq^2 + 4bdp^2 + 4adr^2 + 4bcp^2 - p^2r^2 - p^2t^2 - q^2t^2 + 4abt^2$; $\alpha' = 8abc - 2cp^2 - 2cq^2 - 2bp^2 - 2ar^2$; $\alpha'' = -2bp^2$; $\beta' = 4bcp^2 - p^2r^2$, e $\gamma' = 0$. Onde in virtù della regola $\gamma = -4(n-4)(8bcp^2 - 2p^2r^2) - 16(n-3)^2(-2bp^2)$, cioè $\gamma = -8bcdp^2 + 2dp^2r^2 + 2bp^2t^2$, come debbe eſſere.

54. Adattiamo la teoría ad un eſempio, e facciam vedere in pratica, come dato il numero totale delle palle bianche, e domandato un certo evento di bianche che deon rimanere nell' urna, ſi poſſano per mezzo della noſtra regola rintracciare con ſufficiente ſpeditezza i moltiplicatori della ricorrente delle combinazioni contrarie, e determinar quindi il numero delle permutazioni, che ſono neceſſarie per render probabile l' evento dato. Sia il numero delle palle bianche $n = 8$, e ſi cerchino i moltiplicatori della ricorrente, che compete all' evento nell' urna di bianche reſidue 4. In queſto caſo conviene eſaurire i tre eventi $n-2=6$, $n-3=5$, $n-4=4$. Cominciando dal primo $n-2$, e richiamando alla memoria, che $a = n-1$, $b = 2(n-2)$, $c = 3(n-3)$, cioè $a = 7$, $b = 12$, $c = 15$; e che $2a$ è il primo moltiplicatore per l' evento $n-2=6$; $2a + 2b$ pel ſecondo evento $n-3=5$; $2a + 2b + 2c$ pel terzo $n-4=4$, ſaprem toſto aſſegnare a ciaſcuno di queſti eventi il primo reſpettivo moltiplicatore, e tutti e tre per ordine ſaranno, come nell' anneſſa figura, 7.2, 19.2, 17.2^2.

b.r. 6. 1.° molt.	7.2	b.r. 5. 1.° m.	19.2	b.r. 4. 1.° m.	17.2^2
2.°	2^6	2.°	-19.2^2	2.°	-223.2^2
		3.°	-3.2^9	3.°	-237.2^4
				4.°	99.2^8

Ripigliati poi i canoni $\gamma = -2z(n-z).\alpha' + \gamma' + z^2(n-z+1)^2\gamma = -2z(n-z).\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2.\alpha''$, il

il primo de' quali serve per ritrovare i secondi moltiplicatori, e il secondo per ritrovar gli altri, discorreremo così. Pel primo evento di b. r. 6 abbiam $z=1$, $\alpha=7.2$, $\alpha'=0$, $\gamma'=0$. Dunque il secondo moltiplicatore γ sarà ridotto alla formola $z^2(n-z+1)^2$, ossia coi valori di $n=8$, $z=1$; $\gamma=2^6$. Pel secondo evento di b. r. 5 diventa $z=2$, $\alpha=19.2$, $\alpha'=7.2$, $\gamma'=2^6$; e però il secondo moltiplicatore γ si fa $= -4.6.7.2+2^6+4.49=-19.2^2$. Pel terzo evento poi di b. r. 4 divien $z=3$, $\alpha=17.2^2$; $\alpha'=19.2$; $\gamma'=-19.2^2$; onde il secondo moltiplicatore $\gamma=-6.5.19.2-19.2^2+9.36=-223.2^2$. Si passi ora ai terzi moltiplicatori, e si dia principio dalla seconda ipotesi, giacchè la prima ne è priva. Poichè α, β deon essere i due moltiplicatori immediatamente precedenti al terzo che cerchiamo, sarà $\alpha=19.2$, $\beta=-19.2^2$; per conseguenza $\alpha'=7.2$, e (non avendovi ipotesi superiore alla prima di b. r. 6) $\alpha''=0$. Di più $\beta'=2^6$; $\gamma'=0$. Laonde, introdotti questi valori nel secondo de' suddetti canoni, risulterà il terzo moltiplicatore $\gamma=-4.6.2^6=-3.2^9$. Alla terza ipotesi di b. r. 4 corrispondono questi valori; $z=3$, $\alpha=17.2^2$; $\beta=-223.2^2$; $\alpha'=19.2$; $\alpha''=7.2$; $\beta'=-19.2^2$; $\gamma'=-3.2^9$, che fanno nascere il terzo moltiplicatore $\gamma=6.5.19.2^2-3.2^9-9.36.7.2$, ovvero $\gamma=-237.2^4$. Non restando presentemente altro che il quarto moltiplicatore della terza ipotesi, perchè esso manca nelle altre due, sarà, per quest'ultima indagine, $\alpha=-223.2^2$; $\alpha'=-19.2^2$; $\alpha''=2^6$; $\beta=237.2^4$; $\beta'=-3.2^9$; $\gamma'=0$, e $z=3$. Dunque il quarto moltiplicatore $\gamma=6.5.3.2^9-9.36.2^6=99.2^8$.

55. Conosciuti i quattro moltiplicatori per l' evento di b. r. 4, rimane che si trovino i termini della serie contraria, di cui coll'ajuto dell'appendice ci son noti i quattro primi termini $\frac{1}{2^6}$, 1, 2^6, 2^{12}, che osservano

la proporzione geometrica. Ponghiam fotto ad effi i quattro moltiplicatori, come nella prefente figura;

$\frac{1}{2^6}$, 1, 2^6, 2^{12} 54511.2^2, 684751.2^4, 38988839.2^4, 498813699.2^6

0, 0, 11025.2^2, 363825.2^4, 28120025.2^4, 574928125.2^6.

99.2^8, -237.2^4, -223.2^2, 17.2^2

E facciam poi giufta la regola delle ricorrenti le folite moltiplicazioni. Effe ci daranno il quinto termine $=$ 54511.2^2, il fefto $= 684751.2^4$, il fettimo $= 38988839.2^4$, l'ottavo $= 498813699.2^6$ ecc. Per non andare innanzi fenza propofito, farà bene aver prefente ciò che abbiamo avvertito al §. 15. ful numero totale delle combinazioni di tutte le palle nelle diverfe permutazioni per potere, ad ogni termine della ricorrente delle combinazioni contrarie, fcriver fotto di mano in mano l'analogo nella ferie delle favorevoli. Così nel cafo noftro fi vedrà, che ai termini della ferie contraria, principiando da 2^6 che è realmente il primo fino al termine 498813699.2^6 corrifpondono nella favorevole i termini 0; 0; 11025.2^2; 363825.2^4; 28120025.2^4; 574928125.2^6. Ora ne' termini antecedenti al fefto le combinazioni avverfe fon fempre in numero maggiore delle propizie, ma quefte nel fefto eccedon le prime, e queft' eccefso, come fe ne può far l'efperienza, va fempre più crefcendo ne' termini fuffeguenti. Dunque farebbe cofa inutile l'andar più oltre nelle ferie, avendofi già tanto che bafta per concludere, che il numero delle permutazioni neceffarie a render probabile l'evento di ridurfi nella prim' urna alla metà di tutte le palle bianche, è un numero medio tra il 5 e il 6, non contando già, come abbiam fatto fempre, la prima operazione, che di 8 bianche che erano ne fa rimaner fette. Io mi accofterò più al giufto, fe domando fei permutazioni piuttofto che cinque, perchè le combinazioni finiftre, e le utili in cinque permutazioni ftanno fra lo-

ro :: 38988839 : 28120025 , cioè :: 1.38 : 1 proſſimamente ; laddove in ſei permutazioni la proporzione delle ſiniſtre alle utili è quella di 498813699 : 574928125, ovvero di 1 : 1.15 a un dipreſſo ; e s'accoſtan più all'eguaglianza i due numeri 1 , 1.15 di quel che faccian gli altri 1.38 , 1 .

56. Non poſſo diſſimular l'incomodo, che reca al calcolatore il metodo che ho preſentato per il ritrovamento de' moltiplicatori , perchè a determinar qualunque moltiplicatore relativamente ad una qualche ipoteſi , è neceſſario che ſi ſappia il moltiplicatore analogo dell'ipoteſi precedente ; queſto ſuppone noto l'analogo della ipoteſi , che va avanti a queſt'ultima , e così via via ſinchè con paſſo retrogrado ſi arrivi alla prima ipoteſi dell'evento $n-2$. Onde ſe , per eſempio, dati i due moltiplicatori pel primo evento , ſi vogliano determinare i ſette moltiplicatori, che ſon richieſti dalla ipoteſi dell'evento $n-7$, ſarà d'uopo coll'ajuto de' due primi trovare i tre moltiplicatori per l'evento $n-3$, poi i quattro per l'evento $n-4$ ecc. ſino ai ſette moltiplicatori per l'ultimo che domandiamo. Queſt' incomodo però reſta di molto diminuito , ove diaſi un valor numerico alla ſpecie n , come ſi ſuol fare all' occaſione che vengano in pratica ſimili queſiti ; e in tal caſo , quando non ſiano aſſai grandi il numero di tutte le palle bianche , e quel delle bianche, che ſi voglion tolte dall'urna, con poche operazioni numeriche ſi fanno naſcere i moltiplicatori di tutte le ipoteſi che precedon queſt'ultima , e ſi aſſegnano a queſta ſteſſa i competenti moltiplicatori. Anche l'uſo de' logaritmi, maſſime nelle moltiplicazioni che far ſi debbono per trovare i termini delle ſerie delle combinazioni , potrà contribuire a facilitar vie più la faccenda ; e conſiderando inſieme ogni coſa, ſi dovrà per avventura concludere , che in un problema di non mediocre difficoltà , come il noſtro , l'eſpoſto metodo ſia effettivamente un de' più ſemplici e de' men laborioſi.

57. Per soddisfar nondimeno chi amasse una maggior generalità anche a costo della speditezza, e per la determinazione de' moltiplicatori che esige un evento dato non volesse aver bisogno di scorrere per le ipotesi di tutti gli eventi anteriori, ci riman da ultimo di trovar la maniera di generalizzare questi moltiplicatori medesimi, e di racchiudere in tante formole uniche i moltiplicatori che spettano a tutti i possibili eventi. Quest'è ciò che noi eseguiremo ne' susseguenti paragrafi; premessa però la soluzione del presente.

PROBLEMA XIII.

58. *Sia la formola generale (M)* $\phi = az^m + bz^{m-1} + cz^{m-2} + dz^{m-3} + ez^{m-4} + fz^{m-5} + gz^{m-6}$ ecc., *indi un' altra formola (N)* $y = pz^{m+1} + qz^m + rz^{m-1} + sz^{m-2} + tz^{m-3} + uz^{m-4} + xz^{m-5}$ ecc. *Stabilito che* z *vada calando dell' unità positiva, onde, servendosi della maniera di scrivere le differenze finite, sia* $z - z' = \delta z = 1$; *e supposto che sia* $y - y' = \delta y = \phi$, *si cerca* y, *cioè si domandano i valori delle indeterminate* p, q, r, s ecc. *dati per* m, *e per le altre cognite* a, b, c, d ecc.

La soluzione di questo problema è facile, se farem uso del teorema notissimo compreso in questa equazione;

$$\delta y = dy - \frac{d^2y}{2} + \frac{d^3y}{2.3} - \frac{d^4y}{2.3.4} + \frac{d^5y}{2.3.4.5} \text{ ecc.}$$

in cui i d rappresentano le differenziazioni ordinarie, ciascuna delle quali eseguita, conviene cangiare la differenza dz, che ha ciascun termine in δz, cioè in 1. Imperocchè, in virtù di questo teorema, avremo

$$dy = (m+1).pz^m + mqz^{m-1} + (m-1)rz^{m-2} + (m-2)sz^{m-3} + (m-3)tz^{m-4} + (m-4)uz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^2y = m(m+1)pz^{m-1} + (m-1)mqz^{m-2} + (m-2)(m-1)rz^{m-3} + (m-3)(m-2)sz^{m-4} + (m-4)(m-3)tz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^3y = (m-1)(m)(m+1).pz^{m-2} + (m-2)(m-1)(m)qz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-4} + (m-4)(m-3)(m-2)sz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^4 y = (m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-3} + (m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-4} + (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)rz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^5 y = (m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-4} + (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)qz^{m-5} \text{ ecc.}$$

$$d^6 y = (m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)pz^{m-5} \text{ ecc.},$$

e quindi ecc.

$$(O)\ \delta y = (m+1)pz^m + \left(-\frac{m.(m+1)}{2}p + mq\right)z^{m-1}$$
$$+\left(\frac{(m-1)(m)(m+1)}{2.3}p - \frac{(m-1)(m)}{2}q + (m-1)r\right)z^{m-2}$$
$$+\left(-\frac{(m-2)(m-1)(m)(m+1)}{2.3.4}p + \frac{(m-2)(m-1)(m)q}{2.3}\right.$$
$$\left.-\frac{(m-2)(m-1)r}{2} + (m-2)s\right)z^{m-3} + \left(\frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5}\right.$$
$$-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4} + \frac{(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3}$$
$$\left.-\frac{(m-3)(m-2)s}{2} + (m-3)t\right)z^{m-4}$$
$$+\left(-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)(m+1)p}{2.3.4.5.6}\right.$$
$$+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)q}{2.3.4.5} - \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)r}{2.3.4}$$
$$\left.+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)s}{2.3} - \frac{(m-4)(m-3)t}{2} + (m-4)u\right)z^{m-5}.\text{ecc.}$$

Altro pertanto non resta da fare che confrontare i termini di questa equazione colla equazione $\phi =$ ecc., e troveremo i valori delle suddette indeterminate p, q, ecc. Il confronto de' primi termini ci offre l'equazione $(m+1)p = a$, che dà $p = \frac{a}{m+1}$. Dal confronto de' secondi risulta $-\frac{(m)(m+1)}{2}p + mq = b$, o, sosti-

tuito il valore di p, e fatte le dovute operazioni, $q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2}$. Coi confronti poi de' termini susseguenti ci verran date le altre indeterminate, le quali io dispongo per ordine, principiando dalla prima;

$$p=\frac{a}{m+1};\ q=\frac{b}{m}+\frac{a}{2};\ r=\frac{c}{m-1}+\frac{b}{2}+\frac{ma}{2.2.3};$$

$$s=\frac{d}{m-2}+\frac{c}{2}+\frac{(m-1)b}{2.2.3}+a.0;\ t=\frac{e}{m-2}+\frac{d}{2}+\frac{(m-2)c}{2.2.3}+b.0-\frac{(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.\ 2.3.4.5};\ u=\frac{f}{m-4}+\frac{e}{2}+\frac{(m-3)d}{2.2.3}+c.0-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{2.3.2.3.4.5}.b+a.0;$$

$$x=\frac{g}{m-5}+\frac{f}{2}+\frac{(m-4)e}{2.2.3}+d.0-\frac{(m-4)(m-3)(m-2)c}{2.3.2.3.4.5}+b.0+\frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.3.2.3.4.5.6.7.}\ \text{ecc.}$$

La legge de' due primi termini in tutti i valori di queste indeterminate è chiara. Cominciando poi la serie de' rimanenti dai terzi termini, veggiamo, che i termini nelle sedi pari son nulli, che quelli delle sedi dispari progrediscono coi segni alterni, e che il numero de' fattori, ne' quali entra la m pei termini delle sedi dispari seguita la legge de' numeri dispari 1, 3, 5, 7 ecc. Quanto alla legge de' coefficienti numerici, non bisogna lasciarsi ingannare da que' pochi valori delle specie p, q, r ecc. che abbiamo determinato, coi quali potrebbe parere, che i numeratori de' termini non avessero altro coefficiente numerico che l' unità. Se si va avanti sino al nono termine delle equazioni generali, cosicchè sia $\phi=az^m \ldots + hz^{m-7}+iz^{m-8}$ ecc., $\gamma=pz^{m+1}\ldots + yz^{m-6}+\pi z^{m-7}$, si trova $\pi=\frac{i}{m-7}+\frac{h}{2}+\frac{(m-6)g}{2.2.3}$

$$+ f.o - \frac{(m-6)(m-3)(m-4).e}{2.3.2.3.4.5.}$$

$$+ d.o + \frac{(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2).c}{2.3.2.3.4.5.6.7} + b.o$$

$$- \frac{3(m-6)(m-5)(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)(m)a}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9};$$

ove ſi vede che appariſce il 3 nel numeratore dell' ultimo termine. La vera regola, colla quale ſi determinano queſti coefficienti, è la ſeguente, come ciaſcuno può verificare. Si ponga per comodo $\frac{1}{2.2.3} = \omega$, e ſarà $\frac{1}{2.3.2.3.4.5} = \frac{-3}{2.2.3.4.5} + \frac{\omega}{2.3}$. Queſt' omogeneo di comparazione ſi faccia $= \omega'$, e riſulta $\frac{1}{2.3.2.3.4.5.6.7}$ $= \frac{5}{2.2.3.4.5.6.7} - \frac{\omega}{2.3.4.5} + \frac{\omega'}{2.3}$, cui ſia $= \omega''$; ed avremo $\frac{3}{2.5.2.3.4.5.6.7.8.9} = \frac{-7}{2.2.3.4.5.6.7.8.9} + \frac{\omega}{2.3.4.5.6.7}$ $- \frac{\omega'}{2.3.4.5} + \frac{\omega''}{2.3}$ ecc. colla legge, che è manifeſta.

PROBLEMA XIV.

59. *Dato il generale evento di bianche* n — z — 1, *determinare il primo moltiplicatore generale della ſerie ricorrente contraria di grado* z + 1, *che al dato evento conviene.*

Abbiam veduto al §. 49, che il primo moltiplicatore generale è eguale alla ſomma della ſerie $2(n-2) + 4(n-2) + 6(n-3) + \ldots + 2(z-1)(n-z+1) + 2z(n-z)$, che ſuppongo $= \gamma$. Or poichè queſta ſerie diminuita dell' ultimo termine $2z(n-z)$ è quel che

diventa y, se in esso in vece di z si pone $z-1$, sarà $2(n-1)+4(n-2)+6(n-3)\ldots 2(z-1)(n-z+1) = y'$, pel precedente Problema, e quindi $y-y'$, ossia $\delta y = 2z(n-z) = -2z^2+2nz$. S' instituisca il paragone di questa equazione col canone (O) del §.58, ed

avremo $m=2$; $(m+1)p=-2$, ovvero $p=-\frac{2}{3}$ col confronto de' primi termini. Quel de' secondi ci somministra l' equazione $-3p+2q=2n$, da cui colla sostituzione del valore di p si trae $q=n-1$. Perchè poi manca il termine costante nella nostra formola, sarà col paragone de' termini $p-q+r=0$, cioè $r=$

$=-p+q=n-1+\frac{2}{3}=\frac{3n-1}{3}$. Introducansi ora questi valori nella formola generale (N) del §. 58, e si avrà la somma della serie $y=\frac{-2z^3}{3}+(n-1)z^2$

$+\frac{(3n-1)z}{3}+s$. La specie s verrà determinata dalla condizione, che, quando $z=1$, sia la somma della nostra serie eguale al primo termine $2(n-1)$; onde nasce $-\frac{2}{3}+n-1+\frac{3n-1}{3}+s=2n-2$, ossia

$-\frac{2+3n-3+3n-1}{3}+s=2n-2$ cioè $\frac{6n-6}{3}+s$

$=2n-2$, che dà $s=0$. Poichè $\delta y=\phi$, poteasi pure fare il confronto del nostro termine generale $-2z^2$ $+2nz$ colla formola (M) del §. 58, e trarne quindi i valori de' simboli m, a, b, ecc. Ecco ciò che ne sarebbe risultato; $m=2$, $a=-2$, $b=2n$, $c=0$. Dunque, per le generali determinazioni delle specie p, q ecc., $p=-\frac{2}{3}$, $q=n-1$, $r=\frac{3n-1}{3}$, come s'è già trovato.

trovato. Da ciò si deduce, che il primo moltiplicatore della ricorrente contraria pel generale evento di bianche $n-z-1$, sarà $=\frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$ $=(z+1)\left(zn-\frac{2z^2+z}{3}\right)$.

PROBLEMA XV.

60. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il secondo moltiplicatore della serie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Sia θ una funzione qualunque di z; θ' quel che diventa θ, se in esso si pone $z-1$ in vece di z; θ'' ciò che divien θ', se in θ si mette un'altra volta $z-1$ in luogo di z; ecc. La teoria delle differenze finite ci somministra altrettante serie quanti sono i θ', θ'' ecc., per mezzo delle quali vengon dati gl'istessi θ', θ'' ecc. pel primo simbolo θ; e si ha.

$$(P)\ \theta'=\theta-d\theta+\frac{d^2\theta}{2}-\frac{d^3\theta}{2.3}+\frac{d^4\theta}{2.3.4}-\frac{d^5\theta}{2.3.4.5}+\frac{d^6\theta}{2.3.4.5.6}\ \text{ecc.}$$

$$(Q)\ \theta''=\theta-2d\theta+\frac{2^2d^2\theta}{2}-\frac{2^3d^3\theta}{2.3}+\frac{2^4d^4\theta}{2.3.4}-\frac{2^5d^5\theta}{2.3.4.5}\ \text{ecc.}$$

ove i d significano le differenziazioni ordinarie. Delle due serie notate, la prima ci è utile per trovare il nostro secondo moltiplicatore; tutte e due per trovare i seguenti. Si richiami a tal fine la formola del §. 51. che è $\gamma=-2z(n-z)\alpha'+\gamma'+z^2(n-z+1)^2$, in cui γ rappresenta il secondo moltiplicatore, α il primo, e α' ciò che diventa α se in esso in vece di z si pone $z-1$. Sarà $\gamma-\gamma'=\delta\gamma=-2z(n-z)\alpha'+z^2(n-z+1)^2$. Or poichè $\alpha=\frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3}$, fatto $\theta=\alpha$, e sostituito 1 in vece di dz, avrem pel canone (P)

$$\alpha' = \frac{-2z^3+3nz^2-3z^2+3nz-z}{3} + \frac{6z^2-6nz+6z-3n+1}{3}$$

$$+ \frac{-6z+3n-3}{3} + \frac{2}{3};$$ ovvero $$\alpha' = \frac{-2z^3+(3n+3)z^2-(3n+1)z}{3};$$

e perciò $$\delta\gamma = 2z(n-z)\frac{(2z^3-(3n-3)z^2+(3n+1)z}{3} + z^2(n-z+1)^2 =$$

$$\frac{-4z^5+(10n+9)z^4-(6n^2-18n-)z^3+(9n^2+8n+3)z^2.}{3}$$

Paragonisi questa formola colla generale (M), e risulterà $m=5$, $a=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{10n+9}{3}$, $c=\frac{-6n^2-18n-8}{3}$, $d=\frac{9n^2+8n+3}{3}$, $e=o$, $f=o$, perchè manca il termine, in cui z sia alla prima dimensione, e il termine costante. Sostituendo poi questi valori di m, a, b ecc. nelle generali determinazioni de' simboli p, q ecc., si ha $p=-\frac{2}{3^2}$, $q=\frac{10n-1}{3.5}$, $r=\frac{-9n^2+3n+5}{2.3^2}$, $s=-n$, $t=\frac{18n^2-3n-1}{2.3^2}$, $u=\frac{15n^2+10n+2}{2.3.5}$;

onde

$$\gamma = \frac{-20z^6+\overline{60n-6}z^5-\overline{45n^2+15n+25}z^4-90nz^3+\overline{90n^2-15n-5}z^2+\overline{45n^2+30n+6}z.}{2.3.3.5}$$

Non aggiungo alcun termine costante, perchè essendo la differenza finita $\delta\gamma$ un aggregato di termini moltiplicato per z^2, e annullandosi essa quando $z=o$, nella stessa ipotesi anche l'integrale γ debb' esser zero. Sicchè sarà noto il secondo moltiplicatore generale, che compete alla nostra serie, e noi l'esprimeremo in quest' altra forma equivalente;

$$\frac{z(z+1)}{2}\left(-(z^2+z+1)n^2+\frac{(4z^3-3z^2-3z+2)}{3}n+\frac{-20z^4+14z^3+11z^2-11z+6}{3.3.5}\right).$$

PROBLEMA XVI.

61. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il terzo moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Pel §. 51. abbiamo il terzo moltiplicatore $\gamma = -2z(n-z)\beta' + \gamma' - z^2(n-z+1)^2 . \alpha''$, i ſimboli α, β denotando il primo e il ſecondo moltiplicatore già ritrovati: e quindi $\gamma - \gamma' = \delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+)^2 \alpha''$. Dal valore di $\beta =$

$$\frac{-20z^6 + \overline{60n-6}.z^5 - \overline{45n^2+15n+25}.z^4 - 90nz^3 + \overline{90n^2-15n-5}.z^2 + \overline{45n^2+30n+6} \times z}{2.3.3.5}$$

ſi deduce col mezzo del canone (P)

$$\beta' = \frac{-20z^6 + \overline{60n+114}.z^5 - \overline{45n^2-285n-245}.z^4 + \overline{180n^2+450n+240}.z^3 - \overline{180n^2+255n-95}.z^2 + \overline{45n^2+30n+6}.z}{2.3.3.5};$$

e dal valore di $\alpha = \frac{-2z^3 + (3n-3)z^2 + (3n-1)z}{3}$ col ſecondo canone (E) ſi trae

$\alpha'' = \frac{-2z^3 + (3n+9)z^2 + (-9n-13)z + 6n + 6}{3}$. Colla introduzione poi di queſti valori nella ſuperior formola $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+1)^2\alpha''$ ſi otterrà dopo le neceſſarie riduzioni

$$\delta\gamma = \frac{1}{3.3.5}\Big(-20z^8 + (80n+144)z^7 + (-105n^2-504n-440)z^6 + (45n^3+585n^2+1250n+735)z^5$$
$$+ (-225n^3-1125n^2-1560n-710)z^4 + (315n^3+945n^2+1010n+381)z^3 + (-135n^3-300n^2-276n-90)z^2\Big)$$

Queſta formola dovrà eſſere confrontata col canone (M) per le determinazioni delle ſpecie m, a, b ecc., onde ſi rendano anche noti gli altri ſimboli p, q, r ecc. e ſi abbia finalmente il ſuo integrale che ſarà il terzo moltiplicatore ricercato. Ma ſe a motivo de' coefficien-

ti delle podeſtà di z molto compleſſi ſi trovaſſe più comodo d' integrar per parti la ſuddetta formola differenziale, biſognerebbe in tal caſo traſformarla in queſt' altra equivalente

$$\delta\gamma = (z^5-5z^4+7z^3-3z^2)n^3 + \frac{(-7z^6+39z^5-75z^4+63z^3-20z^2)n^2}{3}$$
$$+\frac{(80z^7-504z^6+1250z^5-1560z^4+1010z^3-276z^2)n}{3\cdot3\cdot5\cdot}$$
$$+\frac{-20z^8+144z^7-440z^6+735z^5-710z^4+381z^3-90z^2}{3\cdot3\cdot5},$$ e

conſiderare che ogni fattore delle podeſtà di n ſia una formola di differenze finite. Integrato pertanto ciaſcuno di queſti fattori coll' ajuto del canone (M), ſenza aggiunger coſtante, che non ha luogo, ſi troverà il terzo moltiplicatore domandato dal Problema $=$

$$\frac{(z-1)z(z+1)}{2\cdot3}\left((z^3-3z^2-z+2)n^3+\frac{(-6z^4-18z^3-15z+6)n^2}{3}\right.$$
$$+\frac{(60z^5-192z^4+78z^3+174z^2-102z+36)n}{3\cdot3\cdot5}$$
$$\left.+\frac{-280z^6+1008z^5-808z^4-693z^3+1061z^2-126z+144}{3\cdot3\cdot3\cdot5\cdot7}\right).$$

PROBLEMA XVII.

62. *Dato il generale evento di bianche* $n-z-1$, *determinare il quarto moltiplicatore della ſerie contraria di grado* $z+1$, *che al dato evento conviene.*

Rappreſentando γ ſecondo il ſolito queſto quarto moltiplicatore, ſarà α il ſecondo moltiplicatore, e β il terzo, che ſon già noti. Si paſſi dunque col canone $(\mathfrak{Q})$ dal valore di α a quello di α'', e dal valore di β a quello di β', e ſi ſoſtituiſcano queſti nuovi valori nella formola generale $\delta\gamma = -2z(n-z)\beta' - z^2(n-z+1)^2\alpha''$. Si avrà $\delta\gamma$ dato per z e per n; e l' integrazione di que-

ſta formola o tutt' a un tratto, o per parti, eſeguita alla maniera de' precedenti Problemi ci farà conoſcere il quarto moltiplicatore, che domandiamo, e ſarà eſſo

$$= \frac{(z-2)(z-1)z(z+1)}{2.3.4}\Big\{(-z^4+6z^3-5z^2-8z+3)n^4$$

$$+(8z^5-50z^4+64z^3+36z^2-70z+12)\frac{n^3}{3}+$$

$$(-120z^6+804z^5-1437z^4+78z^3+1503z-792z+108)\frac{n^2}{3.3.5}+$$

$$(1120z^7-8232z^6+19108z^5-10212z^4-15476z^3+18228z^2-3816z+864)\frac{n}{3.3.3.5.5.7}-$$

$$\frac{1}{3.3.3.3.5.5.7}(2800z^8-22960z^7+65836z^6-64288z^5-30305z^4+83310z^3-37251z^2+198z-3240)\Big\}.$$

Si tenga lo ſteſſo metodo pel 5.°, 6.° ecc. moltiplicatori, e ciaſcun d' eſſi ſarà in noſtra mano, ſenza che per averli ſia d' uopo dalla ipoteſi dell' evento $n-z-1$ aſcendere a tutte le precedenti ſino all' ultima dell' evento $n-2$.

63. Faremo la rifleſſione, che il terzo moltiplicatore ha il fattore $z-1$, e divien zero, quando $z=1$; il che debb' eſſere neceſſariamente, perchè in tale ipoteſi la ſerie ricorrente delle combinazioni è appunto di ſecondo grado, e non ammette per conſeguenza che due ſoli moltiplicatori. Così il quarto moltiplicatore riceve il fattore $z-2$, e perciò ſi fa nullo nell' ipoteſi di $z=2$, perchè in tal caſo la ricorrente, che gli corriſponde, è ſolo di terzo grado, e dee realmente mancare queſto quarto moltiplicatore. Onde, adattato un ſimil diſcorſo ai moltiplicatori ſuſſeguenti, ſi raccoglierà, che chiamato m il numero de' moltiplicatori, l' ultimo denominato dal numero m avrà il fattore $z-m+2$. Oſſerviſi in oltre, che i fattori de' noſtri generali moltiplicatori coſtituiſcono una ſerie aritmetica, e che ſon tanti, quanto è l' eſponente maſſimo di n per ciaſcun

d' essi, ovvero quanto è l' esponente massimo di z nella formola, che moltiplica la podestà massima di n. Di più, che l' unico fattore del primo moltiplicatore è diviso per 1, i due del secondo per 1.2, i tre del terzo per 1.2.3; i quattro del quarto per 1.2.3.4; per conseguenza i fattori numero m del moltiplicatore denominato da m saranno divisi da $1.2.3.4....(m-1)m$: Finalmente che cresce successivamente di un' unità l'esponente massimo di z nelle formole moltiplicatrici delle podestà di n decrescenti successivamente d' un' unità in ciascun moltiplicatore; e medesimamente cresce di un' unità l' esponente massimo di z nelle formole che moltiplicano la podestà massima di n, ove si passi da un moltiplicatore al suo immediatamente susseguente.

64. Queste cose poste, per evitare di far tante divisioni ne' moltiplicatori trovati coll' anzidetto metodo, quanti sono i loro fattori, onde ridurli a forma più comoda, potrebbe cadere opportuna la soluzione del presente

PROBLEMA XVIII.

65. *Ritrovare per ciascun moltiplicatore le formole moltiplicatrici delle podestà di* n, *che unitamente costituiscono il quoziente dell' intero moltiplicatore diviso pe' suoi respettivi fattori.*

A questo fine stabilisco tre qualunque moltiplicatori generali, che si succedono l' un dopo l' altro. L' antepenultimo sia

$$A = \frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+4)}{1.2.3...(m-2)}\left(an^{m-2}+bn^{m-3}+cn^{m-4}+en^{m-5}+fn^{m-6}...\text{ecc.}\right).$$

Il penultimo

$$B = \frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-1)}\left(\alpha n^{m-1}+\beta n^{m-2}+\gamma n^{m-3}+\varepsilon n^{m-4}+\zeta n^{m-5}..\text{ecc.}\right).$$

L' ultimo, che si cerca

$$C=\frac{(z+1)z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\left(sn^m+tn^{m-1}+un^{m-2}+xn^{m-3}+yn^{m-4}...\text{ecc.}\right).$$

Le specie a, b, c ecc., α, β, γ ecc., s, t, u ecc. sono funzioni di z. Siano in oltre A', B', C', a', b', c' ecc., α', β' ecc., s', t' ecc. ciò che diventano A, B, C, a ecc., se in queste si pone $z-1$ in vece di z; ed A'', B'', C'', a'' ecc. ciò che diventano A', B', C', a' ecc. se in esse si pone un' altra volta $z-1$ in vece di z. Sarà

$$A'=\frac{z(z-1)..(z-m+3)}{1.2.3...(m-2)}\left(a'n^{m-2}+b'n^{m-3}+c'n^{m-4}+e'n^{m-5}+f'n^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$A''=\frac{(z-1)(z-2)..(z-m+2)}{1.2.3..(m-2)}\left(a''n^{m-2}+b''n^{m-3}+c''n^{m-4}+e''n^{m-5}+f''n^{m-6}..\text{ecc.}\right);$$

$$B'=\frac{z(z-1)..(-m+2)}{1.2.3..(m-1)}\left(\alpha'n^{m-1}+\beta'n^{m-2}+\gamma'n^{m-3}+\varepsilon'n^{m-4}+\phi'n^{m-5}..\text{ecc.}\right);$$

$$C'=\frac{z(z-)..(z-m+1)}{1.2.3...m}\left(s'n^m+t'n^{m-1}+u'n^{m-2}+x'n^{m-3}+y'n^{m-4}..\text{ecc.}\right).$$

Dunque $C-C'=\delta C=$

$$\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(\big((z+1)(s-s')+ms'\big)\times n^m+\big((z+1)(t-t')+mt'\big)\times n^{m-1}+\big((z+1)(u-u')+mu'\big)\times n^{m-2}+\big((z+1)(x-x')+mx'\big)\times n^{m-3}+\big((z+1)(y-y')+my'\big)\times n^{m-4}\text{ ecc.}\Big).$$

Ma, per la formola determinatrice de' nostri moltiplicatori abbiamo anche $\delta C=-2z(n-z)B'-z^2(n-z+1)^2A''$, cioè, dopo la sostituzione de' valori di B', A'', e l' opportuna riduzione;

$$\delta C=\frac{z(z-1)..(z-m+2)}{1.2.3...m}\Big(-\big(m(m-1)za''+2mz\alpha'\big)\times n^m$$
$$+\big(2m(m-1)(z-1)za''-m(m-1)zb''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^2za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''+2mz^2\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}$$
$$-\big(m(m-1)(z-1)^2zb''+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}\Big)$$

con ordine pe' seguenti termini simile a quello, che comincia nel terzo termine. Posto pertanto δs, δt, δu ecc. in vece di $s-s'$, $t-t'$, $u-u'$ ecc., e di più $s-\delta s$, $t-\delta t$, $u-\delta u$ in vece di s', t', u'; ed agguagliati i due valori di δC, col levare gli eguali fattori risulta l' equazione;

$$\big((z-(m-1))\delta s+ms\big)\times n^m+\big((z-(m-1))\delta t+mt\big)\times n^{m-1}$$
$$+\big((z-(m-1)(\times\delta u+mu\big)\times n^{m-2}+\big((z-(m-1))\times\delta x+mx\big)\times n^{m-3}\text{ecc.}$$
$$=\big(-m(m-1)za''-2mz\alpha'\big)\times n^m$$
$$+\big(2m(m-1)(z-1(za''-m)m-1)zb''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'\big)\times n^{m-1}$$
$$+\big(-m(m-1)(z-1)^2za''+2m(m-1)(z-1)zb''-m(m-1)zc''$$
$$+2mz^2\beta'-2mz\gamma'\big)\times n^{m-2}+\big(-m(m-1)(z-1)^2zb''$$
$$+2m(m-1)(z-1)zc''-m(m-1)ze''+2mz^2\gamma'-2mz\varepsilon'\big)\times n^{m-3}\text{ ecc.}$$

ove le formole, che nel primo membro moltiplicano le podestà di n debbono essere identiche colle formole, che moltiplicano le podestà analoghe di n nell' omogeneo di comparazione. Ora, siccome m è quantità nota, e son pur note le specie a, b, c ecc. α, β, γ ecc., perchè appartengono ai due cogniti moltiplicatori i quali immediatamente precedono il moltiplicatore C; e quindi, pei canoni (P) (Q) le altre, che ne derivano, a'', b'', c'' ecc. α', β', γ' ecc., non resterà a far altro, che dar per queste i simboli incogniti s, t, u ecc., onde esibire il ricercato quoziente del moltiplicatore C, e in conseguenza lo stesso moltiplicatore.

66. Ad ottener ciò, stabilisco in genere

$$S=Fz^r+Gz^{r-1}+Hz^{r-2}+Iz^{r-3}+Lz^{r-4}\text{ ecc.},$$

Sarà pel canone (O) del §. 58.

$$\delta S=rFz^{r-1}+\Big(\frac{-r(r-1)F}{2}+(r-1)G\Big)\times z^{r-2}$$
$$+\Big(\frac{r(r-1)(r-2)F}{2.3}-\frac{(r-1)(r-2)}{2}G+(r-2)H\Big)\times z^{r-3}\text{...ecc.},$$

da che si ricava, essere

$$(z-(m-1))\,\delta S+mS=\big((r+m-1)F+F\big)\times z^r$$

$$+\left(\frac{-r(r+2m-3)}{2}F+(r+m-2)G+G\right)z^{r-1}+$$

$$\left(\frac{r(r-1)(r+3m-5)}{2.3}F-\frac{(r-1)(r+2m-4)}{2}G+(r+m-3)H+H\right)z^{r-2}$$

$$+\left(\frac{-r(r-1)(r-2)(r+4m-7)}{2.3.4}F+\frac{(r-1)(r-2)(r+3m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(r-2)(r+2m-5)}{2}H+(r+m-4)I+I\right)z^{r-3}\text{ ecc.}$$

La legge di questa serie è di per sè manifesta, e quando uopo il voglia, si potrà produrla fino a quel numero di termini che esigerà la natura delle formole, e il numero de' termini, dai quali vengono costituite.

67. Domandisi ora pel moltiplicatore C denominato da m la formola che moltiplica n^m, sarà $r=m$, $S=s$, e però $s=Fz^m+Gz^{m-1}+Hz^{m-2}+Iz^{m-3}$ ecc., ed avrassi $(z-(m-1))\,\delta s+ms$, ovvero

$$\left((2m-1)F+F\right)\times z^m+\left(\frac{-m(3m-3)}{2}F+(2m-2)G+G\right)\times z^{m-1}$$

$$+\left(\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3.}F-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}G+(2m-3)H+H\right)\times z^{m-2}$$

$$+\left(\frac{-m(m-1)(m-2)(5m-7)}{2.3.4}F+\frac{(m-1)(m-2)(4m-6)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(m-2)(3m-5)}{2}H+(2m-4)I+I\right)\times z^{m-3}\text{ ecc.}=$$

$-m(m-1)z\,a''-2mz\,\alpha'$. Essendo note in questo secondo membro le funzioni a'', α', che appartengono ai moltiplicatori precedenti, se si sostituiranno i loro valori dati per z, nascerà nell'omogeneo una formola, in cui sarà m il massimo esponente di z; e confrontando i termini che ne risultano cogli analoghi del primo membro, si determineranno i valori di F, G, H ecc. onde resterà nota la formola, che nel moltiplicatore C denominato da m moltiplica n^m.

68. Compiuta quest' operazione, si dee procedere a trovar la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}. Rammentiamci, aver noi detto al §. 63, che il massimo esponente di z in t diventa $m+1$, e vedremo che si dovrà por $r=m+1$. Fatto poi $S=t$, è necessario che si verifichi questa equazione: $(z-(m-1))\,\delta t+mt$, ossia $(2mF+F)\times z^{m+1}+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}F+(2m-1)G+G\right)\times z^{m}$

$$+\left(\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}F-\frac{m(3m-3)}{2}G+(2m-2)H+H\right)\times z^{m-1}$$

$$+\left(\frac{-(m+1)m(m-1)(5m-6)}{2.3.4}F+\frac{m(m-1)(4m-5)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{(m-1)(3m-4)}{2}H+(2m-3)I+I\right)z^{m-2}\text{ ecc.}$$

$=2m(m-1)(z-1)z\,a''-m(m-1)z\,b''+2mz^2\alpha'-2mz\beta'$. Qui pure essendo note le funzioni a'', b'', α', β', colla sostituzione de' loro valori in quest' ultimo membro, costituiremo una formola, in cui il massimo esponente di z arriva a $m+1$; e il confronto de' termini con quelli che lor corrispondono nella prima parte dell' equazione darà i valori di F, G, H ecc. e renderà nota la formola t, che in C moltiplica n^{m-1}.

69. Al terzo termine del moltiplicatore C, in cui avvi n^{m-2}, corrisponde $r=m+2$; $S=u=Fz^{m+2}+Gz^{m+1}+Hz^{m}+Iz^{m-1}$ ecc., onde $(z-(m-1))\,du+mu$, ovvero

$$\left((2m+1)F+F\right)\times z^{m+2}+\left(\frac{-(m+2)(3m-1)}{2}F+2mG+G\right)\times z^{m+1}$$

$$+\frac{(m+2)(m+1)(4m-3)}{2.3}F+\left(\frac{-(m+1)(3m-2)}{2}G+(2m-1)H+H\right)\times z^{m}$$

$$+\left(\frac{-(m+2)(m+1)m(5m-5)}{2.3.4}F+\frac{(m+1)m(4m-4)}{2.3}G\right.$$

$$\left.-\frac{m(3m-3)}{2}H+(2m-2)I+I\right)\times z^{m-1}\text{ ecc.}=$$

$-m(m-1)z(z-1)^2 a'' + 2m(m-1)z(z-1)b$ $-m(m-1)zc'' + 2mz^2\beta' - 2mz\gamma'$. La sostituzione de' valori cogniti delle funzioni a'', b'', c'', β', γ', e il confronto de' termini analoghi ne' due membri dell'equazione faran conoscere le indeterminate F, G, H ecc., e in conseguenza il terzo termine del moltiplicatore C.

70. Modificata poi la suddetta serie al valore che riceve r nel quarto termine di C, si dee far l'eguaglianza tra essa, e $-m(m-1)z(z-1)^2 b'' + 2m(m-1)z(z-1)c''$ $-m(m-1)ze'' + 2mz^2\gamma' - 2mz\varepsilon'$; e la forma sì di questo come dell'antecedente omogeneo di comparazione sarà quella che mantengono tutti i susseguenti. Perilchè resta trovata la maniera d'esibire l'intero quoziente, e per conseguenza l'intero moltiplicatore C che si cercava. Questo metodo serve per tutti quanti i moltiplicatori della ricorrente generale, detratto il primo; e solo si dee notare, che quando si cerca il secondo moltiplicatore, diventa $a'' = -1$, e gli altri simboli b'', c'' ecc. son zero.

71. Per la compiuta soluzione del Problema, che ci siamo proposti nel §. 30, ci rimangono ancora da considerare due eventi di palle bianche nell'urna A, i quali fan classe a parte, ed hanno le lor ricorrenti delle combinazioni contrarie fuor della serie generale, che s'è trovato appartenere all'evento di bianche $n-z-1$. Uno di questi è $n-1$, l'altro n; cioè si può domandare quante permutazioni mi son necessarie, perchè, ridotta l'urna A allo stato di bianche $n-1$ che ho chiamato primitivo, riesca probabile, che in qualcuna d'esse avrò l'evento di bianche in A eguale a quello dello stato primitivo; e quante ve ne vogliono, perchè sia probabile, che in alcuna d'esse io rimetta tutte le palle bianche nella prim'urna.

72. Ho detto, che questi due casi escon fuori della regola generale degli altri eventi, e lo provo così. Se il generale evento di bianche $n-z-1$ abbracciasse

eziandio questi due casi, potrebbero aver luogo le ipotesi di $z = 0$, e di $z = -1$, che dà $z + 1 = 0$. Colla prima la formola $n - z - 1$ diventerebbe appunto $n - 1$, e colla seconda si sarebbe $n - z - 1 = n$. Ma ciascuno de' moltiplicatori generali della serie contraria all' evento $n - z - 1$ avendo i due fattori z, $z + 1$, e l'una e l'altra delle due ipotesi li ridurrebbe tutti a zero; la qual cosa annullerebbe il numero delle combinazioni contrarie ai detti eventi per qualunque corso di permutazioni. Dunque, o siam sicuri nel permutare di aver sempre quegli eventi, perchè tutte le combinazioni ci son propizie, o essi si sottraggono alla legge degli altri. E' palese l'assurdo, che abbiansi costantemente i due suddetti eventi, anche pel sol riflesso, che essendo tra lor diversi, uno esclude l'altro necessariamente; e perciò resta a dirsi, che essi domandano altre formole regolatrici, e ci somministrano argomento per due novelli Problemi. Sia pertanto

PROBLEMA XIX.

73. *Partendosi dallo stato primitivo di bianche* $n - 1$ *nella prim' urna, si cerca il numero delle combinazioni contrarie ad aversi almeno una volta lo stesso stato* $n - 1$ *nel corso di qualsivoglia numero di permutazioni.*

Forminsi le colonne degli eventi contrarj e delle respettive combinazioni nella maniera praticata dal primo insino al nono Problema; e avremo

per 1 permutazione; $n \;\; 1 \,|\, n\text{-}2 \;\; (n\text{-}1)^2 \,|$: quindi le combinazioni contrarie; $1 + (n\text{-}1)^2$:

per 2 perm. $\begin{array}{ll|ll|} n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 \end{array}$: comb. contr. $(n\text{-}1)^2(n\text{-}2)(n+2)$:

per 3 perm. $\begin{array}{ll|ll|ll} n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 & n\text{-}2 & (n\text{-}1)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 \\ n\text{-}2 & 4(n\text{-}2) & n\text{-}3 & (n\text{-}2)^2 & n\text{-}2 & 9 \end{array}$

ecc.	$n-2$ $(n-1)^2$	$n-2$ $(n-1)^2$	comb. contr.
	$n-3$ $(n-2)^2$	$n-3$ $(n-2)^2$	$(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$.
	$n-3$ $6(n-3)$	$n-4$ $(n-3)^2$	ecc.

Colla pazienza di andare avanti nella ricerca de' termini della ricorrente, si trova, che essi van con quest' ordine; $(n-1)^2+1$; $(n-1)^2(n-2)(n+2)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^2+4n+8)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^4+4n^3+8n^2-100)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^6+4n^5+8n^4-100n^2--760n+1736)$; $(n-1)^2(n-2)^2(n^8+4n^7+8n^6-100n^4-760n^3-4940n^2+32176n-39520)$ ecc., e l' esame di questa serie la farà conoscere una ricorrente di 4°. grado, che ha i moltiplicatori
1.° $(n-2)(-56n^4+528n^3-1152n^2)$; 2.° $79n^4-460n^3+156n^2+2208n-2304$; 3.° $-18n^3-21n^2+516n-796$; 4.° $n^2+18n-58$. Si avverta però, che il primo termine di questa serie non è già $(n-1)^2+1$, come porta il numero delle combinazioni, ma solamente $(n-1)^2$. Quell' unità di più deriva dalla possibilità dell' evento di bianche n in una sola permutazione, laddove esso non può mai aver luogo in nessuna delle susseguenti, perchè, ov' esso accada, l' altro $n-1$ gli tien dietro necessariamente: e qui si cercano i contrarj allo stesso evento $n-1$. Volendosi perciò stabilire il termine generale della nostra serie, che, giusta la nota regola delle ricorrenti deve aver questa forma; $ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$, ad aversi il vero numero delle combinazioni contrarie per l' ipotesi di $v=1$, ossia pel caso d' una sola permutazione, aggiungerem l' unità al risultato esibito dalla formola; o anche, per aver sempre presente la necessità di quest' aggiunta, scriveremo il termine generale della ricorrente così: $o^{v-1}+ap^v+bq^v+cr^v+ds^v$. Per tal modo nella supposizione che sia il numero v delle permutazioni maggiore dell' unità, col primo termine o^{v-1} non si accrescerà niente al valore de' susseguenti, e sol nell' ipotesi di $v=1$ avrem $o^{v-1}=o^0=1$.

PROBLEMA ULTIMO.

74. *Partendosi dallo stato primitivo delle due urne, si cerca il numero delle combinazioni contrarie a rimettere almeno una volta in* A *tutte le bianche* n *nel corso di qualsivoglia numero di permutazioni*,

Erette le colonne competenti a ciascuna permutazione, si avrà

per 1. permutazione: $n-1 \;\; 2(n-1) \mid n-2 \;\; (n-1)^2 \mid$; onde le combinazioni contrarie; $(n-1)(n+1)$;

per 2. perm.
$$\begin{array}{ll|ll|ll|ll} n-1 & 2(n-1) & n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-2 & (n-1)^2 \\ n-1 & 2(n-1) & n-2 & (n-1)^2 & n-1 & 4 & n-2 & 4(n-2) \end{array}$$
ecc. $\begin{array}{ll} n-2 & (n-1)^2 \\ n-3 & (n-2)^2 \end{array}$; comb. contr. $(n-1)^2(n^2+2n+2)$. ecc.

Non noto altre colonne, perchè nelle successive permutazioni cresce di molto il lor numero; e già si sa come si debba formarle. La serie contraria, che da esse dimana, è la seguente;

$(n-1)(n+1)$; $(n-1)^2(n^2+2n+2)$; $(n-1)^2(n^4+2n^3+2n^2-8)$; $(n-1)^2(n^6+2n^5+2n^4-8n^2-40n+56)$; $(n-1)^2(n^8+2n^7+2n^6-8n^4-40n^3-188n^2+752n-608)$ ecc., che pure è una ricorrente di 4.° grado generata dai moltiplicatori:

1.° $(n-1)(-6n^4+72n^3-144n^2)$; 2.° $31n^4-142n^3+78n^2+216n-144$; 3.° $-12n^3-3n^2+148n-156$; 4.° $n^2+12n-28$.

75. Orniamo quest'ultimo Problema di qualche esempio. Sia il numero di bianche $n=1$. In tale ipotesi si annullano tutti i termini della ricorrente contraria; il che ci dà una certezza di avere almeno una volta bianche 1 qualunque sia il numero delle permutazioni che domandiamo. In fatti, essendo lo stato primitivo delle urne, che in *A* sia solo una nera, e in *B* una sola bianca, colla prima permutazione è manifesto, che in *A* si trasferisce la bianca, passando la nera nella se-

conda urna. Ciò avvenendo infallibilmente nella prima permutazione, poi nella terza, indi nella quinta ecc., è chiaro, che qualunque numero di permutazioni sia chiesto, sempre in una d' esse avrem sicuro l' evento dell' unica bianca; e quindi ogni combinazione ci sarà favorevole, e non ne avremo alcuna contraria.

76. Facciam transito all' altra ipotesi di bianche $n=2$: e per le due serie, contraria, e favorevole ci nasceran questi termini; 3, 10, 32, 104 ecc.,
1, 6, 32, 152 ecc.
che sono i medesimi con quelli che abbiam trovato al §. 38. per la probabilità dell' evento di bianche $n-2$, cioè di nessuna bianca nella stessa supposizione di bianche $n=2$. Dunque, ove tutte le bianche sian due, egli è lo stesso il cercare, quante siano le combinazioni, che menan l' evento di tutte le nere, e quante sian quelle che favoriscono il ritorno di tutte le bianche nella prim' urna: la qual cosa non sembrerà punto strana a chi fa la riflessione, che nello stato primitivo trovandosi una nera e una bianca in ciascun' urna, debb' essere egualmente difficile levar bianca dall' una, nera dall' altra, e condurre l' evento del §. 38., che levar nera dalla prima, bianca dalla seconda, e rimetter nella prima tutte le palle bianche.

77. Ma come conciliare nelle due ipotesi l' identicità del numero delle combinazioni coll' indole delle due serie, essendo quella del §. 38. sol di secondo grado, ed arrivando al quarto quella del presente Problema? Ciò si fa agevolmente. Imperocchè a tutti è noto che, chiamati p, q, r, s i quattro moltiplicatori di una ricorrente di quarto grado, l' equazione $x^4 - sx^3 - rx^2 - qx - p = 0$ comprende le quattro radici che io denomino P, Q, R, S, le quali entrano nella formazione del termine generale $aP^v + bQ^v + cR^v + dS^v$, che conviene alla serie. Ponghiamo ora, che in una data ipotesi l' equazione suddetta di quarto grado sia divisi-

bile in due di ſecondo, onde naſca $(x^2+ex+f)\times(x^2+gx+h)=0$; e ſian P, Q le radici del primo trinomio, R, S quelle dell'altro. E' evidente, che tutte e quattro le radici di quadrato-quadratiche, che originalmente erano, diventan quadratiche; e che non hanno alcuna dipendenza dai valori de' coefficienti a, b, c, d, i quali vengono determinati dai confronti del termine generale modificato alle quattro ipoteſi di $v=1$, $v=2$, $v=3$, $v=4$, coi quattro primi termini della ſerie. Se perciò avverrà, che tali confronti facciano ſvanire i due primi coefficienti a, b; poſſiamo conſiderare la formola generale ridotta ai due termini cR^v+dS^v, che di per sè portano ſolo a una ricorrente di ſecondo grado; e poſſiam tener conto ancora de' due termini aP^v+bQ^v, i quali ſi diſtruggono non perchè P, Q ſian zero, ma perchè s' annullano a e b. Quindi appariſce, come debba eſſere indifferente per la formazione della ſerie il ſervirſi de' due moltiplicatori, che ſono ſtati determinati nel §. 38, o far uſo de' quattro, che ci dà il noſtro Problema, e perchè le due ſerie s' identificano tra loro perfettamente.

78. Poſto finalmente $n=3$, le due ſerie contraria e favorevole procedono in queſta maniera:

contr. 8, 68, 580, 4964, 42484, 363668, 3112996, 26647556, 228105364,
fav. 1, 13, 149, 1597, 16565, 167773, 1699973, 16399165, 159315125,
contr. 1952603060, 16714460740, 143077320356, 1224754999348 ecc.
fav. 1544181341, 14666598869, 139352216125, 1317110828981 ecc,

nelle quali ſi oſſerva, che fino al termine duodecimo incluſivamente le combinazioni contrarie ſuperano le favorevoli, cominciando ſolo nel terzodecimo ad eſſer queſte in maggior numero delle prime. Dal che inferiſco, che, eſſendo due bianche e una nera in A, una bianca e due nere in B, per giocare proſſimamente in pari ſulla probabilità dell' evento di tutte le tre bianche nella prim' urna, debbo chiedere o 12, o 13 permutazioni.

NUOVO

NUOVO USO

DELLA CHINACHINA NEL VAJUOLO.

Del Sig. Giovanni Verardo Zeviani.

IN un mio Opuſcolo, preſentato ultimamente alla *Regia Accademia di Mantova*, e da eſſa approvato, trattaſi qual uſo debba fare il Medico della Chinachina ne' morbi Purulenti. Ho ivi dimoſtrato che gli effetti buoni o cattivi della Chinachina in queſto genere di malattie ſi debbono aſpettare, più che da altre ſue facoltà, dalla forza ſua ſtitica e corroborante. In queſto frattempo eſſendo qui in Verona inſorta una fiera epidemia di Vajuolo, ho avuto campo, dietro a' fondamenti da me in quell' Opuſcolo propoſti, di ſpiare gli effetti della Chinachina anche in queſto morbo. Ed avendoli trovati corriſpondere eſattamente alla mia aſpettazione, ho riſoluto di pubblicare in queſta Memoria le mie oſſervazioni e rifleſſioni ſu di tal propoſito; la quale quindi ſi dovrà conſiderare come un' appendice di quell' Opuſcolo; e come una prova del modo di filoſofare da me in eſſo tenuto. E quel che più importa ſervirà eſſa moltiſſimo ad eccitare i Medici noſtri ancor dubbioſi e reſtii a tentare la Chinachina anche nel Vajuolo, come in altri paeſi lodevolmente ſi coſtuma di fare.

Due caſi pratici, fra molti che ſe ne potrebbono addurre, ſerviranno di baſe e norma al noſtro ragionare. Un de' quali, in cui non fu uſata la Chinachina, fu mortale; l' altro del tutto a quel ſimile, uſata la Chinachina, ebbe buon fine. Paſſeremo indi a dare un

Catalogo di Scrittori che hanno lodata la Chinachina nel Vajuolo ; ne esamineremo i motivi per i quali fu da essi prescritta; e faremo vedere che a tutt' altro fine l' hanno ordinata , da quello che noi proponiamo. Conchiuderemo con fissare il tempo più opportuno , e la maniera più adattata di servirsi di quest' ottimo medicamento: i di cui salutari effetti nel Vajuolo se fossero stati noti al *Trillero* , avrebbe avuto maggior ragione di esaggerare: *omnis in hoc solo cortice est salus* , *omneque præsidium & sacra quasi anchora* : *sed ad immensas hujusce febrifugi laudes merito decantandas profecto nec dies sufficit* , *nec mensis* , *nec annus* , *immo vix integrum seculum* , *sicuti ad describendas innumeras virtutes ipsius non paginæ* , *non libelli aut libri* ; *sed spatiosa potius volumina omnino requiruntur*. (*a*)

Istoria Prima.

La Signora *Teresa P*..... maritata , d' anni 20. il dì 16. di Giugno dell' anno 1779. fu presa dalla febbre, con forti dolori del dorso , e con inclinazione al vomito . Il terzo dì si spiegarono nella faccia moltissime pustulette somiglianti ai morbilli , con vaniloquio. Il quarto dì le pustule si fecero vedere per tutto il restante del corpo; e segnarono un Vajuolo chiamato *confluente* . In questo giorno prese un purgante , e le fu tratto sangue . Nel quinto dì le pustule si alzavano , ma aspre e rosse fuor dell' usato: crebbe la febbre nella sera con notabile affanno di respiro di breve durata. Nel sesto stette il male sul medesimo piede. Nel settimo d' improvviso biancheggiarono nella faccia le pustule , una nell' altra entrando e confondendosi con poca materia . Nell' ottavo biancheggiarono con poca mate-

(*a*) Disp. Pharm. R. Veget. cap. 7.

ria le pustule del resto del corpo. Nel nono si abbassarono, e cominciarono a disseccarsi nella faccia e per tutto. Quindi nel decimo insorse una nuova febbre, che rialzò le pustule, e le riempiè di marcia, restandone alcune di sanguigne e livide. Nell'undecimo tornarono nella faccia a disseccarsi; scorrendo a piccoli laghetti la bianca sottil materia di sotto alla cute. Nella sera di questo dì sopravvenne un parossismo di febbre, per cui di questa vita passò. Usati in darno in tutto il decorso del male i più appropriati rimedj diluenti e rinfrescativi.

Istoria Seconda.

La Signora Contessa *Bianca G.....* vergine, di anni 21. il dì 4. di Settembre dell' anno 1779. fu presa da acuta febbre con forti dolori negli arti inferiori, per cui le fu tratto sangue; ed il giorno dopo fu purgata. Il terzo dì apparvero nella faccia alcuni segni, come di morbilli, i quali dimostrarono apertamente nel quarto un Vajuolo del genere de' *confluenti*. Sino all' ottavo stette il male sul medesimo piede: allora d'improvviso, una nell'altra entrando, biancheggiarono le numerosissime pustule: molte veggendosene di livide e sanguigne. Si apersero gli occhi da prima chiusi, e cominciava la pelle a corrugarsi ed appassirsi: restando viva la febbre e moleste le veglie. Nel nono giorno prescrissi una forte decozione di due once di scelta Chinachina, da prendersi in due giorni, più volte al giorno. Quantunque nella sera si aumentasse la febbre, dormì tranquillamente; e la mattina del decimo giorno era alquanto sollevata. Ma con mio stupore la trovai enormemente ensiata nella testa, e nel restante del corpo tutto, come se fosse idropica; con gli occhi nuovamente chiusi, con le pustule rialzate, e con laghetti di materia scorrente sotto la cute. Nell' undecimo seguitò a migliorare in tutto benchè durasse la febbre; e

si mantenesse gonfia la pelle . In questo e ne' seguenti giorni prese solamente due dramme di polvere di Chinachina ; nel qual tempo si andò a poco a poco condensando e disseccando la materia alla cute; caddero dal volto grossissime scaglie , e poco dopo tutto il restante del corpo si mondò con intollerabil fetore , e con un molesto prurito nel volto , dove furon trovati annidati sotto alle croste innumerevoli vermi . Non succedè diarrea, non comparvero tumori , nè urine corrotte nella convalescenza; tantochè nei primi di Ottobre potè sortire di casa . Usò anche questa nel decorso del male rimedj diluenti e rinfrescativi; e benchè questa e quella cadessero inferme in diversa stagione , era però nel tempo del loro male il caldo a un grado stesso poco maggiore del temperato.

Questi due casi , quanto può essere morbo a morbo simile, erano fra di loro del tutto somiglianti, benchè di esito felice l'uno, e l'altro fatale. Rappresentavano una specie stessa di Vajuolo maligno e *confluente*, in una stessa *Costituzion Epidemica*, in uno stesso grado di calore, in persone della stessa età , sesso e temperamento; e trattati furono amendue dal principio al progresso del male con metodo stesso *antiflogistico*, anzi con la specie stessa di governo e medicamenti. Nel fine in ciò solo fu differente la cura, che in uno fu usata la Chinachina, nell'altro non fu usata. Il malo esito del primo di questi due casi , succeduto nel tempo dell'infievolimento delle pustule, già compiuta la suppurazione, ha fatto me sollecito nel secondo del tutto simile , a cercare nella Chinachina un pronto soccorso in questo critico tempo pericoloso , per cui la materia alla cute generata, o tutta o in parte almeno, fosse impedita di rientrare a guastarne il sangue e ad offendere le viscere con la sua venefica putridità. Quantunque io sapessi che il gonfiamento del viso e delle mani nel tempo della suppurazione del Vajuolo è un ottimo segno secondo

la pratica, e ſecondo l'avviſo degli Scrittori; pure l'effetto della Chinachina immediatamente ſucceduto, di rigonfiare per la ſeconda volta il viſo e le mani ed il corpo tutto enormemente, tennemi per alquanto tempo dubbioſo e ſoſpeſo; ſinchè veggendo ceſſare con eſſo gli altri ſintomi minaccioſi del Vajuolo, ſenza che ſuccedeſſero nuove febbri, o diarrea, o urine marcioſe, o tumori e aſceſſi nelle parti, fui aſſicurato che l' effetto della Chinachina da me tentato corriſpoſe veramente alla mia aſpettazione; e che la materia ritenuta ſempre alla cute, e al di fuori addenſata e *concreta*, fu per la forza ſtringente della Chinachina impedita di rientrare.

Benchè nella volgare pratica di Medicina non ſia introdotto di uſare la Chinachina nel Vajuolo; non è però che da molti Autori non ſia approvato e raccomandato il ſuo uſo.

Riccardo Morton fu il primo a parlare della Chinachina nel Vajuolo. Se nel tempo della declinazione del Vajuolo, dic' egli, la febbre recidiva ſi ſveſte di malignità, e acquiſta periodi di eſacerbazione e remiſſione, per niun' arte meglio ſi cura, quanto coll' uſo della Chinachina. (*b*)

Il *Freind*, ſcrivendo ſull' uſo de' purgativi nella ſeconda febbre del Vajuolo, dice che alcuni Medici in quel tempo pretendevano di prevenir felicemente la ſteſſa febbre con l' uſo della Chinachina; di che egli però grandemente dubitava. (*c*)

Il *Frewin* riferiſce di un Vajuoloſo già mondato dalle croſte, e ancor febbricitante, cui la Chinachina non ſanò; ma guarì coi purgativi. (*d*)

(*b*) Op. tom. 3. cap. 10.
(*c*) De Purg. in ſec. Var. febr. p. 102.
(*d*) In *Freind*, de febr. com. 7.

Il *Bate* dice di aver usata la Chinachina in una febbre secondaria del Vajuolo, ma inutilmente. (*e*)

Questi quattro Scrittori fiorirono sul finire del passato secolo, e nel cominciamento di questo che corre. Onde errò *Morando Morandi* allorchè scrisse, che il Sig. *Monrò* fu quello che estese *la virtù della Chinachina sopra il Vajuolo, e primo ne ha sperimentato il buon esito* (*f*): mentre questo Scrittore di questo parlò poco prima del 1740. ne' *Saggi d'Edimburgo*, come ora vedremo.

Alessandro Monrò fu il primo ad usare la Chinachina nel Vajuolo per altro fine, che per frenare la seconda febbre di esso. „ L'effetto della Chinachina, dic' egli, „ in procurare una dolce suppurazione, mi ha fatto pen„ sare di poterla usare ne' Vajuoli di cattivo caratte„ re, tanto allorchè la suppurazione delle pustule non „ dimostrava stabilirsi, com'è necessario; quanto allor„ chè compariscono con minaccie di cancrena. Ho avu„ ta la contentezza di vedere in molti malati di Va„ juolo l'effetto della Chinachina riuscire a seconda del „ mio proposito. Le pustule prima oppresse si sono riem„ piute di materia; la sania serosa si è convertita in „ una marcia spessa e bianca, e le macchie purpuree „ hanno mutato colore, sono divenute insensibilmente „ più pallide, e finalmente disparvero. Diedi da prin„ cipio la Chinachina in decozione, e poi in estratto: „ in seguito lasciai queste deboli preparazioni per appi„ gliarmi alla Chinachina polverizzata mescolata con „ qualche siroppo cordiale, e con acqua destillata aro„ matica, e in questa forma ne ordino dai dieci fino „ ai quaranta giorni, replicandola ogni quattro o cin„ que ore. Finora non ho data la Chinachina nel Va„ juolo se non dopo l'eruzione delle pustule, e ne ho

(*e*) In *Freind*, de Purg. ecc. p. 109.
(*f*) Della Cura del Vajuolo p. 21.

„ fatto continuare l'uſo ſino a tanto che furono intie-
„ ramente diſſeccate ; ma ſono perſuaſo per gli effetti
„ che l'ho veduta produrre per mitigare i ſintomi del-
„ la febbre ſecondaria, che ſe ſi daſſe nel tempo dell'e-
„ ruzione, potrebbe contribuire a rendere il Vajuolo
„ di una ſpecie più favorevole. *(g)*

Il Dott. *Flemyng*, in un ſuo progetto, in cui s'impegna di far eſaminare e diſcutere da alcuni altri, tutto quello che i Medici proporranno per l'avanzamento della Medicina, e che ſtimeranno poter eſſer utile, propone di eſaminare gli effetti della Chinachina nel Vajuolo, e ne raccomanda l'uſo, che con ſuo piacere ha veduto praticare dal Sig. *Monrò*. *(h)*

Il Dott. *Wall* è l'unico che abbia ſcritto particolarmente ſu queſta materia, in una Memoria inſerita nelle Tranſazioni Filoſofiche d'Inghilterra *(i)*. Come il ſuo Opuſculo è rariſſimo, e ſcritto in idioma a pochi noto, non ſarà diſutile il dar qui di eſſo una idea alquanto più eſteſa e circoſtanziata. Le aſſerzioni del *Monrò* e le ſue promeſſe moſſero il Dott. *Wall* a far uſo della Chinachina nel Vajuolo, ed in ogni tempo di eſſo, a fine di ottenere una buona e lodevole ſuppurazione. Ma egli è paſſato avanti: e conſiderando gli uſi della Chinachina in altri mali, dove la craſi del ſangue trovaſi rotta e ſcompoſta, ſingolarmente nelle febbri petecchiali e porporate, accompagnate da emoragie ed altri terribili ſintomi, ſperò che doveſſe eſſere molto utile nel Vajuolo, bene ſpeſſo da tali circoſtanze peſſime accompagnato. Veggiam ora a parte a parte i ſucceſſi delle ſue prove in alcuni caſi da eſſo narrati.

Caſo Primo. Un Gentiluomo di anni 24. ſi ammala dopo un violento ballo. Se gli cava ſangue infiammato;

(*g*) Saggi di Edimb. tom. 5. art. 10.
(*h*) Saggi d' Edimb. tom. 7. art. 1.
(*i*) The philoſophical Tranſactions abridged, vol. the tenth. p. 1035.

ſi purga con manna, e beve un decotto nitrato. Vien chiamato il terzo giorno il Dott. *Wall*. Le puſtule erano numeroſiſſime con porpora, ſcorreva il ſangue dal ſeceſſo, ſputava bene, ed il polſo era frequente e debile: e gli dolevano i lombi. Preſcriſſe uno ſcrupolo di Chinachina ogni due o tre ore, e per bevanda ordinaria una tintura di roſe acidulata. In quarantaotto ore diſparve la porpora, ceſsò la emoragia; ſi ſollevò il polſo, e ſi ſe più raro, e le puſtule ſi alzarono. Sino al nono dopo l'eruzione tutto andò bene, in qual tempo ſeguitò ad uſare la Chinachina, e prendeva la ſera lo ſciloppo di Meconio. Dopo ſi ſe ſonnacchioſo, e morì nello ſteſſo giorno.

„ Benchè, ſoggiunge l'Autore, in queſto primo eſem-
„ pio ſia l'infermo miſeramente perito, ciò non oſtan-
„ te io ſon contento del buon effetto prodotto dalla
„ Chinachina.

Caſo ſecondo. Vien chiamato il Dott. *Wall* da un Giovane di anni dodici, da ſei giorni ammalato di Vajuolo. Queſto era del genere de' *confluenti* con bolle ſanguigne, con petecchie e porpora; e con un moleſto prurito nel naſo che minacciava emoragia. Per l'addietro avea delirato, e il ſuo polſo era debile e tremolante. Gli ordinò ogni tre ore uno ſcrupolo di eſtratto di Chinachina, ed una bevanda con olio di vitriolo e ſciloppo di ſambuco. Dopo aver preſe due dramme di Chinachina, diſparvero le petecchie e la porpora; ſicchè continuò dopo ſino al fine della malattia l'uſo della Chinachina. Crebbero le puſtule in grandezza a tal ſegno che ſembrava il Vajuolo del genere de' *diſcreti;* e la pelle molto ſi gonfiò per la quantità della marcia. Guarì felicemente l'infermo.

Caſo Terzo. Ad un Giovane di anni 21. dopo il ſecondo dì comparve un Vajuolo con ſpeſſa porpora, con violenta uſcita di ſangue dal naſo, e con atroce dolore di lombi. Fu medicato dal Dott. *Wall* con lo ſteſ-

ſo

so metodo, col quale medicò l' infermo in secondo luogo descritto; e guarì com' esso felicemente.

Caso Quarto. Un Giovane d' anni 24. dopo un violento esercizio su preso da' sintomi del Vajuolo: dolori di ventre e difficoltà di respiro. Il Dott. *Wall* chiamato nel terzo giorno, vide la sua pelle coperta di porpora, ed avea un polso piccolo e vibrante. Prescrisse un salasso dal braccio, ed ordinò l' estratto di Chinachina, con allume crudo, acqua di cannella, e sciloppo di cotogni. Il dì dopo migliorò, facendosi il polso pieno e regolato, e levandosi le pustule del Vajuolo, e scomparendo la porpora. Succedè la diarrea con urine rossiccie; onde lasciato l' allume, gli ordinò la terra Giaponica coll' estratto di Chinachina e sciloppo di Meconio la sera: continuando i quali rimedj guarì prestamente.

Caso Quinto. Un Giovane di anni 21, preso dal Vajuolo era ridotto nel sesto giorno ad un pessimo stato, avendo numerose petecchie, e una gamba intaccata di cangrena. In questo giorno fu chiamato il Dott. *Wall*, e gli ordinò mezz' oncia di estratto di Chinachina con due scrupoli di allume crudo. Il dì dopo scomparvero le petecchie: si fermò, e separò la cangrena; e continuando lo stesso metodo di cura con null' altro guarì perfettamente.

Caso Sesto. Una sorella di questo Giovine, di anni 19. fu attaccata dal Vajuolo *confluente* con petecchie e porpora, con emoragia uterina, dolor de' lombi, ed estrema debilità. Prese la Chinachina coll' allume in tutto il decorso del male, con lo stesso metodo; e senz' altro guarì.

„ Uno però dei più rimarcabili esempj, segue l' Au-
„ tore, di quanti mi occorsero, dimostrativi della effi-
„ cacia della Chinachina in questa terribile malattia,
„ ed in tutto il tempo della stessa, si è il seguente:

Caso settimo. Una Fantesca presa da' sintomi del Va-

juolo, fu salassata. Due giorni dopo l'eruzione chiamato il Dott. *Wall*, trovò le pustule numerosissime, piccole e rognose; con porpora frammessa. Gli occhi eran lagrimosi, con un aspetto di viso triste ed affannato (sintomo non badato da' Medici, ma pur terribile e paurosо ne' morbi acuti). Avea mal di gola, delirio, diarrea, emoragia uterina, con un polso frequente e ristretto, cosicchè parea vicina a spirare. Le fece prendere Chinachina con allume, quanta più ne poteva inghiottire. Dopo dodeci ore inghiottiva più liberamente, e prese in un giorno mezz'oncia di estratto di Chinachina con due scrupoli di allume crudo. Continuò a prender la Chinachina senza allume per altri tre o quattro giorni: in quel tempo scomparvero la porpora e la emoragia, si alzarono le pustule e sputò assaissimo. Tutto andò bene fino al sedicesimo dopo l'eruzione. Allora sotto falsi pretesti ingannando la custode, annojata trascurò di più oltre medicarsi. Fu portentoso il danno seguito da questa trascuranza. Il suo polso si fe frequente e debile, gli umori acquistarono un sommo grado di corruzione, d'onde ella morì tutta sfracellata nel vigesimo giorno del male.

„ Da questi pochi esempj, conchiude l'Autore, e da „ altri molti che io potrei addurre, si possono cono- „ scere i sorprendenti effetti della Chinachina nel Va- „ juolo. L'ho prescritta a molte persone nei primi „ giorni del male, quando prima del Vajuolo erano da- „ te fuori le petecchie; ed in altre nel tempo primo „ della suppurazione, quando la materia era ancor cru- „ da ed acquosa, e posso dire con verità, quasi sem- „ pre con buon successo. Ora io son solito a continu- „ are l'uso per tutto il tempo della malattia, finchè „ è ben netta dalle scaglie la pelle. In questo ultimo „ tempo occorrendo nettare le prime strade, frammez- „ zo ai purganti ordino io la Chinachina, finchè tro- „ vo che le fibre sono spossate, e gli umori tenui ed

„ acrimoniosi. Venendo io chiamato a visitare infermi
„ con petecchie, porpora, miliare, emoragia, o che
„ trovi in essi la crasi del sangue distemperata, o che
„ siano in pericolo di vita, immediatamente loro pre-
„ scrivo la Chinachina. Non bado che il polso sia pie-
„ no, credendola necessaria tanto nel polso vigoroso,
„ che nel debile; per essere cosa evidente che in questi
„ casi le fibre sono rilassate, e gli umori tiranti ad una
„ putrida acrimonia. In molti di quelli, a' quali io ho
„ ordinata la Chinachina, ho trovato più pronta del
„ solito la maturazione delle pustule, e tutto il corso
„ del male di molto abbreviato; ch'è una particolari-
„ tà molto osservabile. Io d'ordinario uso l'estratto del-
„ la Chinachina (composto con la bollitura della stessa e
„ qualche sale alcalino insieme) e questo lo stimo da
„ preferirsi alla Chinachina in sostanza; perciocchè sen-
„ za diminuire di forza si ha in esso il vantaggio di
„ aggravar meno lo stomaco degl' infermi. Ne' bambi-
„ ni, e nelle dilicate persone che si potrebbono offen-
„ dere dal sapore di questo rimedio, si può loro por-
„ gere dentro il cioccolatte; che se è composto con
„ molto zucchero serve più d'ogni altra cosa a confon-
„ dere l'amarezza della Chinachina.

Il Dott. *Huxham* loda la Chinachina come rimedio di preparazione nel primo ingresso del Vajuolo; ma solo dove debili sono le fibre, e dov'è tenue ed acquosa la costituzion degli umori. Più volentieri la prescrive nella declinazion del Vajuolo in certe specie di esso.
„ Io uso, dic'egli, d'ordinario la tintura di Chinachi-
„ na alessifarmaca, resa acida coll'elisire di vitriolo, e
„ poi passo alla decozione di essa, ovvero al suo estrat-
„ to. Siami però lecito di avvertire che per nessun mo-
„ do si prescriva dove il respiro è affannato: e dove il
„ il ventre è stitico ed ostrutto, finchè questi sintomi
„ non siano levati. Credasi pure che la tintura di Chi-
„ nachina alessifarmaca nel Vajuolo, specialmente lin-

„ fatico, è utilissima, purchè si dia dopo l' intiera com-
„ parsa delle pustule, a facilitare la maturazione di esse:
„ com' è pur certo che questo rimedio procura una lode-
„ vole suppurazione nelle ulcere di cattivo carattere. (*k*)

Il Dott. *Mead* loda la Chinachina in una certa specie di Vajuolo, da lui detto *sanguigno*, all' effetto d' ingrossare il sangue, affinchè non possa scappare da' minimi vasellini. Così la loda dove la terzana doppia o semplice al Vajuolo si aggiunge, ricordando che non nuoce essa alla maturazion delle pustule: a cui anzi giova frenando i movimenti febbrili, che la disturbano. (*l*)

Il *Roncalli* accorda che sul finir del Vajuolo la Chinachina possa adoperarsi, ma la crede dannosa nel principio: rimprovera però l' *Elvezio* perchè l' abbia al principio prescritta nella sua polvere febbrifuga. Ma l' *Elvezio* non è da numerare fra gli Autori che ricordano l' uso della Chinachina nel Vajuolo, mentre nella sua polvere febbrifuga non ha verun luogo questo medicamento, come crede il *Roncalli*. (*m*)

Morando Morandi ha stampato un libro con lo spezioso titolo: *Della Cura del Vajuolo con la Chinachina e col bagno tiepido*. Poche parole però in tutto il decorso del libro si leggono in proposito dell' uso della Chinachina nel Vajuolo. Dic' egli che in una epidemia dell' anno 1737, ed in una dopo del 1741, non stette egli guari tempo a consigliar tutti gli amici, e sino le più abbiette cenciose madri, che ai loro figliuoli facessero giornalmente ingojare uno scrupolo di Chinachina entro un po' d' acqua o di vino; ed a quei bambini che nol volevano s' ingegnassero di porre un giorno sì e l'altro no un cristeo fatto coll' infusione della Chinachina al peso di una dramma bollita nell' acqua pura, e ne

---

(*k*) Differt. de Variol.
(*l*) De Var. & Morb. cap. 3. & 4.
(*m*) Europ. Medic. p. 58.

continuassero giusta la bisogna il buon uso. Con che soggiunge, e con la cavata anche più volte reiterata di sangue, e col bagno tiepido, e con esattissima dieta, e con bere soventi fiate del latte bollito con entro un po' di zucchero, nel decimo o undecimo giorno, e ben rade volte più tardi, gli venne sempre veduto cader riseccate senza smania d'alcun prurito le croste de' flemmoni, e nel decimo quarto dì senza butteri nel viso tutti pur anche gli ammalati perfettamente guarire. Passando poi il dotto Autore a render ragione de' vantaggi che si riportano dalla Chinachina nel Vajuolo così discorre. ,, Nel Vajuolo dal principio acre-stimolante ,, infiammatorio non tentasi che d'accoppiar soluzioni, ,, le quali diminuiscono il numero de' globetti pian- ,, ovali sventandoli, e poscia vanno a depositarsi tutte ,, per mezzo di flemmoni alla pelle. Comechè però ,, l'essenza di tali depositi è in ragione della qualità, ,, e della quantità de' globetti stessi, così egli è mestie- ,, ri o mantenerli, o reclutarli. A ciò ottenere non ,, avvi rimedio migliore della Chinachina, come ama- ,, ricante-stiptico, perchè con questa, al dire del *Boe-* ,, *rhaave* nel suo Trattato della forza de' Medicamen- ,, ti, ridonasi la perduta elasticità ai vasi, s'accresco- ,, no le velocità ai fluidi, e quindi quel natural calo- ,, re, che da' globetti pian-ovali vuolsi tutto dipen- ,, dere, e perchè secondo l'osservazione d'*Ecquet* nella ,, sua Patologia, s'aggiunge momento agli stessi, e se ,, ne aumenta il numero. (*n*)

Il *Lieutaud* dice che ove nel Vajuolo succede una febbre doppia terzana, o altra intermittente, bisogna ricorrere alla Chinachina; della cui virtù in simiglianti casi da replicati sperimenti siam fatti bastantemente sicuri. (*o*)

(*n*) Della Cura del Vajuolo p. 72.
(*o*) Prax. Med. part. 2. sect. 4.

Il *Vanſwieten* parla bensì della Chinachina nel Vajuolo; ma non adduce eſperienze proprie nè ragioni: e ſol riportaſi ad altri Autori. (*p*)

Nel Giornale Medico Franceſe vien lodata la Chinachina nel Vajuolo di una maligna natura. (*q*)

Boiſſer de Sauvages dice che ſe dopo l'efficcazion delle puſtule reſti una febbre remittente, ſi debba uſare la Chinachina. (*r*)

Il de *Haen* racconta di una Fanciulla, che avea un Vajuolo *confluente* e maligno, cui fu data la Chinachina nell' undecimo giorno, e morì. Poi parla di un' altra che avea una ſuppurazione al petto, diſſenteria, ſcarlatina, miliare e Vajuolo inſieme, alla quale ha data la Chinachina due giorni dopo la comparſa del Vajuolo, e morì nel quinto. Nel primo di queſti due caſi, ſoggiunge l' Autore, mitigò la Chinachina il male, ma non giunſe a conſervare la vita: forſe per eſſere ſtata troppo tardi preſcritta. Nel ſecondo caſo preſcritta più per tempo, prolungò per poco la vita, che ſtava per eſtinguerſi, moderò i ſintomi del male, e le reſtituì tranquillità e forze. Segue un terzo caſo di una Donna maritata aſſalita dalla febbre, contro cui fu preſcritta la Chinachina: ſotto l' uſo della quale diede fuori un Vajuolo, che fu benigno e *diſcreto* e finì in bene. Dal qual caſo, ad opinione dell' Autore, due coſe s' imparano: la prima, che la febbre contagioſa del Vajuolo può eſſere del genere delle intermittenti. La ſeconda, che la Chinachina preſa nel più feroce corſo contagioſo di Vajuolo con ottimo ſucceſſo produſſe un Vajuolo di benigniſſima indole. (*ſ*)

Il *Torraca* narra di un fantolino preſo da un Vajuo-

(*p*) In Boerh. aph. 1402.
(*q*) V. *Sauvages*. Noſol. tom. 1. p. 226.
(*r*) Noſol. tom. 1. p. 224.
(*ſ*) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

lo *confluente*, degenerato in una universale cangrena, brevemente e felicemente con suo stupore da lui curato con la Chinachina. (*t*)

Lo *Storchio* varie maniere di medicamenti prescrive nel Vajuolo, ne' quali entra la Chinachina, non tanto per ovviare alla febbre, quanto per ravvivare le forze dell' ammalato, per fare ostacolo alla putrefazion degli umori, e alla loro dissoluzione: in que' casi principalmente dove le pustule si mantengono poco elevate, dove il colore di esse è rossoscuro, e fra esse la pelle è floscia o livida, dove se pur elevate sono hanno bassa e piana la sommità, o ben anche l' hanno livida o nera, dove pustule si frammischiano livide e nere, dove l' urina puzza oltre l' usato, o è torbida per misto sangue disciolto, e nerastra. (*u*)

Il *Tissotti* dice in un luogo d' aver provata inutile la Chinachina usata come rimedio preservativo nell' Innesto del Vajuolo, anzi dannosa. (*x*)

Ma altrove, nelle Lettere, così ne parla. „ Altri „ insinuano la Chinachina, quale non vorrei che nel „ Vajuolo fosse defraudata dalle sue lodi: ma confesso „ che nella secondaria più grave dopo esser anteceduto un vero morbo infiammatorio, non ancora l' ho „ usata, perchè giammai ho veduto potersi sicuramente propinare. E nell' urinare cruento vorrei che si u- „ sasse con cautela. Al certo sembra non corrisponde- „ re a tutte le indicazioni della febbre secondaria, e „ ad alcune è manifestamente contraria. Ma giova mol- „ to siccome nelle febbri maligne, così in quel mali- „ gno Vajuolo, il quale mostri le fibre lasse, un san- „ gue disciolto e putrido, ed una somma debolezza,

---

(*t*) Specim. Experim. art. 5.

(*u*) Medicinisch-practischer Unterricht, erster Theil, von den Pochen, oder Blattern. Seite 267.

(*x*) Dell' Innesto prat. del Vajuol. cap. 1.

„ e continuamente minaccia cangrena per il ſangue vap-
„ pido e putredinoſo. Allora in tutto il decorſo della
„ malattia preſa ogni giorno alla doſe di tre, quattro
„ o cinque dramme ſelicemente il morbo cura. In un
„ ragazzo di dodici anni dopo una crudeliſſima ma-
„ lattia, eſſendoſene caduta una parte della maſcella in-
„ feriore, egregiamente terminava la cura, propinata
„ a frequenti e minime doſi; e nel tempo medeſimo
„ in luogo di alimento prendendo il latte di vacca, ed
„ a cucchiajate. Giova eziandio contro quella febbre
„ lenta, la quale rimane alle volte dopo qualche Va-
„ juolo, o graviſſimo, o malamente curato, o mali-
„ gno; e così allontana la tabe. In fine ſi preſcrive
„ con grandiſſimo utile, ſe ſiccome ho veduto al Va-
„ juolo vi ſi aggiunge la febbre intermittente: in tutti
„ gli altri caſi, purchè ne apporti qualche poca, è
„ ſempre di minor utilità. (*y*)

L' *Anonimo* Franceſe nel Dizionario Compendioſo di Sanità ricorda: che quando i bottoni cominciano a biancheggiare, ſopraggiunge una ſpezie di febbretta, che ſi chiama ſecondaria. Si uſi allora una decozione di Chinachina. La Chinachina ſi è propriiſſima per promovere la ſuppurazione, e per conſeguenza per maturare le puſtule. (*z*)

Il *Sografi*, parlando del modo di operare della Chinachina in certe malattie paſſa a dire: „ Non poſſia-
„ mo dubitare, che la Chinachina nel ſiſtema de' lin-
„ fatici con particolare virtù non diffonda i ſuoi prin-
„ cipj ſalubri. E quindi ci ſembra dover intenderſi,
„ perchè nelle febbri peſtilenziali, e maligne, nel Va-
„ juolo, ſiccome porta la ſperienza del *Morton*, l'uſo
„ della

(*y*) Della Cura del Vajuolo. num. 67.
(*z*) Verb. *Vajuolo*.

„ della Chinachina ſia giovevole : eſſendo quelle ma-
„ lattie dipendenti dal diſordinato moto della linfa, e
„ dalla viziata qualità di eſſa, ed eſſendo quel rime-
„ dio con particolare qualità atto a diffondere per lo
„ ſteſſo ſiſtema de' vaſi le forze ſue. (*a*)

Queſti ſono i nomi degli Autori, i paſſi e i luoghi nelle lor opere, i quali mi è riuſcito di trovare e raccogliere nel propoſito della Chinachina nel Vajuolo. Vedeſi qui in un colpo d' occhio uſata la Chinachina prima d'inneſtare il Vajuolo, per farlo naſcere di una benigna indole. Vedeſi uſata a moderare le prime febbri, acciocchè queſte non impediſcano o ritardino la comparſa delle puſtule alla pelle. Vedeſi uſata, comparſe le puſtule, per ſollevarle ſe foſſero troppo baſſe e piccole. Vedeſi uſata per farle preſto paſſare ad una buona e lodevole ſuppurazione. Vedeſi uſata a fare che le croſte preſto cadano, e laſcino minori difformità nel viſo. Ad altri fini ancora ſi vede uſata nel tempo del Vajuolo: a togliere cioè e far ſcomparire le macchie di porpora o le petecchie che s' intrometteſſero alle puſtule; a riunire i globetti del ſangue rotti e ſtemperati dal fervore del morbo infiammatorio; a correggere non ſo quali diſordini nel moto e qualità delle linfe; a rinvigorire le fibre debili e laſſe, a dar corporatura agli umori rotti e diſciolti; a togliere ed impedire la cangrena delle puſtule e delle membra; a togliere in fine o moderare le ſuccedanee febbri o periodiche, o infiammatorie o lente. Vedeſi così adoperata nel principio, aumento, ſtato, e declinazione del Vajuolo; e ben anche nel tempo ad eſſo precedente, e ſuſſeguente: facendo fare ad un rimedio ſolo e ſempliciſſimo le varie e nobili figure di *profilattico*, d' *antiflogiſtico*, di *aleſſi-*

(*a*) Diſſert. ſopra il Queſito : *Se nel caſo* ecc. num. 27.

farmaco, d' *incraſſante*, di *cardiaco*, di *ſuppurativo*, d' *antiſettico*, di *correttivo*, d' *anticangrenoſo*, d' *antifebbrile*, di *coſmetico*; in un male ſolo e ſempliciſſimo, qual è il Vajuolo.

Io non ſon qui per fare encomio, o critica a veruno di queſti uſi; laſciando la coſa come ſta; e a chiunque libero l' appigliarſi a quella pratica de' nominati Scrittori, a cui più piace appigliarſi. Quel ch' io dico ſi è che io per niuna autorità di Scrittore, nè da perſuaſione di veruna loro opinione moſſo, ſon paſſato ad uſare la Chinachina nel Vajuolo; ma per un fine del tutto nuovo, da veruno di eſſi non preveduto: il quale, ho coraggio di aggiungere, ſi è inſieme il più deſiderabile e utile, ed il più naturale inſieme, e meno ricercato e dubbioſo.

Queſto è di oſtare con la forza ſtitica e coſtrettiva della Chinachina al riconcentramento della materia Vajuoloſa, compiuta la ſuppurazione.

Che una forza ſtitica e coſtrettiva nella Chinachina ſi trovi, non è da metterſi in dubbio; appaleſandoſi queſta al palato, ed all' occhio, nel reſtringere che fa e raſſodare le carni e pelli degli animali. Che con queſta ſua facoltà principalmente operi nel corpo noſtro i portentoſi effetti che ſi vede in varj morbi operare, lo affermano concordemente i Pratici più eſperimentati. Alle autorità dell' *Ettmullero*, del *Baldinger*, del *Carteuſer*, altrove addotte (*b*), baſterà qui aggiungere quella dell' *Offmanno: Eſt vero inter hujus corticis elementa primo loco connumerandum adſtrictivum* (*c*). *Notiſſimum autem, corticem Chinæ vel ipſo ſapore teſte plurimas cuſtodire terreas, fixas, cum ſubtili acido nuptas partes, unde ſaporis etiam & virtutis adſtringentis eſt* (*d*). Non

(*b*) Differt. noſtra ſopra il Queſito: *Se nel caſo* ecc. p. 8. e 12.
(*c*) Differt. Seleſt. decad. 2. Differt. 4.
(*d*) Obſ. Pract. ſup. tom. 10. p. 238.

vale opporre, che se gli stupendi effetti che in certi morbi produce la Chinachina provenissero dalla sua facoltà costringente, gli stessi effetti e migliori vedremmo seguire all'uso di altri molti nostrali rimedj, specialmente nelle febbri periodiche e intermittenti; i quali senza dubbio sono più forti stitici e costrettivi di essa: quel che però in pratica non si osserva avvenire. Perciocchè, come si esprime il *Redi (e)*, in Medicina non vale la regola del tre, perchè se quattro giova, otto può nuocere. Una moderata forza stitica può essere talvolta più giovevole che una eccedente; o perchè più tardi e dentro si spieghi nelle vene, o perchè non chiuda a sè stessa l'adito di penetrare. Quanto alle febbri poi, che gli stitici non giovino come la Chinachina a fermarle; questo è assolutamente falso, passando essi pure per febbrifugi, e valendo qualche volta a fermare una febbre, contro cui la Chinachina non valse. Sentiamo ancora l'*Offmanno*: *Confirmatur hæc sententia vel ex eo quod alia styptica adstringentia ex fixa terra & acido composita simili fere virtute cum cortice Chinæ in debellandis febribus, vel earum paroxismis suspendendis splendeant, sicuti id notum est de radice pentaphylli, plantaginis, cortice fraxini, visco quercino, radice & extracto tormentillæ, alumine, liquore martis styptico, tinctura martis Hassiaca, & hujus generis similia. (f)*

Quanto al Vajuolo poi, universalmente parlando si osserva che il tempo di esso il più pericoloso e fatale si è quando, compiuta la suppurazione, comincian le pustule a restringersi ed appassirsi: quel che avvien d'ordinario fra il sesto e l'ottavo giorno, da che sono alla cute comparse. Questo pericolo v'è dunque ragion

(e) Lett. tom. 4.
(f) Obs. Pract. sup. tom. 10. p. 238.

di credere che proceda dal riconcentramento della materia delle pustule : per cui si facciano mortali decubiti nelle viscere, o le cavità s' inondino, o si corrompano gli umori, o s' intacchino le parti ferme e l' ossa. Or in questo più pericoloso e fatal tempo del Vajuolo, qual sarà il più indicato e valevol rimedio, se non cercar d' impedire al possibile, ed il più presto che si possa, il concentramento della materia vajuolosa? E qual medicamento a ciò può essere più pronto e più efficace di uno stitico temperato, confacente ad ogni età e temperatura di uomo, tenace della propria indole; che possa quindi penetrar nelle vene, e chiudere gli osculi e i vasellini d' onde la pessima materia può ritrocedere dalla cute, e dentro intrudersi, o venir assorbita? Questo desiderato rimedio e celeste medicamento si è appunto la Chinachina.

Io so che qualche Autore ha avuto l' ardimento di negare assolutamente questa ritrocessione della materia del Vajuolo. *Quando circumferentia, sive margo pallescere incipit*, scrive il *Violante*, *malum portendit, materia enim quæ ad pustulas afferri debuerat, ob crassitiem inertiamque, minime in ipsas importatur (tunc variolas retrocedere aniculæ & indocti clamant, quasi materia a peripheria ad centrum recedat) eo magis si pustularum elevatio, quando margines jam pallescunt, parum deprimatur: Sed evolat ac continuo detrahitur aliquid a pustulis; quibus cum nihil imposterum addatur, depressæ apparent.* (*g*) Questa ritrocessione però, o per meglio dire questa intrusione della materia vajuolosa, (giacchè non è probabile che sian piene le pustule di sola materia ad esse dal sangue tramandata, come vuole il *Violante*, ma che più sian piene di materia ivi alla cute generata, di che dan segno l' infiammazion previa, e le

(*g*) De Variol. & Morb. num. 92.

fuſſeguenti cavità che reſtan nella cute) non è frivola credenza e volgare pregiudicata opinione ; ma oltrechè è pienamente dimoſtrata poſſibile dall' ordinario riconcentramento e paleſe della materia di altri tumori alla cute ſuppurati , che ſpeſſo eſce per urina , o altrove traſportaſi , è ben anche creduta ed affermata da quaſi tutti i Pratici più aſſennati e ſperimentati . Che propriamente non trattaſi qui di una materia delle puſtule craſſamentoſa ed inerte , qual ſuppone il *Violante*, ma di eſſa reſa ſottile per la putredine, o della parte ſottile e ſieroſa di eſſa; che quantunque tale può eſſer dotata di ſomma acrimonia e veleno ſità . Trattaſi in corto dire di quella ſteſſa materia che il *Violante* vuole che sfumi e ſvapori dalle puſtule quando ſi appaſſiſcono , e non vien loro altra materia dal ſangue tramandata . Che ſe, per opinione di queſto Autore, dalla cuticola trapela e sfuma eſſa materia, la qual cuticola dagli Anatomici è conſiderata , quaſi come un callo della cute , ferma e dura; come non potrà penetrare all' interno in ſito molle e poroſo, e in canaletti per la ſuppurazione aperti e logori ? Che ſe l' impeto degl' interni umori che girano s' oppone; l' aria eſterna , e la naturale elaſticità e contrattilità delle fibre favoriſcono alla intromiſſione delle materie che ſono alla pelle : altrimenti in iſtato di miglior ſanità i fluidi ſi diſperderebbono in pochi momenti sfumati e ſgorgati dovunque dalla ſuperficie del corpo .

Ma laſciamo da parte queſte teorie per quanto evidenti ſempre però in Medicina periglioſe e ſoſpette , e procedendo nel noſtro intrapreſo diſcorſo , paſſiamo a contemplare , e cogli occhi proprj vedere gl' immediati e paleſi effetti che ſon ſeguiti alla Chinachina da noi nel propoſto caſo adoperata . L' effetto ſuo più viſibile e ſingolare fu quello di gonfiare la ſeconda volta le palpebre e chiudere gli occhi , di rigonfiare tutta la faccia e le mani , e l' altra ſuperficie del corpo , con rialzare

e riempiere di nuova materia le pustule che già cominciavano ad appassirsi. Questo effetto fu tanto rilevante e cospicuo che mi tenne sospeso e dubbioso del suo esito, benchè corrispondesse chiaramente alle mie intenzioni, e benchè sapessi di certo che il gonfiamento della pelle è da riporsi nel Vajuolo fra i segni di un ottimo fine, e benchè in fatti sin d' allora scorgessi un sensibile miglioramento nell' inferma in tutti gli altri sintomi e circostanze del male: viva solo rimanendo la febbre, per nulla ceduta al febbrifugo. A questo così osservabile gonfiamento non seguì tosto secondo il consueto un presto appassimento, ma sussistè per varj giorni, finchè a poco a poco scemò con rimanere tutta la materia dentro alle pustule raccolta e condensata, e la pelle tutta, massimamente del volto, bruttamente incrostata; senza rimanerne però contraffatta la faccia, ma sol difformata la pelle da un buttero spesso ed eguale. Fu quindi in brevissimo tempo salva l'inferma, senzachè una minima porzione di materia si mostrasse ritrocessa o dal sortire per urina, o per secesso, o per decubiti d'interni ascessi, o altri tumori.

Questo effetto di gonfiare la pelle è senza dubbio da attribuirsi alla Chinachina, perchè altro rimedio non fu in tal tempo usato, e perchè successe in un tempo in cui il natural corso del Vajuolo portava anzi al contrario a far appassire le pustule dopo il gonfiamento primiero. Questo stesso effetto osservato fu dal *Morton* (*h*), dal *Monrò* (*i*), e dal *Wall* (*k*), e per ventura da essi notato e scritto, benchè ad altro fine, ed uso dal nostro diverso, abbian essi la Chinachina nel Vajuolo prescritta. E credo io bene che altri pure l'avrebbon veduto e notato, se avessero a questo badato, e se in

(*h*) De Feb. infl. cap. 6. hist. 23.
(*i*) Saggi d'Edimb. tom. 5. art. 10.
(*k*) The philosophical Transactions Abridged, vol. The tenth. p. 1035.

tempo opportuno aveſſero la Chinachina praticata, e in doſi ſufficienti a queſto fine. Or per qual altro mezzo può la Chinachina quell' effetto operare, ſe non per quello ſteſſo da me cercato nell' uſarla; con fermare cioè e ſtringere le interne parti, perchè la materia nemica ſia coſtretta a reſtarſene alla cute, e venga impedita di riconcentrarſi? Le puſtule oltre l' uſato tempo ſempre piene e diſteſe, la denſità e ſpeſſezza delle croſte ſuſſeguite, con il preſto riaverſi dell' inferma in perfetta e ſtabil ſalute, ſenzachè deſſero le materie ſegno di eſſere in veruna porzione rientrate dalla loro comparſa per urine, per ſeceſſo, per decubiti o tumori, ſon tutte coſe che moſtrano evidentemente come nel caſo da noi narrato da principio e propoſto abbia veramente la Chinachina, con iſtringere le interne parti, impedito il riconcentramento della materia vajuoloſa, ſempre pieno di timore e pericolo, in ogni ſpecie e natura di Vajuolo: e con ciò fare abbia dato al male un eſito felice. Non ſi niega che uſata la Chinachina ſul finir del Vajuolo come rimedio antiſettico ed antifebbrile non poſſa buoni e lodevoli effetti produrre; ma nel caſo noſtro evidentemente appare che non per queſti effetti giovò: mentre anzi per l' una parte la materia per virtù della Chinachina alla cute ritenuta corrompendoſi tanto fetore menò, che accorſer le moſche a deporvi dentro i vermetti, o le uova d' onde queſti provennero; e per l' altra parte la febbre viva allor preſente non ſentì punto la forza della Chinachina, ma perſeverò coſtante per alquanti giorni dappoi.

A queſto noſtro nuovo metodo di uſare la Chinachina ſul declinare del Vajuolo come rimedio ſtitico e corroborante due oppoſizioni ſembrano contraſtare, le quali potrebbono ritirare i Pratici dall' abbracciarlo. L' una ſi è che molti antichi e moderni accreditati Scrittori lodano come utiliſſimo nel Vajuolo l' uſo del bagno, ch' è rimedio ammolliente e rilaſſativo, del tut-

to contrario ad una forza ſtitica e coſtrettiva che ſi eſalta. L' altra ſi è che appunto ſul finir del Vajuolo dove noi proponiamo un rimedio ſtitico, molti accreditati Scrittori dietro gl' inſegnamenti del *Freind* propongono al contrario i purgativi che un oppoſto effetto producono.

A queſte oppoſizioni in apparenza sì formidabili facilmente riſpondeſi con far oſſervare che queſte pratiche lodate dagli Autori in nulla ſi oppongono al noſtro metodo, che anzi lo ſecondano e confermano. L' intenzion noſtra è quella unicamente di fare che la materia del Vajuolo non entri a contaminare il ſangue. L' uſo del bagno a queſto ſteſſo fine direttamente conduce: la Chinachina con iſtringere le parti interne affinchè la materia non entri: il bagno con ammollire e dilatare la ſuperficie del corpo, affinchè reſti alla cute la materia e non ſi concentri. L' uſo de' purgativi è diretto a nettare il ſangue dalla materia riconcentrata: l' uſo della Chinachina a preſervare il ſangue da eſſa materia onde non ne reſti infettato. Tanto però è più pregevole e deſiderabile l' effetto della Chinachina ſopra quello de' purgativi, quanto è meglio chiuder la caſa affinchè il ladro non entri, che aſpettare a diſcacciarnelo, entrato che ſia.

Bensì opponeſi il noſtro metodo, e ſalutarmente ſi oppone alla temeraria pratica di alcuni Medicanti, che non temono di replicare il ſalaſſo anche ſul declinar del Vajuolo, perchè con eſſo ſi dà adito e luogo alla triſta materia alla cute generata di entrare nel ſangue, con grave pericolo che non tutta nè sì prontamente fuor n' eſca. Il *Diemerbroechio* fra gli altri ha oſſervate le peſſime conſeguenze di queſta pratica, e l' ha riprovata e condannata. (*l*)

Qualora

(*l*) De Variol. & Morb. cap. 8.

Qualora però siasi persuaso di usare la Chinachina per questo effetto d' impedire alla materia del Vajuolo di riconcentrarsi formata che sia, non è da prescriversi alla cieca in ogni tempo di Vajuolo: ma importa assaissimo incontrare il vero punto di usarla. Questo felice punto propizio non è fisso sempre ad un giorno: ma siccome il Vajuolo varia nel suo corso or più breve or più lungo; or più presto, or più tardi conviene metterla in pratica. Generalmente parlando nel Vajuolo benigno e regolare il settimo giorno dal suo cominciamento metton materia le pustule, ed all' undecimo cominciano ad appassire. Verso il nono però sta il colmo della suppurazione: e questo appunto è il tempo opportuno di usare la Chinachina. Nel Vajuolo confluente e maligno si trova della irregolarità nel suo corso; e quantunque in sè stesso sia più precipitoso e celere, pur le pustule comparse più tardano a metter materia. E questa messa che sia, celermente cresce e si matura. In questa specie però di Vajuolo sarà meglio badare alla prima maturazion delle pustule, specialmente del corpo, per non tardare più oltre a prescrivere la Chinachina: mentre le pustule del volto si trovano poco osservabili, egualmente distendendo la pelle, l' una in l' altra accoppiate e confuse.

Ma per errare il meno che sia possibile in cosa di tanta importanza, sarà sempre meglio nel computo de' giorni del Vajuolo dell' una e dell' altra specie cominciare a numerare dalla prima comparsa delle pustule, e non dal primo apparir della febbre, che ad esse precede. Stantechè or nel secondo, or nel terzo, or nel quarto, e più tardi ancora, e talvolta dopo qualche giorno d' intermissione, danno fuori le pustule. E perchè ancora abbracciando la nostra medicina anche il Vajuolo più benigno e sicuro, in questa specie massimamente il tempo antecedente alle pustule è così poco morboso ed osservabile, che sfugge al senso de' fantolini, ed

alla vista degli astanti. Lasciando dunque da parte questo tempo previo alla comparsa delle pustule, come poco rimarcabile, e come troppo vario nella sua durabilità, computeremo al nostro uopo il solo tempo della presenza delle pustule; e diremo che circa il settimo giorno sta il tempo opportuno di cominciare a metter in pratica la Chinachina nel Vajuolo, all' effetto desiderabilissimo di chiuder la via alla sua materia di riconcentrarsi.

L' anticipar questo tempo è inutile per il fine che si desidera; perchè non è ancor generata la materia che si vuol ritenere alla cute. Anzi potrebbe esser dannoso, incontrandosi ancor viva la infiammazione; ch' è quanto dire il lavoro della materia purulenta. Nel qual tempo usata la Chinachina, potrebbe, con frenare i salutari moti della natura, impedire quest' opera, senza di cui non sa essa nè può liberarsi dal Vajuolo. Tutte quindi le Scuole de' Medici dietro gl' insegnamenti del *Sidenamio* (*m*) fuggono con grande attenzione l' uso dalla Chinachina nelle febbri ardenti ed infiammatorie: ed il *Boeravio* si guardava dall' usarla nelle febbri stesse periodiche, nelle quali peraltro è sicuro medicamento, qualora per accidente fosse ad esse congiunto qualche morbo d' infiammazione, o fossero ascese a qualche grado di essa. (*n*)

Io so che alcuni Medici della Germania in questi ultimi tempi non hanno dubitato di tentare la Chinachina ne' morbi infiammatorj febbrili: sopra di che si trovano dati alla luce alcuni libri con i superbi titoli: *De virtute antiphlogistica Corticis Peruviani* (*o*). *De tempestivo Corticis Peruviani usu in febribus inflam-*

(*m*) Epist. Resp. 1.
(*n*) Aphor. 767.
(*o*) *Weichert*.

matoriis (*p*). E noi pure altrove qualche caso abbiamo addotto che sembra favorire questa opinione (*q*). Eccone un altro ancor più rimarcabile e significativo pochi giorni sono da me osservato. Vengo io chiamato a visitare un Fornajo, che avea una febbre ardente, cagionatagli dall' esfersi egli poco prima grandemente affaticato ed infiammato nello scaldare un forno nuovo non usato. Il suo polso era *stridulo* (quale io ho descritto nel mio libro *de' morbi purulenti*) ed avea gli occhi splendenti, le urine rosse e crude, sopore e sete. Due cavate di sangue, e copiose bibite nitrate e rinfrescative, non valsero a frenar l' impeto del morbo: il quale anzi verso il settimo vestiva caratteri minacciosi e sospetti. Mi son risoluto di tentare la Chinachina: sotto il cui uso è presto ceduta la febbre; e senz'altra ragione o crisi si trova in oggi salvo e libero l'infermo. Ma perchè pochi casi e mendicate ragioni non bastano a combattere una pratica ben fondata ed universale, resteremo noi, sinchè più convincenti fatti e migliori ragioni si adducano, nella volgare credenza, che non sia da usarsi la Chinachina nelle infiammazioni: se non fosse una qualche volta in sul declinare delle medesime, come saggiamente coll' *Offmanno* (*r*) e col *Pringle* (*s*) concludono *Francesco Reyes* (*t*) e *Cristiano Augusto Held*. (*u*)

Che se tanti riguardi si devono avere circa l'uso della Chinachina ne' morbi ordinarj d'infiammazione, che portano ad una buona e lodevole suppurazione, acciocchè questa non venga frastornata; quanto maggiori non dovransene avere nel Vajuolo, la di cui materia ha per

(*p*) *Held*.
(*q*) Dissert. sopra il Quesito: *Se nel caso* ecc. p. 46.
(*r*) Med. Syst. tom. 4. sect. 2. cap. 2.
(*s*) Osserv. part. 3. cap. 4.
(*t*) De Inflammaciones internas, tratado 2. cap. 2.
(*u*) De tempestivo Cort. Peruv. usu in febr. infl. num. 12.

sè ſteſſa ſpeciali caratteri di malizia e velenoſità? Si opporrà che il *Wall*, l'*Huxham*, ed il *Morandi* in ogni tempo di Vajuolo l'hanno preſcritta e lodata. Ma l'*Huxham* ed il *Morandi* oſſervazioni particolari non danno che la comprovino; ed i pochi eſempj del *Wall* di ſopra allegati, o nulla provano, o ben anche provano il contrario. Perciocchè nel caſo primo, e nel ſettimo, dov' egli preſcriſſe la Chinachina nel principio e progreſſo del Vajuolo, morirono gl' infermi: quantunque l' Autore ſi compiaccia d' averla uſata. Nè le ragioni da queſti Autori addotte molto provano, perchè ſi erigono ſu fondamenti dubbioſi e fallaci. Suppongono eſſi che nel Vajuolo il ſangue ſia sfibrato e diſciolto per la povertà dei globetti roſſi che lo compongono. Ma tutto al contrario per le oſſervazioni del *Sidenamio* (*x*), del *Baglivio* (*y*), del *Boeravio* (*z*), dell' *Haen* (*a*), e di altri molti ch'è ſuperfluo nominare, il ſangue tratto dalle vene nel Vajuolo, anche ſul finire di eſſo ſi trova denſo e coperto di croſta gelatinoſa, quale trovar ſi ſuole nelle infiammazioni; toltine alcuni pochi caſi, dov'è degenerato il morbo in cangrena.

Il tardar troppo oltre lo ſtabilito tempo a mettere in uſo la Chinachina nel Vajuolo, fa che coi giorni ſia fuggita via l'occaſion di giovare, con aver dato adito e tempo alla materia di riconcentrarſi; la quale ſi dovea con quel rimedio alla cute fermare e ritenere. Entrata che ſia in buona parte queſta materia a contaminare il ſangue, come avvenir ſuole ceſſato l'impeto interno degli umori col ceſſare del fervore infiammatorio, quale utilità ſi dovrà in tal caſo dalla Chinachina aſpettare? Sia pur che in qualche modo a gio-

(*x*) Obſ. Med. ſect. 2. cap. 2.
(*y*) Prax. Med. lib. 1. cap. 9.
(*z*) Aph. 1384.
(*a*) Rat. Med. part. 2. cap. 6.

var venga come *antisettico*, non gioverà certo a cacciar dalle vene la trista materia: a che anzi, rallentando le separazioni, verrà ad essere d'ostacolo. Bensì sarà utile, cominciato che abbiasene l'uso in tempo opportuno, per più giorni seguitare ad usarla dappoi, finchè indurita e seccata la materia, non sia più a portata di entrare nel sangue. Anzi affinchè l'occasion di giovare, qui più che in altro morbo precipitosa e fugace, non iscappi, forti e replicate dosi di Chinachina ne' primi due giorni si richieggono al desiderato effetto, regolate a misura della pienezza e quantità delle pustule. Negli adulti che hanno un copioso Vajuolo due once almeno se ne richieggono per farne decozione, da prendersi partitamente ne' due primi dì. Dopo di ciò sarà sufficiente una dramma di Chinachina usata due volte al giorno fino al totale disseccamento delle pustule. Nei bambini, o dove le pustule non sono molto numerose e piene basteranno dosi minori; e si potrà in questi usar per crestiere, se ad ogni modo rifiutino di prenderla per bocca. Io amo meglio usare dapprincipio la Chinachina in decozione, perchè credo che con la cottura s'immedesimi maggiormente con l'acqua; e sia quindi più atta a penetrar con essa dentro le vene: quantunque io sappia che nelle febbri ed in altri morbi, dov'essa operar dee i suoi effetti principali nelle prime vie, sia più forte ed efficace usata in sostanza.

Quanti medicamenti efficacissimi riescono vani in pratica, o ben anche dannosi, perchè fuor di tempo adoperati! Di qui credo io, più che d'altronde, derivi l'infamia d'incertezza che essi, e con essi la Medicina tutta si sono acquistata. *Neque vero ipse ullum speciosum medicamentum agnosco, quin solo tempestivo usu tale fiat*, diceva il *Boeravio* nella Prefazione a' suoi Aforismi.

FINE del Tomo primo.

ERRORI	CORREZIONI
pag. 1. l. 4. Naime	Nairne *e così dipoi*.
l. 17. da	ad
2. l. 26. coricarſi	caricarſi
12. l. 15. manca dopo il *che*	ſono la lunghezza della punta unita all' armatura, e fanno pollici dodici, linee nove, che
15. l. 19. piedi	più di
l. 30. fu	fa
16. l. 2. comparandole	componendole
19. l. 18. 0 : 4	1 : 6
22. l. 1. / 24. l. 4. prima	piena
36. l. 18. dopo la parola *poſſano* ſi aggiunga	non deſcrivere nello ſteſſo tempo, che ſpazj eguali, e ſe ſono le maſſe ineguali, ſi fa, che intorno allo ſteſſo centro del moto deſcrivano, e non poſſano
44. l. 15. Teor. 10. 6. 4.	Teor. 10. *b. k*
51. l. pen. miſura	miſtura.
62. l. 2. $\frac{1}{2n}2$ farà=7,8534090	$\frac{1}{2n^2}$ farà = 9, 544530
183. l. 12. negativa	poſitiva
733. l. 10. $\sqrt{(\frac{q^3}{4}-\frac{p^3}{27})}$	$\sqrt{(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27})}$
574. l. ultima nella not. metificità	meficiticità.
578. l. 4. ne' è	n' è
582. nella nota* l. antepen. luo-	luogo
608. l. 24. alle	alla

BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY